

**А. Б. БОРИСОВ  
В. В. КИСЕЛЕВ**

# **КВАЗИОДНОМЕРНЫЕ МАГНИТНЫЕ СОЛИТОНЫ**



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ®  
2014

УДК 530.182.1+537.6

ББК 22.31

Б 82

Борисов А.Б., Киселев В.В. **Квазиодномерные магнитные солитоны.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. — 520 с. — ISBN 978-5-9221-1590-2.

Монография содержит полное и замкнутое изложение современного состояния теории квазиодномерных магнитных солитонов. Кроме традиционного описания нелинейной динамики магнетиков с помощью уравнений Ландау – Лифшица, излагается метод феноменологических лагранжианов спиновых волн. Наиболее эффективные методы интегрирования нелинейных уравнений – метод обратной задача рассеяния и процедура «одевания» – применяются для построения и анализа солитонных решений базовых моделей теории магнетизма: уравнений Ландау – Лифшица для изотропного ферромагнетика, ферромагнетиков с квадратичной по намагниченности анизотропией, двухподрешеточного ферримагнетика, а также киральных моделей для многоподрешеточных магнетиков. Специальные варианты редуктивной теории возмущений развиты для изучения слабонелинейной динамики обменно-магнитостатических волн в пластинах конечной толщины, а также магнитоупругих солитонов. В рамках модели синус–Гордон аналитически описана сильнонелинейная динамика в спиральных структурах магнетиков без центра инверсии.

Книга адресована научным сотрудникам, аспирантам и студентам вузов соответствующих специальностей.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	8
<b>Глава 1. Феноменологическая теория магнетизма . . . . .</b>	<b>11</b>
1.1. Феноменологическое описание нелинейной динамики магнетиков с помощью магнитных подрешеток . . . . .	11
1.1.1. Основные уравнения (11). 1.1.2. Связь с микротеорией (15).	
1.2. Феноменологический подход к релаксационным процессам в многоподрешеточных магнетиках. . . . .	22
1.3. Ферромагнитная пластина как пример ограниченного образца. . . . .	25
1.3.1. Энергия, диссипативный функционал, условия существования однородной намагниченности в пластине (25). 1.3.2. Уравнения динамики (31). 1.3.3. Краевые условия, принцип Гамильтона (34).	
1.4. Магнитоупругие взаимодействия в многоподрешеточных магнетиках . . . . .	35
1.5. Обменная симметрия и метод феноменологических лагранжианов . . . . .	44
1.5.1. Обменная симметрия магнетиков (45). 1.5.2. Динамические симметрии, метод феноменологических лагранжианов для голдстоуновских частиц (49).	
1.6. Феноменологические лагранжианы нелинейной динамики голдстоуновских спиновых волн . . . . .	62
1.7. Учет внешнего магнитного поля, релятивистских взаимодействий и процессов релаксации в методе феноменологических лагранжианов спиновых волн. . . . .	75
1.8. Обсуждение эквивалентности подхода Ландау–Лифшица к описанию динамики магнетиков и метода феноменологических лагранжианов спиновых волн . . . . .	79
1.9. Феноменологический лагранжиан магнитоупругих взаимодействий . . . . .	87
<b>Глава 2. Нелинейная динамика изотропного ферромагнетика. Методы интегрирования в теории солитонов . . . . .</b>	<b>94</b>
2.1. Метод обратной задачи рассеяния и солитоны . . . . .	94

2.2. Основные уравнения квазиодномерной динамики изотропного ферромагнетика . . . . .	105
2.2.1. Континуальная модель. Построение $U$ – $V$ -пары (105).	
2.2.2. Вспомогательные линейные уравнения (108).	
2.3. Прямая задача рассеяния . . . . .	111
2.3.1. Интегральные представления функций Ёоста (111).	
2.3.2. Редукции на функции Ёоста и матрицу перехода (113).	
2.3.3. Свойства аналитичности функций Ёоста и элементов матрицы перехода (114). 2.3.4. Эволюция данных рассеяния (117).	
2.4. Асимптотика элементов матрицы перехода при $ \lambda  \rightarrow \infty$ . Производящая функция интегралов движения . . . . .	118
2.5. Дисперсионные соотношения. Связь результатов квазиклассической модели с квантовыми состояниями изотропной цепочки спинов	122
2.6. Обратная задача рассеяния . . . . .	127
2.7. Солитонные решения . . . . .	131
2.8. Матричная задача Римана . . . . .	134
2.9. Интегрирование нелинейных уравнений с помощью матричной задачи Римана . . . . .	139
2.9.1. «Одевание» частных решений интегрируемых моделей с использованием регулярной задачи Римана (139). 2.9.2. Задача Римана с нулями (147). 2.9.3. Схема «одевания» в общем случае (152).	
2.10. Анализ солитонных состояний изотропного ферромагнетика методом «одевания» . . . . .	155
2.11. Радиальные волны в изотропном ферромагнетике . . . . .	163
<b>Глава 3. Нелинейная динамика ферромагнетика с анизотропией типа «легкая ось» . . . . .</b>	<b>169</b>
3.1. Квазиодномерная динамика ферромагнетика при учете размагничивающих полей и энергии магнитной анизотропии . . . . .	169
3.1.1. Основные интегрируемые модели (169). 3.1.2. Представления нулевой кривизны (172).	
3.2. Решения Ёоста, редукции для ферромагнетика с анизотропией типа «легкая ось» и равновесными значениями намагниченности на бесконечности . . . . .	174
3.3. Прямая задача рассеяния . . . . .	177
3.4. Обратная задача рассеяния в случае начальных распределений намагниченности с асимптотикой $\mathbf{S} \rightarrow (0, 0, 1)$ при $ x  \rightarrow \infty$ . Прецессирующие солитоны . . . . .	185
3.5. Обратная задача рассеяния в случае начальных распределений намагниченности с асимптотическим поведением $\mathbf{S} \rightarrow (0, 0, \pm 1)$ при $x \rightarrow \pm\infty$ . Доменные стенки . . . . .	197
3.6. «Одевание» тривиальных решений $\mathbf{S} = (0, 0, \pm 1)$ уравнений Ландау–Лифшица с анизотропией типа «легкая ось» . . . . .	205

3.7. Вынужденное движение доменной стенки в поле нелинейной спиновой волны . . . . .	216
3.7.1. Постановка задачи (216). 3.7.2. Свойства решений Йоста. Метод «одевания» (221).	
3.8. Взаимодействие нелинейной волны с бризерами и зародышами перемagnичивания. . . . .	234
3.8.1. Построение бризерных решений (234). 3.8.2. Сценарии «разрушения» бризера волной (242). 3.8.3. Уединенный домен на фоне волны (246).	
3.9. Интегралы движения для солитонов на фоне волны. . . . .	249
<b>Глава 4. Динамика квазиодномерного ферромагнетика с анизотропией типа «легкая плоскость» . . . . .</b>	<b>253</b>
4.1. Солитоны на фоне волны намагниченности и метод «одевания» . . . . .	253
4.2. Рассеяние волны прецессии произвольной амплитуды на алгебраических солитонах и волнах поворота намагниченности. Разрушение солитонов. . . . .	257
4.3. Бризеры на фоне волны прецессии . . . . .	264
4.4. Приложение модели легкоплоскостного ферромагнетика для анализа солитонов в спиральных структурах . . . . .	269
<b>Глава 5. Интегрирование уравнений ферромагнетика с двухосной магнитной анизотропией . . . . .</b>	<b>272</b>
5.1. Прямая и обратная задачи для уравнений Ландау–Лифшица анизотропного ферромагнетика . . . . .	272
5.1.1. Преобразования прямой задачи рассеяния (273). 5.1.2. Обратное спектральное преобразование (278).	
5.2. Метод «одевания» на торе. Солитонные решения с асимптотиками $\mathbf{S} \rightarrow (0, 0, 1)$ при $x \rightarrow \pm\infty$ . . . . .	284
5.2.1. Бризеры двухосного ферромагнетика (289). 5.2.2. Взаимодействие двух доменных стенок (299).	
5.3. Солитонные решения модели двухосного ферромагнетика с асимптотиками $\mathbf{S} \rightarrow (0, 0, \pm 1)$ при $x \rightarrow \pm\infty$ . . . . .	304
5.4. Регулярная задача Римана на торе . . . . .	308
5.5. Интегралы движения и спектр нелинейных возбуждений . . . . .	312
<b>Глава 6. Нелинейные волны и солитоны в системе двух кристаллографически неэквивалентных магнитных подрешеток . . . . .</b>	<b>319</b>
6.1. Эффективные уравнения ферромагнетика и их $U-V$ -пара. . . . .	319
6.2. Интегрирование динамических уравнений методом обратной задачи рассеяния. . . . .	323
6.3. Солитоны в ферромагнетике . . . . .	332
6.4. Элементарные возбуждения в ферромагнетике . . . . .	338
6.5. Двумерные волны прецессии в изотропном ферромагнетике . . . . .	343

<b>Глава 7. Применение матричной задачи Римана к макроскопической динамике голдстоуновских возбуждений в упорядоченных магнетиках</b> . . . . .	349
7.1. Основные интегрируемые модели метода феноменологических лагранжианов для магнитных систем . . . . .	349
7.2. Построение $U$ - $V$ -пар. Основные соотношения . . . . .	352
7.3. Нелинейная динамика недиссипативного спинового стекла. Модель главного кирального поля . . . . .	357
7.4. Динамика неколлинеарного антиферромагнетика со структурой типа $YMnO_3$ . Осесимметричная киральная модель . . . . .	363
7.4.1. Процедура интегрирования модели (363). 7.4.2. Многоподрешеточные магнитные солитоны (369).	
7.5. Многосолитонные решения общих уравнений динамики голдстоуновских возбуждений (асимметричная киральная $SU(2)$ -модель) . . . . .	375
<b>Глава 8. Слабонелинейные магнитостатические и магнитоупругие солитоны</b> . . . . .	388
8.1. Нелинейная динамика обменно-дипольных спиновых волн в ферромагнитной пластине конечной толщины . . . . .	389
8.1.1. Редуктивная теория возмущений (392). 8.1.2. Первый порядок теории возмущений. Спектр спиновых возбуждений (397). 8.1.3. Приближенное решение краевой задачи на собственные значения (399). 8.1.4. Нелинейное уравнение эволюции для огибающей спиновых волн при $\partial_k^2 \omega \neq 0$ (400).	
8.2. Квазисолитоны в окрестности точки нулевой дисперсии . . . . .	404
8.3. Нелокальная динамика голдстоуновских возбуждений в антиферромагнитной пленке . . . . .	412
8.3.1. Постановка задачи (413). 8.3.2. Эффективное уравнение слабонелинейной динамики голдстоуновских мод (415). 8.3.3. Анализ солитонных решений. Обменная релаксация солитонов (418).	
8.4. Нелинейный магнитоупругий резонанс длинных и коротких волн в магнетиках. . . . .	421
8.4.1. Солитоны, обусловленные взаимодействием квазиакустических мод (426). 8.4.2. Взаимодействие активационных волн (430). 8.4.3. Магнитоупругий резонанс Бенни. Связь с интегрируемыми моделями (432).	
<b>Глава 9. Нелинейная динамика спиральной (полосовой доменной) структуры</b> . . . . .	439
9.1. Основные уравнения . . . . .	441
9.1.1. Модель sine-Gordon для геликоидальной структуры (441). 9.1.2. Процедура интегрирования (445).	
9.2. Солитоны в спиральной структуре . . . . .	450
9.2.1. Лишняя доменная стенка (кинк) в структуре (451). 9.2.2. Бризеры (связанные состояния доменных границ) в струк-	

---

туре (457). 9.2.3. Трансляции структуры при столкновениях солитонов (463).	
9.3. Нелинейная динамика спиновых волн . . . . .	468
9.4. Дисперсионные соотношения на торе и спектр интегралов движения . . . . .	474
Приложение. Техника работы с эллиптическими функциями. . . . .	484
Список литературы . . . . .	492

*С благодарностью нашим родителям,  
учителям и наставникам*

## Предисловие

*Насколько я помню, я никогда не встречал авторского предисловия, которое имело бы какую-то иную цель, кроме одной — оправдать публикацию Книги.*

*Марк Твен*

К настоящему времени исследования в области нелинейной динамики магнитоупорядоченных сред отражены в единственной монографии «Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны» (А. М. Косевич, Б. А. Иванов, А. С. Ковалев, 1983), которая стала классической. С момента выхода этой книги теория солитонов испытала период необычайно быстрого роста. Были разработаны технические приемы, использующие самые разнообразные математические средства, с помощью которых успешно решено невероятное количество задач. Изучение такого объема материала требует упорного труда. Между тем все расширяется круг лиц, которым приходится пользоваться методами теории солитонов. Эти обстоятельства побудили нас предпринять попытку краткого и доступного изложения основных идей и результатов теории квазиодномерных магнитных солитонов, которые образуют «каркас» для решения многочисленных конкретных задач.

Первая глава носит вспомогательный характер. В ней кратко изложены основы феноменологической теории магнитоупорядоченных сред, включая описание процессов релаксации в магнетиках, учитывающее динамическую симметрию задачи. Кроме традиционного подхода, трактующего динамику магнитного кристалла как нелинейную динамику вставленных друг в друга магнитных подрешеток, впервые в монографической литературе изложен метод феноменологических лагранжианов спиновых волн, основанный на концепции спонтанного нарушения симметрии обменных взаимодействий. В рамках обоих подходов обсуждается возможность учета релятивистских, магнитостатических и магнитоупругих взаимодействий. Читатель, знакомый с макроскопической теорией магнетизма, может пропустить эту главу при первом чтении книги и возвращаться к ней по мере необходимости.

Вторая глава является основной. В ней на примере гейзенберговского ферромагнетика объясняются методы интегрирования квазиодномерных моделей магнетизма. Изложена простая схема построения  $U$ - $V$ -пары для нелинейного уравнения Ландау–Лифшица. Наличие  $U$ - $V$ -пары



открывает возможность полного интегрирования нелинейных уравнений методом обратной задачи рассеяния или более универсальным методом «одевания» частных решений с помощью задачи Римана. Показано, как строить спектр элементарных возбуждений сильно нелинейной интегрируемой системы. В этой же главе изложен метод построения  $U-V$ -пар с движущимся спектральным параметром, который по известным интегрируемым нелинейным уравнениям в частных производных с постоянными коэффициентами позволяет строить новые интегрируемые уравнения с переменными коэффициентами. Плодотворность метода проиллюстрирована на примере теоретического описания аксиально-симметричных волн намагниченности в изотропном ферромагнетике.

В третьей и четвертой главах изложена процедура интегрирования динамических уравнений ферромагнетика с магнитной анизотропией типа «легкая ось» и «легкая плоскость». Кроме того, в третьей главе и в приложении к ней объясняется техника работы с эллиптическими функциями, которая чрезвычайно полезна для дальнейших обобщений метода «одевания». Получены и детально исследованы все солитоны с однородной асимптотикой на пространственной бесконечности. Аналитически описано взаимодействие нелинейных волн прецессии большой амплитуды с магнитными солитонами. В легкоосном ферромагнетике скоростью движения солитонов, в частности доменных границ и зародышей перемагничивания, можно управлять, меняя волновое число и амплитуду волны накачки. В ферромагнетике с анизотропией типа «легкая плоскость» проанализировано изменение внутренней структуры солитонов под действием внешнего магнитного поля, направленного вдоль оси анизотропии. Магнитное поле снимает вырождение основного состояния и приводит к большому разнообразию солитонов. Показано, что интегрируемая модель легкоплоскостного ферромагнетика тесно связана с моделью, описывающей нелинейные волны намагниченности и солитоны в геликоидальных магнитных структурах.

Ферромагнетик с двухосной магнитной анизотропией — пример системы с сильной дисперсией. Для линейных мод зависимость частоты от волнового числа имеет вид  $\omega = \sqrt{P_4(k)}$ , где  $P_4(k)$  — полином четвертой степени по  $k$ . Поскольку закон дисперсии не аналитичен по константам анизотропии, невозможно построить теорию возмущений по малой анизотропии. Все это проявляется в усложнении теории:  $U-V$ -пара двухосного ферромагнетика, в отличие от ранее рассмотренных задач, содержит зависимость от спектрального параметра не через рациональные функции, а через эллиптические функции Якоби. В пятой главе изложена модификация методов обратной задачи рассеяния и «одевания», позволяющая полностью исследовать особенности нелинейной динамики ферромагнетика с двухосной магнитной анизотропией. Найдены и проанализированы все солитоны с однородной асимптотикой на пространственной бесконечности. Получен спектр элементарных возбуждений сильно нелинейных состояний двухосного ферромагнетика.

В шестой и седьмой главах рассматриваются многоподрешеточные магнитные солитоны в изотропном ферромагнетике с двумя магнитными подрешетками и в киральных моделях, которые описывают нелинейную динамику неколлинеарных ферри- и антиферромагнетиков. Интересно, что интегрируемая модель ферромагнетика оказывается универсальной. В частности, она описывает широкий класс двумерных распределений намагниченности в изотропных ферро- и антиферромагнетиках. Показано, что в ферромагнетике элементарными возбуждениями являются нелинейные спиновые волны (две ветви) и солитоны, которые вносят аддитивный вклад в энергию и импульс любого локализованного распределения намагниченности. В неколлинеарных ферри- и антиферромагнетиках найдены решения солитонного типа, которые описывают систему пространственно локализованных магнитных возбуждений на фоне двух бегущих навстречу друг другу нелокализованных волн намагниченности. Установлено, что волны намагниченности приводят к амплитудной и фазовой модуляции локализованных возбуждений. При достаточно большой амплитуде волн они разрушают локализованные возбуждения.

В восьмой главе излагаются приемы редуктивной теории возмущений, позволяющие корректно аппроксимировать слабонелинейную динамику реальной достаточно сложной системы в рамках более простых нелинейных моделей, которые допускают подробное исследование методами теории солитонов. Эффективность нелинейной теории возмущений проиллюстрирована на примерах описания обменно-магнитостатических солитонов в конечных системах (ферро- и антиферромагнитных пластинках) и солитонов, связанных с резонансным обменом энергией между различными ветвями спектра магнитоупругих мод.

В девятой главе в рамках модели *sine-Gordon* исследована нелинейная динамика солитонов и спиновых волн в геликоидальной структуре магнетиков без центра инверсии. Анализ нелинейных возбуждений на фоне спиральной структуры при произвольных начальных распределениях намагниченности в структуре и заданных краевых условиях сведен к решению линейных интегральных уравнений на римановой поверхности, которая порождена структурой. Получены спектральные разложения интегралов движения, в которых выделены вклады солитонов и спиновых волн. Установлено, что столкновения солитонов друг с другом сопровождаются не только изменением координат их центров и фаз, но и сдвигами самой структуры. Обсуждаются возможности экспериментального обнаружения солитонов в спиральной структуре.

Авторы признательны научному редактору проф. А. П. Танкееву, внимательно прочитавшему рукопись и сделавшему ряд полезных замечаний. А. П. Танкеев и А. А. Расковалов принимали участие при исследовании некоторых вопросов, изложенных в книге. Большую помощь при оформлении рукописи оказали Д. В. Долгих и А. А. Расковалов. Авторы благодарны Л. А. Памятных за любезно предоставленные фотографии доменных структур для обложки к книге.

# Глава 1

## ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ МАГНЕТИЗМА

### 1.1. Феноменологическое описание нелинейной динамики магнетиков с помощью магнитных подрешеток

*In medius res.*  
(В самую суть дела; с места в карьер — лат.)

Из Горация

#### 1.1.1. Основные уравнения

В традиционной феноменологической теории магнитных кристаллов сложные магнитные структуры рассматриваются как совокупность вставленных друг в друга магнитных подрешеток [1–3]. При континуальном описании каждая магнитная подрешетка характеризуется средней плотностью магнитного момента  $M_{\nu i}(\mathbf{x}, t)$ , где  $x_j$ ,  $t$  — пространственные координаты и время, индексы, обозначенные латинскими буквами, принимают значения  $i, j = 1, 2, 3$  и  $\nu$  — номер подрешетки.

Полная энергия ограниченного образца включает объемную и поверхностную энергии. Поверхностная энергия конкретизирует краевые условия для уравнений динамики полей  $M_{\nu i}(\mathbf{x}, t)$ . Явный вид динамических уравнений определяется только объемной частью энергии кристалломагнетика, которая записывается в форме разложения [1, 2]:

$$W = \int_{V_0} [A_{ij}^{\nu_1\nu_2} M_{\nu_1 i} M_{\nu_2 j} + B_{ij,s}^{\nu_1\nu_2} (M_{\nu_1 i} \partial_s M_{\nu_2 j} - M_{\nu_2 i} \partial_s M_{\nu_1 j}) + \\ + C_{ij,sp}^{\nu_1\nu_2} \partial_s M_{\nu_1 i} \partial_p M_{\nu_2 j} + \dots] d^3\mathbf{x} + W^{(m)} - \int_{V_0} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}^{\text{ext}}) d^3\mathbf{x}. \quad (1.1.1)$$

Здесь суммирование проводится по всем дважды встречающимся индексам, интегрирование ведется по области  $V_0$ , занятой магнитным материалом.

Полная локальная намагниченность среды  $\mathbf{M} = \sum_{\nu} \mathbf{M}_{\nu}$  порождает магнитное поле  $\mathbf{H}^{(m)}$ :

$$H_i^{(m)} = \text{V. p.} \int_{V_0} M_k(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial x'_i \partial x'_k} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 \mathbf{x}'. \quad (1.1.2)$$

Буквы V. p. указывают, что интеграл вычисляется в смысле главного значения Коши, т. е. интегрирование ведется по области  $V_0$  с исключением малого объема, ограниченного сферой  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \rho$ , в конце расчета берется предел  $\rho \rightarrow 0$ . В соотношении (1.1.1)  $W^{(m)}$  — нелокальная энергия взаимодействия намагниченности кристалла  $\mathbf{M}$  с размагничивающим полем  $\mathbf{H}^{(m)}$ :

$$W^{(m)} = -\frac{1}{2} \int_{V_0} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}^{(m)}) d^3 \mathbf{x}. \quad (1.1.3)$$

Для дальнейшего анализа полезно ввести магнитостатический потенциал  $\Psi$ , который является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} \Delta \Psi &= 4\pi \operatorname{div} \mathbf{M} \quad (\mathbf{x} \in V_0); & \Delta \Psi &= 0 \quad (\mathbf{x} \in V_1); \\ n_i [-\partial_i \Psi + 4\pi M_i]_-|_{\sigma} &= -n_i \partial_i \Psi_+|_{\sigma}, & \Psi_-|_{\sigma} &= \Psi_+|_{\sigma}, \\ \Psi &\rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

Здесь  $\sigma$  — поверхность магнитного кристалла, индексы «+» и «-» служат для обозначения полей вне и внутри кристалла,  $n_i$  — компоненты единичной внешней нормали к поверхности  $\sigma$ ,  $V_1$  — область вне магнитного кристалла ( $V_0 + V_1$  — все трехмерное пространство с координатами  $x_i$ ). Решение задачи (1.1.4) имеет вид [1, 2]

$$\Psi = - \int_{V_0} d^3 \mathbf{x}' \frac{\operatorname{div} \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \int_{\sigma} d\sigma_k \frac{M_k(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \int_{V_0} d^3 \mathbf{x}' M_k(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial x'_k} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}.$$

Здесь  $d\sigma_k$  — элемент поверхности образца, все интегралы предполагаются сходящимися и вычисляются без ограничений на  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ . Потенциал  $\Psi$  определяет поле  $\tilde{H}_i^{(m)} = -\partial_i \Psi$ , которое немного отличается от  $H_i^{(m)}$ . При условии непрерывности функции  $\mathbf{M}(\mathbf{x})$  в точке  $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$  находим

$$\begin{aligned} \tilde{H}_i^{(m)} &= \int_{V_0} d^3 \mathbf{x}' M_k(\mathbf{x}') \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x'_k} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = -\frac{4\pi}{3} M_i(\mathbf{x}) + \\ &+ \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| > \rho} M_k(\mathbf{x}') \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x'_k} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 \mathbf{x}' = -\frac{4\pi}{3} M_i + H_i^{(m)}. \end{aligned}$$

В терминах  $\tilde{\mathbf{H}}^{(m)}$  магнитостатическую энергию (1.1.3) можно записать в виде

$$W^{(m)} = -\frac{1}{2} \int_{V_0} \mathbf{M} \cdot \left( \tilde{\mathbf{H}}^{(m)} + \frac{4\pi}{3} \mathbf{M} \right) d^3 \mathbf{x}. \quad (1.1.5)$$

Второе слагаемое в правой части (1.1.5) удобно объединить с первым слагаемым в разложении (1.1.1) энергии кристалломагнетика. Тогда магнитостатической энергией образца будет

$$\widetilde{W}^{(m)} = -\frac{1}{2} \int_{V_0} \left( \mathbf{M} \cdot \tilde{\mathbf{H}}^{(m)} \right) d^3 \mathbf{x} = \frac{1}{2} \int_{V_0} M_i \partial_i \Psi d^3 \mathbf{x}, \quad (1.1.6)$$

где при расчете  $\Psi$  и  $\tilde{\mathbf{H}}^{(m)}$  уже нет ограничений на  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ .

Приведем другое представление для энергии  $\widetilde{W}^{(m)}$ , полезное при расчетах. Интегрированием по частям с учетом соотношений (1.1.4) нетрудно получить тождества

$$\begin{aligned} \int_{V_1} (\partial_i \Psi)^2 d^3 \mathbf{x} &= -(\Psi n_i \partial_i \Psi)_+ |_{\sigma} = [\Psi n_i (-\partial_i \Psi + 4\pi M_i)]_- |_{\sigma}; \\ \int_{V_0} M_i \partial_i \Psi d^3 \mathbf{x} &= \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \partial_i \Psi [(-\partial_i \Psi + 4\pi M_i) + \partial_i \Psi] d^3 \mathbf{x} = \\ &= \frac{1}{4\pi} [\Psi n_i (-\partial_i \Psi + 4\pi M_i)]_- |_{\sigma} + \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} (\partial_i \Psi)^2 d^3 \mathbf{x} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{V_0 + V_1} d^3 \mathbf{x} (\partial_i \Psi)^2. \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

В первом из равенств (1.1.7) учли, что на поверхности  $\sigma$  внешняя нормаль к области  $V_1$  равна  $-\mathbf{n}$ .

Используя тождества (1.1.7), энергию (1.1.6) можно представить в форме

$$\widetilde{W}^{(m)} = \int_{V_0} M_i \partial_i \Psi d^3 \mathbf{x} - \frac{1}{8\pi} \int_{V_0 + V_1} (\partial_i \Psi)^2 d^3 \mathbf{x}. \quad (1.1.8)$$

В последнем члене в правой части (1.1.8) интегрирование производится по всему пространству  $V_0 + V_1$ . Использование выражения (1.1.8) для энергии  $\widetilde{W}^{(m)}$  предпочтительнее при формулировке вариационных принципов, поскольку позволяет варьировать поля  $\Psi$  и  $\mathbf{M}_\nu$  независимо. Это дает не только уравнения для расчета полей  $\Psi$  и  $\mathbf{M}_\nu$ , но и необходимые граничные условия к ним.

В представлении (1.1.1) слагаемое

$$- \int_{V_0} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}^{\text{ext}}) d^3x$$

соответствует энергии взаимодействия магнетика с внешним магнитным полем  $\mathbf{H}^{\text{ext}}$ . Заметим, что по установившейся традиции в качестве магнитного поля здесь используется вектор напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}^{\text{ext}}$ , хотя истинным средним макроскопическим полем в среде (входящим, наряду с напряженностью электрического поля  $\mathbf{E}$ , в силу Лоренца) является, конечно, магнитная индукция  $\mathbf{B}$  [3]. Для системы единиц СГС, в которой мы работаем, это не существенно, но должно учитываться при переходе к системе СИ.

Выражение для энергии (1.1.1) должно быть инвариантным относительно преобразований группы магнитной симметрии кристалла. Это условие определяет конкретный вид феноменологических постоянных  $A, B, \dots$ . При симметричном описании магнетиков, кроме пространственных элементов симметрии (поворотов, отражений и трансляций), приходится вводить еще один элемент симметрии — операцию обращения времени. Существование такой операции связано с инвариантностью уравнений движения микрочастиц, образующих магнитный кристалл, по отношению к изменению знака времени с одновременным изменением на обратные направлений вектора  $\mathbf{H}^{\text{ext}}$  и магнитных моментов микрочастиц. При обращении времени имеем

$$\mathbf{H}^{\text{ext}} \rightarrow -\mathbf{H}^{\text{ext}}, \quad \mathbf{M}_\nu \rightarrow -\mathbf{M}_\nu.$$

Поэтому в разложении (1.1.1) отсутствуют члены, содержащие произведения из нечетного числа множителей  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{M}_\nu$ .

В формировании магнитной структуры основную роль играют обменные взаимодействия. В разложении (1.1.1) обменным взаимодействиям отвечают слагаемые с коэффициентами  $A, B, \dots$ , которые инвариантны относительно одновременного поворота всех векторов  $\mathbf{M}_\nu$  на один и тот же угол. Этот поворот осуществляется в спиновом пространстве и потому не затрагивает декартовых координат  $x_i$  конфигурационного пространства кристалломагнетика.

Остальные слагаемые, содержащиеся в квадратной скобке равенства (1.1.1), описывают взаимодействия, которые по порядку величины в  $v^2/c^2$  раз меньше обменных ( $v$  имеет порядок величины скоростей атомных электронов,  $c$  — скорость света). В конденсированном веществе  $v^2/c^2 \sim 10^{-4}$ , поэтому такие взаимодействия называют релятивистскими. Они приводят к зависимости энергии магнетика от ориентации магнитных векторов  $\mathbf{M}_\nu$  относительно кристаллографических осей.

Основное предположение феноменологической теории состоит в том, что модуль вектора намагниченности каждой подрешетки

считается постоянным даже для возбужденных состояний кристалла:

$$(\mathbf{M}_\nu)^2 = M_{0\nu}^2 = \text{const.} \quad (1.1.9)$$

Это геометрическое условие достаточно хорошо выполняется при низких температурах и уже само по себе делает задачу существенно нелинейной. Эволюция вектора  $\mathbf{M}_\nu(\mathbf{x}, t)$  носит характер прецессии и определяется уравнениями Ландау–Лифшица [4]:

$$\partial_t \mathbf{M}_\nu = -\gamma_\nu [\mathbf{M}_\nu \times \mathbf{H}_\nu^{\text{eff}}], \quad \mathbf{M}_\nu^2 = M_{0\nu}^2, \quad (1.1.10)$$

где  $\mathbf{H}^{\text{eff}} = -\delta W / \delta \mathbf{M}_\nu$  — эффективное поле,  $\gamma_\nu = \text{const}$  — магнито-механическое отношение для  $\nu$ -й подрешетки (в формулах (1.1.9), (1.1.10) нет суммирований по индексу  $\nu$ ). Для многоподрешеточных магнетиков, вследствие большого числа векторных параметров порядка  $\mathbf{M}_\nu(\mathbf{x}, t)$ , а также существенной геометрической и физической нелинейности задачи, непосредственное интегрирование уравнений представляет значительные трудности.

### 1.1.2. Связь с микротеорией

Магнитные свойства вещества — это проявления законов релятивистской квантовой теории, и поэтому они не имеют аналога в классической физике. Кратко поясним микроскопические истоки изложенной макроскопической теории.

Вследствие квантово-механического принципа неразличимости тождественных частиц волновая функция кристалла должна быть антисимметричной при перестановке координат и проекций спинов электронов. Это ведет к определенной согласованности, корреляциям в движении электронов, которые сказываются на энергии кристалла. Даже в том случае, когда исходный микроскопический гамильтониан совокупности атомов учитывает только кулоновские взаимодействия и не включает спиновые переменные, учет тождественности электронов приводит к тому, что энергия кристалла оказывается зависящей от спиновых моментов отдельных атомов. Конечный результат можно получить, не прибегая к антисимметризации волновой функции кристалла, но добавив к исходному микроскопическому гамильтониану эффективную (обменную) энергию, зависящую от спиновых механических моментов  $\hat{\mathbf{S}}_\nu^\alpha$  отдельных атомов кристалла [1, 2]:

$$\hat{H}_{\text{ex}} = -\frac{1}{2} \sum_{\nu_1, \nu_2, \alpha, \beta} J^{\nu_1 \nu_2}(\mathbf{x}_{\nu_1}^\alpha - \mathbf{x}_{\nu_2}^\beta) \left( \hat{\mathbf{S}}_{\nu_1}^\alpha \cdot \hat{\mathbf{S}}_{\nu_2}^\beta \right). \quad (1.1.11)$$

Здесь суммирование идет по номерам подрешеток  $\nu_1, \nu_2$  и номерам атомов в них ( $\alpha$  и  $\beta$ ),  $J^{\nu_1 \nu_2}(\mathbf{x}_{\nu_1}^\alpha - \mathbf{x}_{\nu_2}^\beta)$  — некоторая функция от радиус-вектора  $\mathbf{x}_{\nu_1}^\alpha - \mathbf{x}_{\nu_2}^\beta$ , соединяющего  $\alpha$ -й и  $\beta$ -й узлы  $\nu_1$ -й и  $\nu_2$ -й магнитных подрешеток кристалла. Функция  $J^{\nu_1 \nu_2}$  экспоненциально убывает с увеличением расстояния  $|\mathbf{x}_{\nu_1}^\alpha - \mathbf{x}_{\nu_2}^\beta|$  между атомами, так как определяется

степенью перекрытия волновых функций атомов. Практически она отлична от нуля лишь для соседних атомов. При этом по порядку величины

$$J^{\nu_1\nu_2} \sim \xi e^2/a,$$

где  $a$  — постоянная решетки,  $\xi \sim 0,1$  — численный множитель, отражающий степень перекрытия волновых функций атомов,  $e$  — заряд электрона [2].

Отличительная черта обменной энергии — ее инвариантность относительно поворотов всех спиновых моментов  $\hat{\mathbf{S}}_\nu^\alpha$  на один и тот же угол. Изотропность обменной энергии относительно вращений в спиновом пространстве — отражение того обстоятельства, что она является кулоновской по природе. Название «обменная энергия» связано с тем, что эффективное взаимодействие (1.1.3) можно представить как результат обмена электронами между соседними атомами кристалла.

Электрические поля кристаллов обуславливают разные типы симметрии и разные перекрытия волновых функций атомов кристалла. В конечном счете это ведет к формированию большого числа обменных магнитных структур, которые на феноменологическом уровне описываются в терминах вставленных друг в друга магнитных подрешеток. Обсудим это подробнее.

Операторы магнитных моментов атомов  $\hat{\mathbf{M}}_\nu^\alpha$  связаны с операторами спиновых моментов  $\hat{\mathbf{S}}_\nu^\beta$  соотношением

$$\hat{\mathbf{M}}_\nu^\alpha = -\hbar\gamma_\nu\hat{\mathbf{S}}_\nu^\alpha. \quad (1.1.12)$$

Здесь нет суммирования по  $\nu$ ,  $\hbar\gamma_\nu = g_\nu\mu_B$  ( $g_\nu$  —  $g$ -фактор,  $\mu_B = |e|\hbar/(2mc)$  — магнетон Бора,  $\gamma_\nu$  — магнитомеханическое отношение для  $\nu$ -й подрешетки,  $e$  — заряд электрона,  $m$  — его масса,  $\hbar$  — постоянная Планка). Заметим, что в общем случае  $g_\nu$  может быть тензором.

Определим операторы плотности магнитных моментов подрешеток соотношениями

$$\hat{\mathbf{M}}_\nu(\mathbf{x}, t) = \sum_\alpha \hat{\mathbf{M}}_\nu^\alpha \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\nu^\alpha). \quad (1.1.13)$$

Тогда обменную энергию (1.1.11) можно записать в форме:

$$\hat{H}_{\text{ex}} = -\frac{1}{2} \iint E^{\nu_1\nu_2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \left( \hat{\mathbf{M}}_{\nu_1}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{M}}_{\nu_2}(\mathbf{x}', t) \right) d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}', \quad (1.1.14)$$

где по дважды повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Функции от координат  $E^{\nu_1\nu_2}$  в (1.1.14) нетрудно выразить через  $J^{\nu_1\nu_2}$ , используя соотношение (1.1.12).

В магнетиках, благодаря сильному обменному взаимодействию, быстро устанавливается локальное квазиравновесное распределение



магнитных моментов. Поэтому вводится макроскопическая плотность магнитных моментов подрешеток:

$$\mathbf{M}_\nu(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \text{Sp} \left( \widehat{\mathbf{M}}_\nu(\mathbf{x}', t) \widehat{\rho}(\mathbf{x}', t) \right) d^3 \mathbf{x}', \quad (1.1.15)$$

где  $\widehat{\rho}(\mathbf{x}', t)$  — локально равновесная матрица плотности магнетика, интегрирование проводится в пределах физически малого объема  $\Delta V$  с центром в точке с радиусом-вектором  $\mathbf{x}$ . Объем  $\Delta V$  должен удовлетворять условию

$$a^3 \ll \Delta V \ll \lambda^3, \quad (1.1.16)$$

где  $\lambda$  — характерный размер магнитных неоднородностей (это может быть длина спиновой волны, размер солитона и т.п.),  $a$  — межатомное расстояние.

При усреднении микроскопической обменной энергии (1.1.14) произведение операторов  $\left( \widehat{\mathbf{M}}_{\nu_1}(\mathbf{x}, t) \cdot \widehat{\mathbf{M}}_{\nu_2}(\mathbf{x}', t) \right)$  заменяется произведением средних локальных плотностей (1.1.15), являющихся  $c$ -числами. В результате гамильтониану (1.1.11) сопоставляется макроскопическая обменная энергия

$$W_{\text{ex}} = -\frac{1}{2} \int \int E^{\nu_1 \nu_2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') (\mathbf{M}_{\nu_1}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{M}_{\nu_2}(\mathbf{x}', t)) d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{x}'. \quad (1.1.17)$$

Напомним, что функция  $E^{\nu_1 \nu_2}(\mathbf{x})$  быстро уменьшается с увеличением  $|\mathbf{x}|$ . Поэтому в формуле (1.1.17) можно разложить  $\mathbf{M}_{\nu_2}(\mathbf{x}', t)$  в ряд по степеням  $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\nu_2}(\mathbf{x}', t) \approx \mathbf{M}_{\nu_2}(\mathbf{x}, t) + \partial_s \mathbf{M}_{\nu_2}(\mathbf{x}, t) (x' - x)_s + \\ + \frac{1}{2} \partial_s \partial_p \mathbf{M}_{\nu_2}(\mathbf{x}, t) (x' - x)_s (x' - x)_p. \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

Подставляя (1.1.18) в (1.1.17) и производя интегрирования по частям, приходим к следующему разложению для обменной энергии кристалла:

$$\begin{aligned} W_{\text{ex}} = -\frac{1}{2} \int [\alpha^{\nu_1 \nu_2} (\mathbf{M}_{\nu_1} \cdot \mathbf{M}_{\nu_2}) + \\ + \beta_s^{\nu_1 \nu_2} (\mathbf{M}_{\nu_1} \cdot \partial_s \mathbf{M}_{\nu_2} - \mathbf{M}_{\nu_2} \cdot \partial_s \mathbf{M}_{\nu_1}) - \\ - \gamma_{sp}^{\nu_1 \nu_2} (\partial_s \mathbf{M}_{\nu_1} \cdot \partial_p \mathbf{M}_{\nu_2}) + \dots] d^3 \mathbf{x}, \end{aligned} \quad (1.1.19)$$

которое согласуется с (1.1.1). Заметим, что при переходе от (1.1.18) к (1.1.19) мы опустили поверхностные интегралы. В безграничной среде такое приближение оправдано. В ограниченных образцах при выводе уравнений для расчета полей  $\mathbf{M}_\nu(\mathbf{x}, t)$ ,  $\Psi(\mathbf{x}, t)$  из вариационного принципа Гамильтона все поверхностные интегралы с вариациями  $\delta \mathbf{M}_\nu$ ,  $\delta \Psi$  и т.д., происходящие как от объемной, так и от поверхностной частей полной энергии магнетика, должны обращаться в нуль. Это требование дает краевые условия для конкретной задачи [5].

«Деликатную» процедуру интегрирований по частям в ограниченных образцах проиллюстрируем далее на конкретном примере.

Феноменологические постоянные  $\alpha^{\nu_1\nu_2}$ ,  $\beta_s^{\nu_1\nu_2}$ ,  $\gamma_{sp}^{\nu_1\nu_2}$  являются моментами функции  $E^{\nu_1\nu_2}(\mathbf{x})$ . В частности, имеем

$$\gamma_{sp}^{\nu_1\nu_2} = \frac{1}{2} \int E^{\nu_1\nu_2}(\mathbf{x}) x_s x_p d^3\mathbf{x} \sim \frac{J^{\nu_1\nu_2} a^5}{g_{\nu_1} g_{\nu_2} \mu_B},$$

где  $J^{\nu_1\nu_2}$  — величина обменного интеграла между соседними атомами  $\nu_1$ -й и  $\nu_2$ -й подрешеток.

Магнитоанизотропные (релятивистские) взаимодействия с микроскопической точки зрения связаны со спин-орбитальными и прямыми диполь-дипольными взаимодействиями магнитных атомов кристалла.

Обсудим вначале вклад в энергию магнитной анизотропии спин-орбитальных взаимодействий. Электрическое поле кристалла определенным образом ориентирует относительно кристаллографических осей орбитальное движение электронов в атомах кристалломагнетика. Спин-овые механические моменты электронов в каждом атоме взаимодействуют с орбитальным движением электронов данного и соседних атомов. Каков бы ни был характер этой связи (**L**–**S**-связь или **J**–**J**-связь), согласно квантово-механической теории возмущений, она приводит к эффективному взаимодействию магнитных моментов атомов кристалла, которое в квадратичном по  $\widehat{M}_{\nu i}$  приближении имеет вид

$$\widehat{H}_{so} = \frac{1}{2} \int \int k_{ij}^{\nu_1\nu_2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \widehat{M}_{\nu_1 i}(\mathbf{x}, t) \widehat{M}_{\nu_2 j}(\mathbf{x}', t) d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}'. \quad (1.1.20)$$

Это выражение отличается от обменного гамильтониана (1.1.14) только тем, что здесь энергия зависит от ориентации магнитных моментов  $\widehat{\mathbf{M}}_{\nu}$  относительно кристаллографических осей. Поскольку функция  $k_{ij}^{\nu_1\nu_2}(\mathbf{x})$  быстро убывает с ростом  $|\mathbf{x}|$ , с энергией (1.1.20) можно поступить так же, как и с обменной энергией. В результате спин-орбитальное взаимодействие приводит к макроскопической энергии, которая совпадает с магнитоанизотропной локальной частью формулы (1.1.1).

Интересно, что традиционное представление о том, что магнитоанизотропные взаимодействия много меньше обменного (изотропного) взаимодействия, вообще говоря, не всегда справедливо. В последнее время открывается все больше и больше квазиодномерных и квазидвумерных (слоистых) магнитных материалов, в которых спин-орбитальные взаимодействия превалируют над обменным (см., например, [6, 7]). Магнитные свойства таких веществ специфичны и определяются, в частности, экзотическими магнитными солитонами — компактонами и пионами [8].

Отметим также, что наличие в разложении (1.1.1) линейных по градиентам членов

$$B_{ij,s}^{\nu_1\nu_2} [M_{\nu_1 i} \partial_s M_{\nu_2 j} - M_{\nu_2 j} \partial_s M_{\nu_1 i}] \quad (1.1.21)$$

обменной и обменно-релятивистской природы возможно только для кристаллов без центра инверсии. Взаимодействия (1.1.21) интересны тем, что ведут к формированию геликоидальных магнитных структур, периоды которых несоизмеримы с кристаллохимическими и обычно превосходят их в большое число раз.

Прямое диполь-дипольное взаимодействие магнитных моментов атомов  $\widehat{\mathbf{M}}_\nu^\alpha$  кристалла друг с другом соответствует следующему микроскопическому гамильтониану:

$$\widehat{H}_{\text{dip}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \nu, \alpha', \nu'} \left[ \frac{(\widehat{\mathbf{M}}_\nu^\alpha \cdot \widehat{\mathbf{M}}_{\nu'}^{\alpha'})}{|\mathbf{r}_{\nu\nu'}^{\alpha\alpha'}|^3} - \frac{3(\widehat{\mathbf{M}}_\nu^\alpha \cdot \mathbf{r}_{\nu\nu'}^{\alpha\alpha'}) (\mathbf{r}_{\nu\nu'}^{\alpha\alpha'} \cdot \widehat{\mathbf{M}}_{\nu'}^{\alpha'})}{|\mathbf{r}_{\nu\nu'}^{\alpha\alpha'}|^5} \right], \quad (1.1.22)$$

где

$$\mathbf{r}_{\nu\nu'}^{\alpha\alpha'} = \mathbf{x}_\nu^\alpha - \mathbf{x}_{\nu'}^{\alpha'},$$

суммирование ведется по всем парам индексов  $(\alpha, \nu)$ ,  $(\alpha', \nu')$  с единственным ограничением  $(\alpha, \nu) \neq (\alpha', \nu')$ .

Используя выражение для оператора микроскопической намагниченности среды

$$\widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha, \nu} \widehat{\mathbf{M}}_\nu^\alpha \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\nu^\alpha) \equiv \sum_\nu \widehat{\mathbf{M}}_\nu(\mathbf{x}, t),$$

дискретную сумму (1.1.22) можно переписать в виде интеграла

$$\widehat{H}_{\text{dip}} = \frac{1}{2} \iint_{V_0} \widehat{M}_i(\mathbf{x}) \left( \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \widehat{M}_j(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{x}', \quad (1.1.23)$$

где  $V_0$  — объем кристалла. Однако формальный переход от представления (1.1.23) к континуальному приближению по уже изложенной схеме в данном случае встречает трудности из-за расходимости подынтегрального выражения в области малых  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ . При малых расстояниях  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  следует учитывать дискретный характер распределения магнитных атомов в пространстве. Для аккуратного перехода к континуальному приближению разобьем  $\widehat{H}_{\text{dip}}$  на два слагаемых:

$$\widehat{H}_{\text{dip}} = \widehat{H}_{\text{dip}}^{\text{I}} + \widehat{H}_{\text{dip}}^{\text{II}}.$$

Здесь  $\widehat{H}_{\text{dip}}^{\text{I}}$  — значение микрогамильтониана в области  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \geq \rho$ :

$$\widehat{H}_{\text{dip}}^{\text{I}} = \frac{1}{2} \iint_{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \geq \rho} \widehat{M}_i(\mathbf{x}) \left( \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \widehat{M}_j(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{x}',$$

где  $\rho$  — достаточно малая макроскопическая величина, удовлетворяющая условию

$$a \ll \rho \ll \lambda.$$

В области  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \leq \rho$  следует вернуться к первоначальной форме записи микрогамильтониана в виде суммы

$$\hat{H}_{\text{dip}}^{\text{II}} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \sum_{\alpha, \nu, \alpha', \nu'} \widehat{M}_{\nu i}^{\alpha} \left[ \frac{\partial^2}{\partial (\mathbf{r}_{\nu\nu'}^{\alpha\alpha'})_i \partial (\mathbf{r}_{\nu\nu'}^{\alpha\alpha'})_j} \frac{1}{|\mathbf{r}_{\nu\nu'}^{\alpha\alpha'}|} \right] \widehat{M}_{\nu' j}^{\alpha'}. \quad (1.1.24)$$

В (1.1.24) суммирование ведется по всем парам индексов  $(\alpha, \nu)$ ,  $(\alpha', \nu')$ , удовлетворяющим ограничению

$$0 < |\mathbf{x}_{\nu}^{\alpha} - \mathbf{x}_{\nu'}^{\alpha'}| \leq \rho.$$

Обсудим переход от гамильтонианов  $\hat{H}_{\text{dip}}^{\text{I}}$ ,  $\hat{H}_{\text{dip}}^{\text{II}}$  к феноменологической энергии магнетика (1.1.1).

Выражение для  $\hat{H}_{\text{dip}}^{\text{I}}$  не содержит особенности, и после усреднения по прежней схеме дает нелокальную макроскопическую энергию кристалломагнетика, которая совпадает с определением  $W^{(\text{m})}$  по формулам (1.1.2), (1.1.3).

Покажем, что при физически оправданных приближениях микро-скопическому гамильтониану  $\hat{H}_{\text{dip}}^{\text{II}}$  в феноменологической теории соответствует энергия локальной магнитной анизотропии кристалла. С этой целью перегруппируем слагаемые в (1.1.24). Взяв произвольный атом  $\nu$ -й подрешетки с радиусом-вектором  $\mathbf{x}_{\nu}^{\alpha}$ , мы сперва просуммируем по всем атомам из  $\nu'$ -й подрешетки в его ближайшей окрестности в пределах сферы радиусом  $\rho$ , точнее просуммируем по всем  $\alpha'$ , удовлетворяющим условию  $0 < |\mathbf{x}_{\nu}^{\alpha} - \mathbf{x}_{\nu'}^{\alpha'}| < \rho$  (индексы  $\nu$  и  $\nu'$  пока фиксированы). Считаем, что в пределы такой сферы попадают атомы разных подрешеток. Затем вычислим сумму по  $\alpha$ , т.е. учтем вклады всех атомов  $\nu$ -й подрешетки (на значения  $\alpha$  теперь нет ограничений). И, наконец, просуммируем вклады разных подрешеток  $\nu$  и  $\nu'$ . В результате получим следующее представление для гамильтониана  $\hat{H}_{\text{dip}}^{\text{II}}$ :

$$\hat{H}_{\text{dip}}^{\text{II}} = -\frac{1}{2} \sum_{\nu, \nu'} \sum_{\alpha} \sum_{\substack{\alpha' \\ 0 < |\mathbf{x}_{\nu}^{\alpha} - \mathbf{x}_{\nu'}^{\alpha'}| < \rho}} \sum_{i,j=1}^3 \widehat{M}_{\nu i}^{\alpha} \left[ \frac{\partial^2}{\partial (\mathbf{r}_{\nu\nu'}^{\alpha\alpha'})_i \partial (\mathbf{r}_{\nu\nu'}^{\alpha\alpha'})_j} \frac{1}{|\mathbf{r}_{\nu\nu'}^{\alpha\alpha'}|} \right] \widehat{M}_{\nu' j}^{\alpha'}.$$

Введем оператор энергии  $\hat{\hat{H}}_{\text{dip}}^{\text{II}}$  для атомов, заключенных в пределах физически малого объема  $\Delta V$  (1.1.16) с центром в точке с радиусом-вектором  $\mathbf{x} \approx \mathbf{x}_{\nu}^{\alpha}$ :

$$\begin{aligned} \hat{\hat{H}}_{\text{dip}}^{\text{II}} = & -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \sum_{\nu, \nu'} \sum_{\langle \alpha \rangle} \times \\ & \times \sum_{\substack{\alpha' \\ 0 < |\mathbf{x}_{\nu}^{\alpha} - \mathbf{x}_{\nu'}^{\alpha'}| < \rho}} \widehat{M}_{\nu i}^{\alpha} \left[ \frac{\partial^2}{\partial (\mathbf{r}_{\nu\nu'}^{\alpha\alpha'})_i \partial (\mathbf{r}_{\nu\nu'}^{\alpha\alpha'})_j} \frac{1}{|\mathbf{r}_{\nu\nu'}^{\alpha\alpha'}|} \right] \widehat{M}_{\nu' j}^{\alpha'}. \end{aligned} \quad (1.1.25)$$

Здесь символ  $\sum_{\langle \alpha \rangle}$  означает суммирование по атомам  $\nu$ -й подрешетки, попавшим в объем  $\Delta V$  с центром в точке с радиусом-вектором  $\mathbf{x} \approx \mathbf{x}_\nu^\alpha$  (считаем, что в объем  $\Delta V$  попадают атомы всех подрешеток).

Усредним выражение (1.1.25), используя локально равновесную матрицу плотности  $\hat{\rho}(\mathbf{x}, t)$ . При усреднении используем приближение

$$\text{Sp} \left( \widehat{M}_{\nu i}^\alpha \widehat{M}_{\nu' j}^{\alpha'} \hat{\rho} \right) = \text{Sp} \left( \widehat{M}_{\nu i}^\alpha \hat{\rho} \right) \text{Sp} \left( \widehat{M}_{\nu' j}^{\alpha'} \hat{\rho} \right).$$

Поскольку в пределах физически малого объема магнитные моменты атомов кристалла имеют близкую ориентацию, их средние значения не зависят от  $\alpha, \alpha'$  и могут быть отнесены к точке с радиусом-вектором  $\mathbf{x}$ :

$$\text{Sp} \left( \widehat{M}_{\nu i}^\alpha \hat{\rho} \right) = \mu_{\nu i}(\mathbf{x}, t), \quad \text{Sp} \left( \widehat{M}_{\nu' j}^{\alpha'} \hat{\rho} \right) = \mu_{\nu' j}(\mathbf{x}, t).$$

После усреднения суммирование по индексам  $\alpha$  и  $\alpha'$  в (1.1.25) может быть выполнено явно, и мы получим следующее выражение для плотности макроскопической энергии кристалла в точке с радиусом-вектором  $\mathbf{x}$ :

$$\frac{1}{\Delta V} \text{Sp} \left( \widehat{H}_{\text{dip}}^{\text{II}} \rho \right) = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i, j=1} \sum_{\nu, \nu'} \Delta N_\nu \beta_{ij}^{\nu, \nu'} \mu_{\nu i} \mu_{\nu' j}.$$

Здесь  $\Delta N_\nu$  — число магнитных моментов атомов  $\nu$ -й подрешетки в объеме  $\Delta V$ . Поскольку величина

$$\beta_{ij}^{\nu, \nu'} = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha, \alpha' \\ 0 < |\mathbf{r}_{\nu, \nu'}^{\alpha, \alpha'}| < \rho}} \frac{\partial^2}{\partial \left( \mathbf{r}_{\nu, \nu'}^{\alpha, \alpha'} \right)_i \partial \left( \mathbf{r}_{\nu, \nu'}^{\alpha, \alpha'} \right)_j} \frac{1}{|\mathbf{r}_{\nu, \nu'}^{\alpha, \alpha'}|}$$

слабо зависит от  $\alpha, \alpha'$  и  $\rho$ , этой зависимостью пренебрегаем.

Учитывая, что  $i$ -я проекция намагниченности  $\nu$ -й подрешетки равна

$$M_{\nu i}(\mathbf{x}, t) = \frac{\Delta N_\nu}{\Delta V} \mu_{\nu i}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{v_\nu} \mu_\nu(\mathbf{x}, t),$$

где  $v_\nu$  — объем, приходящийся на один атом  $\nu$ -й подрешетки, получаем следующее окончательное выражение для плотности макроскопической энергии магнетика:

$$\sum_{i, j=1}^3 \sum_{\nu, \nu'} \beta_{ij}^{\nu, \nu'} v_{\nu'} M_{\nu i}(\mathbf{x}, t) M_{\nu' j}(\mathbf{x}, t).$$

Как видим, дискретная часть микрогамильтониана диполь-дипольного взаимодействия также приводит к макроскопической энергии, которая согласуется с разложением (1.1.1).

Феноменологические уравнения нелинейной динамики магнетиков (1.1.10) получаются при усреднении (с помощью локально равновесной матрицы плотности по физически малым объемам) квантово-механи-

ческих уравнений Гейзенберга для операторов микронамагниченностей подрешеток  $\widehat{\mathbf{M}}_\nu(\mathbf{x}, t)$  (1.1.13):

$$i\hbar \partial_t \widehat{\mathbf{M}}_\nu = [\widehat{H}, \widehat{\mathbf{M}}_\nu]. \quad (1.1.26)$$

Здесь  $\widehat{H}$  — гамильтониан кристалломагнетика,  $[\widehat{H}, \widehat{\mathbf{M}}_\nu]$  — коммутатор операторов  $\widehat{H}$  и  $\widehat{\mathbf{M}}_\nu$ ,  $\hbar$  — постоянная Планка,  $i$  — мнимая единица.

Если рассматривать достаточно медленные изменения макроскопических магнитных моментов подрешеток, характеризующиеся временами, которые значительно больше времени установления локального квазиравновесия в магнетике, то в левой части (1.1.26) мы получим производную по времени от плотности  $\mathbf{M}_\nu(\mathbf{x}, t)$  макроскопической намагниченности  $\nu$ -й подрешетки. Предполагая, что в каждой из подрешеток быстро устанавливаются квазиравновесные распределения магнитных моментов атомов, пренебрегаем корреляционными функциями высших порядков и заменяем средние значения операторов  $\widehat{M}_{\nu i}^\alpha$  произведениями средних. После физически оправданных разложений, которые аналогичны уже рассмотренным, получаем макроскопические уравнения динамики намагниченностей в подрешетках в форме Ландау–Лифшица (1.1.10).

До сих пор фактически полагалось, что магнетизм связан с локализованными электронами незаполненных оболочек атомов кристалла, и не учитывалась роль коллективизированных электронов, ответственных за электропроводность. Тем не менее, изложенная феноменологическая теория, в силу своей симметричной основы, позволяет рассмотреть многие явления в металлах и, тем более, в магнитных полупроводниках.

## 1.2. Феноменологический подход к релаксационным процессам в многоподрешеточных магнетиках

*...что такое теория? Неспециалисту бросается в глаза, что она — груда формул, ничего не говорящих непосвященному. Но эти формулы не составляют ее существо.*

Л. Больцман

При макроскопическом описании диссипации энергии в магнетиках в уравнения Ландау–Лифшица (1.1.10) вводят дополнительные релаксационные члены в форме Ландау–Лифшица, Блоха–Бломбергена, Гилберта и др. [1, 9–12]. Однако все традиционно используемые диссипативные члены определяются только релятивистскими взаимодействиями, не учитывают пространственной дисперсии, характерной для обменных взаимодействий, и приводят к результатам, противоречащим

микротеории спиновых волн. Впервые это было замечено в работах Барьяхтара [13–15]. Барьяхтар предложил феноменологический подход для введения диссипативных членов в уравнения Ландау–Лифшица, который корректно учитывает динамическую симметрию процессов релаксации в магнетиках, не исключает возможности изменения номинальных намагниченностей подрешеток за счет релаксации и дает декременты затухания линейных спиновых волн, согласующиеся с микротеорией. Поэтому можно надеяться, что и релаксация нелинейных магнитных возбуждений, в частности подвижность доменных границ и других солитонов в магнетиках, более верно описывается в рамках подхода Барьяхтара. Изложим его основные идеи.

С целью введения диссипативных членов в уравнения динамики намагниченностей подрешеток рассмотрим вариацию энергии магнетика  $\delta W$ . Согласно определению эффективного поля, имеем

$$\delta W = - \int (\mathbf{H}_\nu^{\text{eff}} \cdot \delta \mathbf{M}_\nu) d^3 \mathbf{x}. \quad (1.2.1)$$

Здесь и далее, если не оговорено особо, по дважды встречающимся индексам подразумевается суммирование. Из (1.2.1) находим изменение энергии системы со временем (для упрощения анализа сначала предполагаем, что поле  $\mathbf{H}^{\text{ext}}$  не зависит от времени, среда безгранична):

$$\frac{dW}{dt} = - \int (\mathbf{H}_\nu^{\text{eff}} \cdot \partial_t \mathbf{M}_\nu) d^3 \mathbf{x}.$$

Нетрудно проверить, что уравнения Ландау–Лифшица (1.1.10) обеспечивают сохранение энергии  $W$  кристалломагнетика. При наличии диссипации энергия должна убывать со временем:

$$\frac{dW}{dt} = - \int (\mathbf{H}_\nu^{\text{eff}} \cdot \partial_t \mathbf{M}_\nu) d^3 \mathbf{x} = -T \frac{dS}{dt} < 0. \quad (1.2.2)$$

Здесь  $S$  — энтропия кристалломагнетика,  $T$  — его температура. В состоянии равновесия системы ее энтропия максимальна и потому

$$\mathbf{H}_\nu^{\text{eff}} = - \frac{\delta W}{\delta \mathbf{M}_\nu} = 0.$$

Это обстоятельство при феноменологическом описании релаксации в магнетиках будет учтено, если  $\partial_t \mathbf{M}_\nu$  представить в форме разложения по полям  $\mathbf{H}_\nu^{\text{eff}}$  и их градиентам:

$$\begin{aligned} \partial_t M_{\nu i} = & -\gamma_\nu \varepsilon_{ijk} M_{\nu j} H_{\nu k}^{\text{eff}} + \Gamma_{ik}^{\nu \nu_1} H_{\nu_1 k}^{\text{eff}} + \\ & + \Gamma_{ik,s}^{\nu \nu_1} \partial_s H_{\nu_1 k}^{\text{eff}} + \Gamma_{ik,sp}^{\nu \nu_1} \partial_s \partial_p H_{\nu_1 k}^{\text{eff}} + \dots, \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

где  $\varepsilon_{ijk}$  — антисимметричный единичный тензор ( $\varepsilon_{123} = 1$ ). Первое слагаемое в разложении (1.2.3) выбрано так, чтобы в отсутствие диссипации энергии воспроизвести уравнения Ландау–Лифшица (1.1.10). В данном случае в (1.2.3) по индексу  $\nu$ , встречающемуся более чем

дважды, нет суммирования. Коэффициенты  $\Gamma_{ik}^{\nu_1\nu_2}$  и т. д. могут зависеть от намагниченностей подрешеток, их градиентов и внешнего магнитного поля. Тогда они удовлетворяют соотношениям симметрии Онсагера [3, 14, 15]:

$$\begin{aligned}\Gamma_{sk}^{\nu_1\nu_2}(\{\mathbf{M}_\nu\}, \mathbf{H}^{\text{ext}}) &= \Gamma_{ks}^{\nu_2\nu_1}(\{-\mathbf{M}_\nu\}, -\mathbf{H}^{\text{ext}}), \\ \Gamma_{sk,ij}^{\nu_1\nu_2}(\{\mathbf{M}_\nu\}, \mathbf{H}^{\text{ext}}) &= \Gamma_{ks,ij}^{\nu_2\nu_1}(\{-\mathbf{M}_\nu\}, -\mathbf{H}^{\text{ext}}),\end{aligned}$$

которые на макроскопическом уровне отражают инвариантность микроскопических уравнений движения относительно изменения знака времени с одновременным изменением направлений вектора напряженности внешнего магнитного поля  $\mathbf{H}^{\text{ext}}$  и магнитных моментов атомов кристалла. Вследствие соотношений Онсагера, коэффициенты  $\Gamma_{sk}^{\nu_1\nu_2}$  и т. д. можно представить в виде суммы произведений из четного числа множителей  $M_{\nu i}$  и  $H_j^{\text{ext}}$ . В то же время, поскольку релаксационные члены обычно малы, в таких разложениях часто ограничиваются первыми независимыми от полей  $\mathbf{H}^{\text{ext}}$  и  $\mathbf{M}_\nu$  членами. Согласно микротeorии, следующие приближения соответствуют высшим порядкам квантово-механической теории возмущений, учитывающим вклады спин-спиновых и спин-орбитальных взаимодействий с малыми интегралами перекрытия волновых функций соседних атомов кристалла и с малыми коэффициентами порядка  $(v^2/c^2)^n$ . Кроме того, в формуле (1.2.3) в основном приближении обычно можно пренебречь слагаемыми  $O((\mathbf{H}^{\text{eff}})^2)$ . В результате для производства энтропии в системе получаем простое выражение

$$\begin{aligned}T \frac{dS}{dt} \equiv 2Q = \int & [\Gamma_{ik}^{\nu_1\nu_2} H_{\nu_1 i}^{\text{eff}} H_{\nu_2 k}^{\text{eff}} + \\ & + \Gamma_{ik,s}^{\nu_1\nu_2} (H_{\nu_1 i}^{\text{eff}} \partial_s H_{\nu_2 k}^{\text{eff}} - H_{\nu_2 k}^{\text{eff}} \partial_s H_{\nu_1 i}^{\text{eff}}) - \\ & - \Gamma_{ik,sp}^{\nu_1\nu_2} \partial_s H_{\nu_1 i}^{\text{eff}} \partial_p H_{\nu_2 k}^{\text{eff}}] d^3\mathbf{x} > 0. \quad (1.2.4)\end{aligned}$$

Соотношение (1.2.4) определяет диссипативный функционал  $Q$  системы. Заметим, что для упрощения анализа общих соотношений здесь обсуждается случай безграничной среды, поэтому в (1.2.4) мы опустили поверхностные интегралы, которые появляются при переходе от (1.2.2), (1.2.3) к (1.2.4) в результате интегрирований по частям. В ограниченных образцах такие интегралы обращаются в нуль вследствие граничных условий, отражающих отсутствие потоков энергии через поверхность кристалломагнетика.

Конкретный вид постоянных  $\Gamma$  в (1.2.4) доопределяется следующими условиями:

- 1) инвариантностью функционала  $Q$  относительно преобразований парамагнитной группы симметрии кристалла;
- 2) законами сохранения компонент намагниченностей подрешеток, которые также являются следствиями свойств симметрии материала;



3) положительностью производства энтропии в системе ( $Q > 0$  при любых  $\mathbf{H}_\nu^{\text{eff}} \neq 0$ ).

В частности, линейные по градиентам члены с коэффициентами  $\Gamma_{ij,s}^{\nu_1\nu_2}$  всегда нарушают положительную определенность функционала  $Q$  и, скорее всего, должны отсутствовать даже в кристаллах без центра симметрии. Заметим также, что построение инвариантов из компонент векторов  $\mathbf{H}_\nu^{\text{eff}}$  облегчается тем, что  $\mathbf{H}_\nu^{\text{eff}}$  под действием элементов симметрии кристалла преобразуется так же, как  $\mathbf{M}_\nu$ . Это следует из определения (1.2.1) и инвариантности энергии  $W$ .

В следующем разделе мы поясним эти утверждения на простом примере.

### 1.3. Ферромагнитная пластина как пример ограниченного образца

*Возьмем старую теорию магнетизма, по которой намагниченный кусок стали рассматривался как магнитный диполь, состоящий из двух магнитных полюсов, или «магнитных зарядов» (по аналогии с электрическим диполем). Пользуясь этим представлением, физики создали магнитостатику, на которой базируется вся практика и техника использования магнитов. Между тем хорошо известно, что никаких магнитных зарядов в действительности не существует. И когда сейчас говорят о магнитных полюсах, то обязательно оговаривают, что это фиктивное понятие.*

И.К. Кикоин

#### 1.3.1. Энергия, диссипативный функционал, условия существования однородной намагниченности в пластине

Применим изложенную теорию к описанию нелинейной динамики намагниченности в пластине из ферромагнитного материала с одноосной анизотропией. К идеализированной модели одноосного кристалла с осью симметрии  $C_\infty$  мы приходим, когда у реальных кристаллов гексагональной, ромбоэдрической и тетрагональной систем при решении задачи можно пренебречь малой анизотропией в базисной плоскости 4-го и 6-го порядков по компонентам намагниченности. Пусть пластина имеет толщину  $d$ , занимает область  $|x_3| \leq d/2$  и безгранична в направлениях  $Ox_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ), ось анизотропии совпадает с осью  $Ox_3$ .

При одной магнитной решетке даже для ферромагнитных кристаллов без центра симметрии не существует линейных по градиентам эффективного поля членов в выражении (1.2.4) для диссипативного функционала  $Q$ . Из слагаемых, квадратичных по градиентам поля  $\mathbf{H}^{\text{eff}}$ , выделим в (1.2.4) главные, обусловленные обменными взаимодействиями. Характерная особенность обменных взаимодействий — их инвариантность относительно вращений в спиновом пространстве. На макроскопическом уровне обменной релаксации соответствуют члены в выражении (1.2.4) для диссипативного функционала  $Q$ , которые не изменяются при поворотах вектора  $\mathbf{H}^{\text{eff}}$  на произвольный угол. Это условие накладывает следующее ограничение на выбор феноменологических постоянных  $\Gamma_{ij,sp}$ :

$$\Gamma_{ij,sp} = -\delta_{ij}\lambda_{sp}^{\text{ex}}.$$

Одноосная симметрия кристаллической решетки, связанная с преобразованиями декартовых координат  $x_i$  кристалломагнетика, дает дополнительное ограничение:

$$\lambda_{sp}^{\text{ex}} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_3).$$

Другие слагаемые с градиентами поля  $\mathbf{H}^{\text{eff}}$  малы, потому что содержат малый параметр  $v^2/c^2$  релятивистских взаимодействий. Кроме того, из-за наличия градиентов они не столь важны для анализа длинноволновых распределений намагниченности. Далее их не учитываем.

Релятивистские взаимодействия частично снимают вырождение, характерное для обменной релаксации. В одноосном кристалле вследствие релятивистских взаимодействий произвольными могут быть вращения спинов (а значит, и вращение вектора  $\mathbf{H}^{\text{eff}}$ ) только вокруг оси  $Ox_3$ . Поэтому постоянные релятивистской релаксации имеют вид

$$\Gamma_{sp} = \text{diag}(r_1, r_1, r_3).$$

Параметр  $r_3$  следует положить равным нулю. Иначе приходим в противоречие с законом сохранения

$$\int_{V_0} M_3(\mathbf{x}, t) d^3\mathbf{x} = \text{const}, \quad (1.3.1)$$

который является следствием симметрии микрогамильтониана системы относительно вращений спиновых моментов атомов кристалла вокруг оси  $Ox_3$ . Указанная симметрия нарушается при наличии внешнего поля, при учете анизотропии формы тела или при более полном учете реальной симметрии кристалла.

Таким образом, свойства симметрии одноосного ферромагнитного кристалла и закон сохранения (1.3.1) дают следующее конкретное

выражение для диссипативного функционала  $Q$ :

$$Q = \frac{1}{2} \int \left[ \lambda_{sp}^{\text{ex}} (\partial_s \mathbf{H}^{\text{eff}} \cdot \partial_p \mathbf{H}^{\text{eff}}) + r_1 (\mathbf{H}_{\perp}^{\text{eff}})^2 \right] d^3 \mathbf{x}, \quad (1.3.2)$$

где

$$\mathbf{H}_{\perp}^{\text{eff}} = (H_1^{\text{eff}}, H_2^{\text{eff}}, 0).$$

Требование положительной определенности  $Q$  будет выполнено, если

$$\lambda_1, \lambda_3, r_1 > 0. \quad (1.3.3)$$

Уравнения Ландау–Лифшица для ферромагнетика с одноосной анизотропией при учете диссипации энергии записываются в виде:

$$\begin{aligned} \partial_t M_{\alpha} &= -\gamma [\mathbf{M} \times \mathbf{H}^{\text{eff}}]_{\alpha} + r_1 H_{\alpha}^{\text{eff}} - \lambda_{sp}^{\text{ex}} \partial_s \partial_p H_{\alpha}^{\text{eff}}, \\ \partial_t M_3 &= -\gamma [\mathbf{M} \times \mathbf{H}^{\text{eff}}]_3 - \lambda_{sp}^{\text{ex}} \partial_s \partial_p H_3^{\text{eff}}, \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

где

$$\lambda_{sp}^{\text{ex}} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_3), \quad \alpha = 1, 2.$$

В уравнениях (1.3.4) члены  $r_1 H_{\alpha}^{\text{eff}}$ , связанные с релятивистскими взаимодействиями, описывают релаксацию однородных колебаний намагниченности. Характерная особенность нового релаксационного члена  $\lambda_{sp}^{\text{ex}} \partial_s \partial_p \mathbf{H}^{\text{eff}}$  обменной природы в том, что он приводит к диффузии компонент вектора намагниченности  $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$  из тех областей, где они больше, в те области, где их значения меньше. При этом коротковолновые возбуждения диссипируют довольно быстро и «выживают» длинноволновые возбуждения, которым соответствует квазиоднородное распределение намагниченности в пространстве. Учет релаксации приводит к локальным изменениям длины вектора  $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$  уже в главном обменном приближении.

В общем случае полная энергия ограниченного магнитного кристалла содержит не только объемные интегралы типа (1.1.1), но и интегралы по поверхности образца, которые учитывают среднюю макроскопическую энергию закрепления спинов в приповерхностных слоях материала [2]. Далее, для простоты, будем предполагать, что спины не закреплены на поверхности пластины, тогда полная энергия не содержит поверхностных интегралов и записывается в форме [16, 17]

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_0} \left[ f(|\mathbf{M}|) + \frac{\alpha_{ik}}{2} (\partial_i \mathbf{M} \cdot \partial_k \mathbf{M}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta}{2} (M_1^2 + M_2^2) - (\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}^{\text{ext}}) \right] d^3 \mathbf{x} + W^{(\text{m})}. \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

Здесь  $\alpha_{ik} = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_1, \alpha_3)$  и  $\beta$  — постоянные обменного взаимодействия и кристаллографической магнитной анизотропии соответственно,

$W^{(m)}$  — магнитостатическая энергия (1.1.8). Далее для определенности считаем, что внешнее магнитное поле направлено по оси  $Ox_3$ :

$$\mathbf{H}^{\text{ext}} = (0, 0, H_3^{\text{ext}}), \quad H_3^{\text{ext}} = \text{const} > 0.$$

Функцию  $f(|\mathbf{M}|)$  конкретизируем в дальнейшем.

Для отделения процессов, связанных с изменением длины вектора  $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ , от локальных поворотов  $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$  без изменения длины будем использовать одну из двух параметризаций намагниченности  $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ : углами  $\theta(\mathbf{x}, t)$ ,  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  ( $0 \leq \theta < \pi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ) или вспомогательным комплексным полем  $q(\mathbf{x}, t)$ :

$$\begin{aligned} M_3 &= M \cos \theta = M \frac{1 - |q|^2}{1 + |q|^2}, \\ M_+ &= M_1 + iM_2 = M \sin \theta \exp(i\varphi) = M \frac{2q}{1 + |q|^2}, \\ M_- &= M_1 - iM_2 = M_+^*, \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

где  $M = M(\mathbf{x}, t)$  — длина вектора намагниченности (функция от координат  $x_i$  и времени  $t$ ),  $i$  — мнимая единица, символ «\*» означает комплексное сопряжение. Мы вводим две параметризации для намагниченности потому, что полевые переменные  $\theta$ ,  $\varphi$  часто используются при непосредственных интегрированиях уравнений Ландау–Лифшица, а комплексное поле  $q(\mathbf{x}, t)$  более удобно при анализе слабонелинейных магнитных солитонов в рамках моделей, близких к интегрируемому методу обратной задачи рассеяния нелинейному уравнению Шредингера. В терминах  $M$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  полная энергия (1.3.5) имеет вид

$$\begin{aligned} W &= \int \left[ f(M) + \frac{\alpha_{ik}}{2} (\partial_i M \partial_k M + M^2 (\partial_i \theta \partial_k \theta + \sin^2 \theta \partial_i \varphi \partial_k \varphi)) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta}{2} M^2 \sin^2 \theta - M H_3^{\text{ext}} \cos \theta \right] d^3 \mathbf{x} + W^{(m)}. \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

Магнитостатическая энергия  $W^{(m)}$  будет выражена через скалярный потенциал  $\Psi(\mathbf{x}, t)$  и поля  $M$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ , если в формуле (1.1.8) положить

$$\mathbf{M} = M(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta). \quad (1.3.8)$$

Основное состояние магнитного кристалла в отсутствии релаксации соответствует минимуму энергии  $W$ . Варьируя энергию (1.3.7) по полям  $M$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\Psi$ , получаем (ввиду независимости объемных и поверхностных вариаций) уравнения, определяющие возможные равновесные

значения полей  $M$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\Psi$ :

$$\begin{aligned}
 & \partial_M f + \alpha_{ik} [-\partial_i \partial_k M + M (\partial_i \theta \partial_k \theta + \sin^2 \theta \partial_i \varphi \partial_k \varphi)] + \\
 & + \beta M \sin^2 \theta - (H_3^{\text{ext}} - \partial_3 \Psi) \cos \theta + (\mathbf{e}_1 \cdot \nabla \Psi) \sin \theta = 0, \\
 & \alpha_{ik} [-\partial_k (M^2 \partial_i \theta) + M^2 \partial_i \varphi \partial_k \varphi \sin \theta \cos \theta] + \beta M^2 \sin \theta \cos \theta + \\
 & + M (H_3^{\text{ext}} - \partial_3 \Psi) \sin \theta + M (\mathbf{e}_1 \cdot \nabla \Psi) \cos \theta = 0, \\
 & -\alpha_{ik} \partial_k (M^2 \partial_i \varphi \sin^2 \theta) + M \sin \theta (\mathbf{e}_2 \cdot \nabla \Psi) = 0; \\
 & \Delta \Psi = 4\pi \operatorname{div} \mathbf{M} \quad (\mathbf{x} \in V_0), \quad \Delta \Psi = 0 \quad (\mathbf{x} \in V_1),
 \end{aligned} \tag{1.3.9}$$

и необходимые для их решения граничные условия:

$$\begin{aligned}
 & \alpha_{ik} \partial_i M n_k|_{\sigma} = 0; \quad \alpha_{ik} \partial_i \theta n_k|_{\sigma} = 0, \quad \sin^2 \theta \alpha_{ik} \partial_i \varphi n_k|_{\sigma} = 0, \\
 & \Psi_-|_{\sigma} = \Psi_+|_{\sigma}, \quad n_k [-\partial_k \Psi + 4\pi M_k]_-|_{\sigma} = -n_k \partial_k \Psi_+|_{\sigma}, \\
 & \partial_i \Psi \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (\mathbf{x} \in V_1).
 \end{aligned} \tag{1.3.10}$$

Здесь  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности  $\sigma$  пластины,  $V_0$  ( $V_1$ ) — область пространства внутри (вне) пластины. Здесь и далее для упрощения записи и расчетов полезно ввести ортонормированный подвижный репер, образованный векторами  $\mathbf{e}_i$ :

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{e}_1 = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0), \\
 & \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1); \quad [\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j] = \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k.
 \end{aligned} \tag{1.3.11}$$

Из (1.3.9), (1.3.10) заключаем, что условиям экстремума энергии удовлетворяет, в частности, однородное состояние:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{H}_0^{(m)} = -\nabla \Psi_0 = (0, 0, -4\pi M_0) \quad (\mathbf{x} \in V_0); \\
 & \mathbf{H}_0^{(m)} = 0 \quad (\mathbf{x} \in V_1); \\
 & \theta_0 = 0, \quad \partial_{M_0} f - H_3^{\text{ext}} + 4\pi M_0 = 0,
 \end{aligned} \tag{1.3.12}$$

где  $M_0 = \text{const}$  — однородная намагниченность. Энергия  $W$ , отвечающая состоянию (1.3.12), вырождена относительно вращений вокруг оси  $Ox_3$  ( $\varphi = \varphi_0$  — произвольный постоянный угол).

Далее для плотности энергии  $f(M)$  примем приближение [17]:

$$\begin{aligned}
 f(M) & \approx f(M_0) + \partial_{M_0} f(M_0)(M - M_0) + \\
 & + \frac{1}{2} \partial_{M_0}^2 f(M_0)(M - M_0)^2 + \dots = f(M_0) + \\
 & + (H_3^{\text{ext}} - 4\pi M_0)(M - M_0) + \frac{1}{2\chi} (M - M_0)^2 + \dots,
 \end{aligned} \tag{1.3.13}$$

где  $\chi = (\partial_{M_0}^2 f)^{-1}$  — продольная восприимчивость ферромагнетика при однородной намагниченности.

Рассмотрим малые отклонения  $\delta M$ ,  $\delta\theta$ ,  $\delta\Psi$  от экстремали:

$$M = M_0 + \delta M, \quad \theta = \delta\theta, \quad \Psi = \Psi_0 + \delta\Psi, \\ \mathbf{H}^{(m)} = \mathbf{H}_0^{(m)} + \delta\mathbf{h}, \quad \delta\mathbf{h} = -\nabla\delta\Psi.$$

Разложение энергии  $W$  по отклонениям от экстремали начинается с квадратичной формы  $\delta^2 W$  по отклонениям. Когда квадратичная форма является положительно определенной ( $\delta^2 W > 0$  при любых  $\delta\Psi$ ,  $\delta\theta$ ,  $\delta M$  не равных нулю), однородному состоянию (1.3.12) отвечает локальный минимум энергии, а значит, устойчивое основное состояние магнитного кристалла. Чтобы определить границы устойчивости решения (1.3.12), вычислим  $\delta^2 W$ . Принимая во внимание связи между вариациями  $\delta\Psi$  и  $\delta\mathbf{M}$ :

$$\Delta\delta\Psi = 4\pi\text{div}\delta\mathbf{M}, \quad n_k [\partial_k \delta\Psi - 4\pi\delta M_k]_-|_\sigma = n_k \partial_k \delta\Psi_+|_\sigma \quad (\mathbf{x} \in V_0); \\ \Delta\delta\Psi = 0, \quad \partial_i \delta\Psi \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (\mathbf{x} \in V_1),$$

получаем после интегрирований по частям:

$$\delta^2 \int_{V_0} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}^{(m)}) d^3\mathbf{x} = \int_{V_0} \left[ (\delta_1 \mathbf{M} \cdot \delta\mathbf{h}) - \frac{M_0}{2} (\delta\theta)^2 (\mathbf{H}_0^{(m)} \cdot \mathbf{e}_3) \right] d^3\mathbf{x}, \\ \int_{V_0+V_1} \frac{(\delta\mathbf{h})^2}{8\pi} d^3\mathbf{x} = -\frac{1}{2} \int_{V_0} (\delta_1 \mathbf{M} \cdot \delta\mathbf{h}) d^3\mathbf{x},$$

где

$$\delta_1 \mathbf{M} = \delta\theta M_0 \mathbf{e}_1 + \delta M \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{H}_0^{(m)} = -4\pi M_0 \mathbf{e}_3$$

и, следовательно,

$$\delta^2 W^{(m)} = \frac{M_0}{2} \int_{V_0} (\delta\theta)^2 (\mathbf{H}_0^{(m)} \cdot \mathbf{e}_3) d^3\mathbf{x} + \int_{V_0+V_1} \frac{(\delta\mathbf{h})^2}{8\pi} d^3\mathbf{x}.$$

В результате выражение для вариации  $\delta^2 W$  принимает вид

$$\delta^2 W = \int_{V_0} \left( \frac{1}{2\chi} (\delta M)^2 + \frac{\alpha_{ik}}{2} [\partial_i \delta M \partial_k \delta M + M_0^2 \partial_i \delta\theta \partial_k \delta\theta] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} M_0 (\delta\theta)^2 [H_3^{\text{ext}} - H_s] \right) d^3\mathbf{x} + \int_{V_0+V_1} \frac{(\delta\mathbf{h})^2}{8\pi} d^3\mathbf{x}.$$

Таким образом, в отсутствии релаксации однородное распределение намагниченности (см. рис. 1.1) является устойчивым при следующих условиях:

$$\chi > 0, \quad \alpha_1, \alpha_3 > 0, \quad H_3^{\text{ext}} > H_s,$$

где  $H_s = M_0(4\pi - \beta)$  — поле насыщения. Напомним, что постоянная  $\beta > 0$  ( $\beta < 0$ ) в случае магнитной анизотропии типа «легкая ось» («легкая плоскость»).

В больших по модулю отрицательных полях  $H_3^{\text{ext}}$  кристалл перемagnичивается и устойчивым будет другое однородное состояние:

$$\theta_0 = \pi, \quad \mathbf{H}^{(m)} = (0, 0, 4\pi M_0).$$

При  $|H_3| < |H_s|$  однородное распределение намагниченности неустойчиво, образец разбивается на макроскопические области самопроизвольной намагниченности (ферромагнитные домены) с размерами порядка  $10^{-3}$ – $10^{-2}$  см. Ориентация намагниченности в доменах способствует замыканию магнитного потока внутри образца. В результате магнитоэстатическое поле  $\mathbf{H}^{(m)}$  вне образца, а значит,

и энергия системы существенно уменьшаются. В безграничной среде домены разделены узкими границами толщиной  $x_0$ :  $x_0 \sim \sqrt{\alpha/\beta}$  или  $x_0 \sim \sqrt{\alpha/(\beta + 4\pi)}$ , в зависимости от внутренней структуры доменных границ (границы блоховского или неелевского типа). Обычно толщина доменных границ порядка  $(10 - 10^3) a$ , где  $a$  — межатомное расстояние.

Выражение для энергии ферромагнитной пластины в терминах комплексного поля  $q(\mathbf{x}, t)$  нетрудно получить с помощью формул (1.3.6), (1.3.7), (1.3.13) и соотношения

$$\partial_s \theta \partial_k \theta + \partial_s \varphi \partial_k \varphi \sin^2 \theta = 2 (\partial_s q \partial_k q^* + \partial_s q^* \partial_k q) (1 + |q|^2)^{-2}.$$

### 1.3.2. Уравнения динамики

Полной энергии (1.3.5), (1.3.13) ферромагнетика соответствует эффективное поле

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{\text{eff}} = -\frac{\delta W}{\delta \mathbf{M}} = & -\left( \mathbf{H}_3^{\text{ext}} - 4\pi M_0 + \frac{M - M_0}{\chi} \right) \frac{\mathbf{M}}{M} + \\ & + \alpha_{ik} \partial_i \partial_k \mathbf{M} - \beta \mathbf{M}_{\perp} + \mathbf{H}^{\text{ext}} + \mathbf{H}^{(m)}, \end{aligned}$$

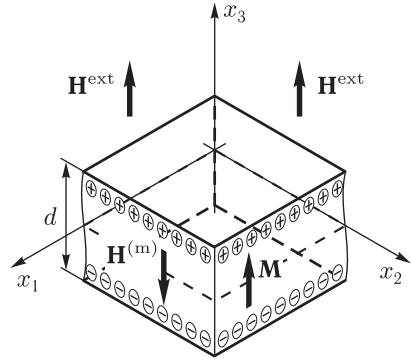


Рис. 1.1. Образование фиктивных магнитных зарядов «+» и «-» на поверхности однородно намагниченной пластины и взаимная ориентация векторов  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{H}^{\text{ext}}$  и  $\mathbf{H}^{(m)}$

где  $\mathbf{M}_\perp = (M_1, M_2, 0)$ . Выразим  $\mathbf{H}^{\text{eff}}$  через динамические переменные  $M, q$ :

$$\begin{aligned} H_+^{\text{eff}} &= H_1^{\text{eff}} + iH_2^{\text{eff}} = - \left[ H_3^{\text{ext}} - H_s + (M - M_0) \left( \frac{1}{\chi} + \beta \right) \right] \frac{2q}{1 + |q|^2} + \\ &\quad + \alpha_{sp} \partial_s \partial_p \left( \frac{2Mq}{1 + |q|^2} \right) + H_+^{(m)}, \quad H_-^{\text{eff}} = (H_+^{\text{eff}})^*, \\ H_3^{\text{eff}} &= - \left( H_3^{\text{ext}} - 4\pi M_0 + \frac{M - M_0}{\chi} \right) \frac{1 - |q|^2}{1 + |q|^2} + \\ &\quad + \alpha_{sp} \partial_s \partial_p \left( M \frac{1 - |q|^2}{1 + |q|^2} \right) + H_3^{\text{ext}} + H_3^{(m)}. \end{aligned}$$

Тогда уравнения динамики намагниченности (1.3.4) дают следующие уравнения для расчета  $M$  и  $q$ :

$$\begin{aligned} 2M\partial_t q &= i\gamma M (2qH_3^{\text{eff}} - H_+^{\text{eff}} + q^2 H_-^{\text{eff}}) + r_1 (H_+^{\text{eff}} - q^2 H_-^{\text{eff}}) + \\ &\quad + \lambda_{sp}^{\text{ex}} (2q \partial_s \partial_p H_3^{\text{eff}} - \partial_s \partial_p H_+^{\text{eff}} + q^2 \partial_s \partial_p H_-^{\text{eff}}), \\ \partial_t M &= \frac{r_1}{1 + |q|^2} (q^* H_+^{\text{eff}} + q H_-^{\text{eff}}) - \\ &\quad - \frac{\lambda_{sp}^{\text{ex}}}{1 + |q|^2} (q^* \partial_s \partial_p H_+^{\text{eff}} + q \partial_s \partial_p H_-^{\text{eff}}) - \lambda_{sp}^{\text{ex}} \frac{1 - |q|^2}{1 + |q|^2} \partial_s \partial_p H_3^{\text{eff}}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} 2qH_3^{\text{eff}} - H_+^{\text{eff}} + q^2 H_-^{\text{eff}} &= \\ &= \frac{2M}{1 + |q|^2} [\alpha_{sp} (-\partial_s \partial_p q + 2q \partial_s q \partial_p q^*) + \beta q (1 - |q|^2)] + \\ &\quad + 2q(H_3^{\text{ext}} + H_3^{(m)}) - H_+^{(m)} + q^2 H_-^{(m)} - 4\alpha_{sp} \partial_p q \partial_s M. \end{aligned}$$

В рассматриваемой теории изменение длины вектора намагниченности во времени и пространстве обусловлено только процессами релаксации.

Чтобы переписать уравнения динамики намагниченности (1.3.4) в терминах полей  $M, \theta, \varphi$ , разложим векторы  $\mathbf{M}$  (1.3.8) и  $\mathbf{H}^{\text{eff}}$  по базисным векторам (1.3.11):

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= M \sin \theta \mathbf{e}_1 + M \cos \theta \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{H}^{\text{eff}} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3; \\ a_1 &= - \left[ H_3^{\text{ext}} - H_s + (M - M_0) \left( \frac{1}{\chi} + \beta \right) \right] \sin \theta + \\ &\quad + \alpha_{ik} \widehat{L}_{ik}^{(1)} (M \sin \theta) + (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{H}^{(m)}) \equiv - \sin \theta \frac{\delta W}{\delta M} - \frac{1}{M} \frac{\delta W}{\delta \theta}, \\ a_2 &= \alpha_{ik} \widehat{L}_{ik}^{(2)} (M \sin \theta) + (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{H}^{(m)}) \equiv - \frac{1}{M \sin \theta} \frac{\delta W}{\delta \varphi}, \\ a_3 &= - \left( H_3^{\text{ext}} - 4\pi M_0 + \frac{M - M_0}{\chi} \right) \cos \theta + \alpha_{ik} \partial_i \partial_k (M \cos \theta) + \\ &\quad + H_3^{\text{ext}} + H_3^{(m)} \equiv - \cos \theta \frac{\delta W}{\delta M} + \frac{1}{M} \sin \theta \frac{\delta W}{\delta \theta}. \end{aligned}$$



Здесь для сокращения записи введены дифференциальные операторы

$$\widehat{L}_{ik}^{(1)} = \partial_i \partial_k - (\partial_i \varphi)(\partial_k \varphi), \quad \widehat{L}_{ik}^{(2)} = (\partial_i \varphi) \partial_k + (\partial_k \varphi) \partial_i + (\partial_i \partial_k \varphi).$$

Поскольку при дифференцировании векторов  $\mathbf{e}_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) выполняются правила

$$\begin{aligned} \partial_i \mathbf{e}_\alpha &= \partial_i \varphi \varepsilon_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\beta, \\ \partial_i (a_\alpha \mathbf{e}_\alpha + a_3 \mathbf{e}_3) &= \mathbf{e}_\beta [\delta_{\beta\alpha} \partial_i - \varepsilon_{\beta\alpha} (\partial_i \varphi)] a_\alpha + \mathbf{e}_3 \partial_i a_3, \\ \partial_i \partial_j (a_\alpha \mathbf{e}_\alpha + a_3 \mathbf{e}_3) &= \mathbf{e}_\gamma (\delta_{\gamma\alpha} \widehat{L}_{ij}^{(1)} - \varepsilon_{\gamma\alpha} \widehat{L}_{ij}^{(2)}) a_\alpha + \mathbf{e}_3 \partial_i \partial_j a_3, \end{aligned}$$

где  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  — антисимметричный единичный тензор ( $\varepsilon_{12} = 1$ ), все производные в уравнениях (1.3.4) легко вычисляются. Приравнявая после дифференцирований коэффициенты при линейно независимых векторах  $\mathbf{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), находим уравнения динамики полей  $M$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} M \partial_t \theta &= \gamma M a_2 - \lambda_{sp}^{\text{ex}} \cos \theta \left( \widehat{L}_{sp}^{(1)} a_1 - \widehat{L}_{sp}^{(2)} a_2 \right) + \\ &\quad + \lambda_{sp}^{\text{ex}} \sin \theta \partial_s \partial_p a_3 + r_1 a_1 \cos \theta, \\ M \sin \theta \partial_t \varphi &= \gamma M (a_3 \sin \theta - a_1 \cos \theta) + r_1 a_2 - \\ &\quad - \lambda_{sp}^{\text{ex}} \left( \widehat{L}_{sp}^{(1)} a_2 + \widehat{L}_{sp}^{(2)} a_1 \right), \\ \partial_t M &= r_1 a_1 \sin \theta - \lambda_{sp}^{\text{ex}} \sin \theta \left( \widehat{L}_{sp}^{(1)} a_1 - \widehat{L}_{sp}^{(2)} a_2 \right) - \\ &\quad - \lambda_{sp}^{\text{ex}} \cos \theta \partial_s \partial_p a_3. \end{aligned} \tag{1.3.14}$$

При вычислении выражения  $a_3 \sin \theta - a_1 \cos \theta$  оказываются полезными тождества

$$\begin{aligned} &\sin \theta \partial_i \partial_k (M \cos \theta) - \cos \theta \widehat{L}_{ik}^{(1)} (M \sin \theta) = \\ &= -\partial_i M \partial_k \theta - \partial_k M \partial_i \theta - M \partial_i \partial_k \theta + \sin \theta \cos \theta M \partial_i \varphi \partial_k \varphi, \\ &\alpha_{ik} M \left[ \sin \theta \partial_i \partial_k (M \cos \theta) - \cos \theta \widehat{L}_{ik}^{(1)} (M \sin \theta) \right] = \\ &= \alpha_{ik} \left[ -\partial_k (M^2 \partial_i \theta) + M^2 \sin \theta \cos \theta \partial_i \varphi \partial_k \varphi \right]. \end{aligned}$$

Следствием первого и третьего уравнений системы (1.3.14) является более простое уравнение:

$$\partial_t [M \cos \theta] = -\gamma M a_2 \sin \theta - \lambda_{sp}^{\text{ex}} \partial_s \partial_p a_3.$$

При вычислении  $M a_2 \sin \theta$  оказывается полезным еще одно тождество:

$$M \sin \theta \alpha_{ik} \widehat{L}_{ik}^{(2)} (M \sin \theta) = \alpha_{ik} \partial_k [M^2 \sin^2 \theta \partial_i \varphi].$$

В безграничных ферромагнетиках с анизотропией типа «легкая ось» в рамках изложенного подхода методами солитонной теории возмущений были исследованы особенности подвижности доменных границ [18, 19]. В доменных границах повороты намагниченности значительны, поэтому результаты солитонной теории возмущений не могут

быть воспроизведены ни в каком конечном порядке теории возмущений для линейных спиновых волн. Показано, что изложенный подход может количественно описывать нетривиальные релаксационные явления.

### 1.3.3. Краевые условия, принцип Гамильтона

С целью сформулировать краевые условия для задачи о динамике намагниченности в пластине, вычислим изменение во времени энергии пластины (1.3.5). Используя уравнения (1.3.4), после интегрирований по частям получим

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} = -2Q - \int_{V_0} (\partial_t \mathbf{H}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{M}) d^3\mathbf{x} + \\ + \int_{\sigma} [\alpha_{ij} (\partial_i \mathbf{M} \cdot \partial_t \mathbf{M}) + (\mathbf{H}^{\text{eff}} \cdot \lambda_{sj}^{\text{ex}} \partial_s \mathbf{H}^{\text{eff}})] dS_j. \end{aligned}$$

В магнитостатическом приближении поток энергии через поверхность  $\sigma$  пластины должен быть равен нулю. Это возможно только при следующих краевых условиях:

$$n_j \alpha_{ij} \partial_i \mathbf{M}|_{\sigma} = 0, \quad n_j \lambda_{ij}^{\text{ex}} \partial_i \mathbf{H}^{\text{eff}}|_{\sigma} = 0.$$

Вследствие диагональной структуры тензоров  $\alpha_{ij}$  и  $\lambda_{ij}^{\text{ex}}$  приведенные равенства эквивалентны более простым:

$$\partial_n \mathbf{M}|_{\sigma} = \partial_n \mathbf{H}^{\text{eff}}|_{\sigma} = 0,$$

где  $\partial_n = n_j \partial_j$  — производная по нормали  $\mathbf{n}$  к поверхности  $\sigma$ . Здесь пластина не предполагается безграничной в направлениях  $Ox_{\alpha}$  ( $\alpha = 1, 2$ ).

В терминах полей  $M$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \partial_n M|_{\sigma} = \partial_n \theta|_{\sigma} = \partial_n \varphi \sin \theta|_{\sigma} = 0, \\ (\partial_n a_1 - a_2 \partial_n \varphi)|_{\sigma} = (\partial_n a_2 + a_1 \partial_n \varphi)|_{\sigma} = \partial_n a_3|_{\sigma} = 0. \end{aligned}$$

Когда внешнее магнитное поле  $\mathbf{H}^{\text{ext}}$  не зависит от времени, энергия пластины с течением времени убывает до тех пор, пока диссипативный функционал  $Q$  не обратится в нуль:

$$\frac{dW}{dt} = -2Q \leq 0.$$

Вследствие положительной определенности функционала  $Q$  (1.3.2) (1.3.3) это происходит при выполнении равенств

$$H_1^{\text{eff}} = H_2^{\text{eff}} = 0, \quad H_3^{\text{eff}} = \text{const},$$

которые при  $H_3^{\text{eff}} = 0$  совпадают с условиями минимума энергии кристалломагнетика:

$$\mathbf{H}^{\text{eff}} = -\frac{\delta W}{\delta \mathbf{M}} = 0.$$

Пусть диссипацией энергии в системе, а также изменением длины вектора  $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$  можно пренебречь. Тогда приведенные в этом разделе уравнения динамики намагниченности в пластине и необходимые для их решения граничные условия могут быть выведены из вариационного принципа Гамильтона:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0. \quad (1.3.15)$$

Здесь  $L = K - W$  — функция Лагранжа пластины, функционал  $K$  является аналогом кинетической энергии системы:

$$K = \int_{V_0} \frac{1}{\gamma} M_0 (1 - \cos \theta) \partial_t \varphi d^3 \mathbf{x} = \frac{M_0}{i\gamma} \int_{V_0} \frac{q^* \partial_t q - q \partial_t q^*}{1 + |q|^2} d^3 \mathbf{x}.$$

Варьирование действия пластины (1.3.15) производится по полям  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\Psi$  (или  $q$ ,  $q^*$ ,  $\Psi$ ) при условии, что  $\delta \varphi = 0$  ( $\delta q = \delta q^* = 0$ ) на концах промежутка времени  $[t_1, t_2]$ .

## 1.4. Магнитоупругие взаимодействия в многоподрешеточных магнетиках

*Да не войдет сюда человек, не знающий геометрии.*

*Слова Платона  
на фронтоне его Академии*

При деформациях кристалломагнетика изменяются расстояния между магнитными атомами, а значит, изменяются энергии их обменного (1.1.14), спин-орбитального (1.1.20) и диполь-дипольного (1.1.22) взаимодействий. И наоборот, взаимодействия между магнитными атомами могут приводить к изменениям размеров и формы тела при его намагничивании. Хотя связь между магнитной и упругой подсистемами кристалла невелика, она проявляется в интересных явлениях и эффектах. Так, вследствие спонтанных деформаций кристалла, нарушающих трансляционную симметрию полного микрогамильтониана системы, появляются новые моды магнитоупругих колебаний с энергетической щелью в спектре «квазимагнонов» [20, 21]. В магнитоупругих средах возможны вращения плоскости поляризации, двулучепреломление квазизвуковых волн, перенормировка скорости их распространения и т. д. [3].

Существуют два основных способа теоретического описания изменений в положениях материальных частиц тела при его деформировании.

В лагранжевом подходе в качестве «метки» материальной точки тела используются декартовы координаты положения этой точки в недеформированном состоянии тела. Затем мы следим за эволюцией «помеченных» материальных точек тела.

При эйлеровом подходе мы наблюдаем за тем, что происходит в фиксированной области пространства по мере того, как идет время. «Такое описание идеально подходит для изучения жидкостей, где зачастую быстро деформирующаяся масса приходит неизвестно откуда и уходит неизвестно куда, так что предпочтительнее рассматривать то, что происходит здесь и сейчас у нас на глазах. Однако эйлерово описание, будучи удобным кинематически, становится неуклюжим при обсуждении законов динамики и приводит к трудностям. Дело в том, что в динамические уравнения входят величины, относящиеся к материальным частицам тела, а не к пространственным областям, которые эти частицы временно занимают. Некоторые соотношения, которые очевидны при лагранжевом подходе, требуют вычурных рассуждений при использовании эйлеровых координат» [22]. Далее при обсуждении магнитоупругих взаимодействий будем придерживаться лагранжевого описания [2, 23].

Пусть  $x_k$  — декартовы координаты материальной точки тела до деформации,  $X_k = x_k + u_k(\mathbf{x}, t)$  — координаты той же точки после деформации,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  — вектор смещений среды,  $\mathbf{M}_\nu(\mathbf{x}, t)$  — магнитный момент  $\nu$ -й подрешетки магнетика, отнесенный к единице объема кристалла в недеформированном состоянии (считаем, что в недеформированном состоянии плотность среды  $\rho_0 = \text{const}$ ).

Макроскопические намагниченности  $\mathbf{M}_\nu(\mathbf{x}, t)$  подрешеток магнетика, будучи привязанными магнитной анизотропией к определенным кристаллографическим осям, при деформировании образца стремятся повернуться вслед за этими осями. В результате в системе при  $\mathbf{H}^{\text{ext}} = 0$  сохраняется полный момент импульса, а не момент импульсов магнитной и упругой подсистем в отдельности. Это означает, что феноменологическое разложение магнитной, упругой и магнитоупругой энергий кристалломагнетика может содержать только величины, которые инвариантны относительно одновременных глобальных вращений деформируемого тела и намагниченностей подрешеток:

$$X_k \rightarrow D_{ks} X_s, \quad M_{\nu k} \rightarrow D_{ks} M_{\nu s}. \quad (1.4.1)$$

Здесь  $D$  — независящая от радиуса-вектора  $\mathbf{x}$  матрица группы вращений  $SO(3)$  ( $D_{is} D_{ik} = \delta_{sk}$ ,  $\det D = 1$ ).

Нам нужно составить из величин  $M_{\nu k}$ ,  $\partial M_{\nu k} / \partial x_i$ ,  $\partial X_k / \partial x_i$  комбинации, инвариантные относительно преобразований (1.4.1). Заметим, что преобразованию подвергается лишь векторный индекс  $k$  (лагранжевы координаты  $x_i$  на преобразование (1.4.1) не реагируют, так как служат «меткой» материальной точки тела). Можно образовать только 18 независимых инвариантов, в качестве которых выберем сле-

дующие [2, 23]:

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} - \delta_{ij} \right), \quad (1.4.2)$$

$$K_{\nu i} = M_{\nu k} \frac{\partial X_k}{\partial x_i}, \quad K_{\nu ij} = \frac{\partial M_{\nu k}}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j}.$$

Другие инварианты могут быть выражены через инварианты (1.4.2), например:

$$(\mathbf{M}_{\nu_1} \cdot \mathbf{M}_{\nu_2}) = K_{\nu_1 i} [2\eta + E]_{ij}^{-1} K_{\nu_2 j},$$

$$\left( \frac{\partial \mathbf{M}_{\nu_1}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}_{\nu_2}}{\partial x_j} \right) = K_{\nu_1 is} [2\eta + E]_{sp}^{-1} K_{\nu_2 jp},$$

где  $E$  — единичная матрица.

Инварианты (1.4.2) соответствуют локальным характеристикам деформированной среды. Для пояснения их физического смысла перейдем в криволинейную систему координат, связанную с деформированным телом. В криволинейных координатах следует различать верхние (контравариантные) и нижние (ковариантные) индексы у векторов и тензоров. В декартовой системе координат, которой мы до сих пор пользовались, ковариантные и контравариантные векторы и их компоненты совпадают:  $X^k = X_k$ ,  $x^k = x_k$ ,  $\mathbf{i}_k = \mathbf{i}^k$  ( $\mathbf{i}_k$  — единичные орты декартовой системы координат, связанной с недеформированным телом). Введем локальную криволинейную систему координат с базисными векторами  $\mathbf{e}_i$ , присоединенную к точке деформированной среды с лагранжевыми координатами  $x_p$ :

$$\mathbf{e}_s = \frac{\partial X^k}{\partial x^s} \mathbf{i}_k. \quad (1.4.3)$$

При деформациях тела каждый из реперов  $\{\mathbf{e}_i\}$  изменяется, а лагранжевы координаты материальной точки среды, к которым приписан репер, остаются прежними. В этом смысле криволинейная система координат (1.4.3) как бы «вморожена» в среду и «отслеживает» сдвиги и повороты малых областей кристалла (см. рис. 1.2 и 1.3).

В недеформированном состоянии тела вектор, соединяющий две близкие частицы среды, может быть записан в виде  $d\mathbf{x} = dx^k \mathbf{i}_k$ . Квадрат расстояния между частицами определяется соотношением

$$(d\mathbf{x})^2 = dx^k dx^m (\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_m) = dx^k dx^m \delta_{km}.$$

После деформирования тела вектор, соединяющий те же близкие частицы, становится другим:  $d\mathbf{X} = dX^k \mathbf{i}_k$ . Расстояние между частицами изменяется:

$$(d\mathbf{X})^2 = \frac{\partial X^k}{\partial x^s} \frac{\partial X^m}{\partial x^p} \delta_{km} dx^s dx^p = (\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{e}_p) dx^s dx^p.$$

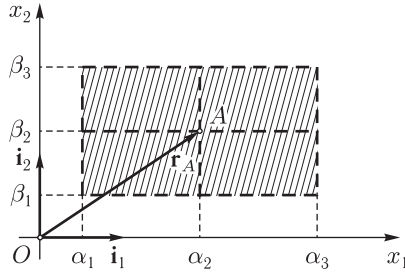


Рис. 1.2. Недеформированное тело (заштриховано) и координатные линии  $x_1 = \alpha = \text{const}$  и  $x_2 = \beta = \text{const}$  в нем. Радиус-вектор  $\mathbf{r}_A = x_1^{(A)}\mathbf{i}_1 + y_1^{(A)}\mathbf{i}_2$  задает положение материальной частицы  $A$

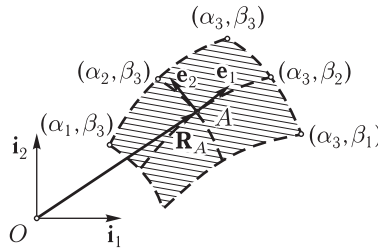


Рис. 1.3. В деформированном теле частица  $A$  находится в точке с радиусом-вектором  $\mathbf{R}(x_1^{(A)}, x_2^{(A)}) = X_1(x_1^{(A)}, x_2^{(A)})\mathbf{i}_1 + X_2(x_1^{(A)}, x_2^{(A)})\mathbf{i}_2$ . Координатные линии  $\mathbf{R}(\alpha, x_2)$  и  $\mathbf{R}(x_1, \beta)$  искривляются. Векторы  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ , тангенциальные к координатным линиям, образуют локальный базис

Величина

$$g_{sp} = \frac{\partial X^k}{\partial x^s} \frac{\partial X^m}{\partial x^p} \delta_{km}$$

характеризует метрические свойства деформированной среды. Она инвариантна относительно вращений тела как целого (1.4.1).

Поскольку изменение расстояния между близкими частицами тела в результате деформации тела может быть записано в виде

$$(\mathbf{dX})^2 - (\mathbf{dx})^2 = (g_{is} - \delta_{is}) dx^i dx^s,$$

в качестве меры нелинейно-упругой деформации среды обычно выбирают не величину  $g_{is}$ , а лагранжев тензор деформаций

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - \delta_{ij}).$$

В терминах декартовых смещений среды компоненты тензора  $\eta$  имеют вид

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} + \frac{\partial u_k}{\partial x^i} \frac{\partial u_k}{\partial x^j} \right).$$

Для дальнейшего анализа полезен тензор  $g^{kl}$ , обратный к  $g_{km}$ :  $g^{kl}g_{lm} = \delta_m^k$ . Очевидно, что

$$g^{sp} = \frac{\partial x^s}{\partial X^l} \frac{\partial x^p}{\partial X^m} \delta^{lm}.$$

С помощью метрических тензоров  $g^{sp}$ ,  $g_{km}$  можно опускать и поднимать индексы у тензоров и векторов в криволинейной системе координат. В частности, можно определить контравариантные базисные векторы локальной системы координат:

$$\mathbf{e}^m = g^{mn} \mathbf{e}_n = \frac{\partial x^m}{\partial X^p} \mathbf{i}^p. \quad (1.4.4)$$

Оказывается полезным свойство ортогональности векторов  $\mathbf{e}^m$  и  $\mathbf{e}_s$ :

$$(\mathbf{e}^m \cdot \mathbf{e}_s) = \delta_s^m. \quad (1.4.5)$$

Вычислим производные от векторов  $\mathbf{e}_s$  и  $\mathbf{e}^s$  по лагранжевым переменным  $x_p$ . Учитывая (1.4.3), (1.4.4), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_s}{\partial x^p} &= \frac{\partial^2 X^k}{\partial x^p \partial x^s} \mathbf{i}_k = \frac{\partial^2 X^n}{\partial x^p \partial x^s} \frac{\partial x^k}{\partial X^n} \mathbf{e}_k, \\ \frac{\partial \mathbf{e}^s}{\partial x^p} &= \frac{\partial}{\partial x^p} \left( \frac{\partial x^s}{\partial X^n} \right) \mathbf{i}^n = \left[ \frac{\partial}{\partial x^p} \left( \frac{\partial x^s}{\partial X^n} \right) \right] \frac{\partial X^n}{\partial x^m} \mathbf{e}^m. \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

Вследствие тождеств

$$\frac{\partial x^s}{\partial X^n} \frac{\partial X^n}{\partial x^m} = \delta_m^s, \quad \frac{\partial}{\partial x^p} \left( \frac{\partial x^s}{\partial X^n} \right) \frac{\partial X^n}{\partial x^m} + \frac{\partial x^s}{\partial X^n} \frac{\partial^2 X^n}{\partial x^p \partial x^m} = 0,$$

соотношения (1.4.6) можно переписать в форме

$$\frac{\partial \mathbf{e}_s}{\partial x^p} = \Gamma_{ps}^k \mathbf{e}_k, \quad \frac{\partial \mathbf{e}^s}{\partial x^p} = -\Gamma_{pm}^k \mathbf{e}^m. \quad (1.4.7)$$

Здесь

$$\Gamma_{ps}^k = \frac{\partial^2 X^n}{\partial x^p \partial x^s} \frac{\partial x^k}{\partial X^n}$$

суть коэффициенты связности (символы Кристоффеля второго рода), которые определяют операцию параллельного переноса векторов вдоль кривых в деформированном теле [24, 25]. Они могут быть выражены через метрический тензор (или же через тензор  $\eta$ ):

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left( \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right).$$

При теоретическом описании магнитоупругих взаимодействий вместо компонент  $M_{\nu i}$  вектора намагненности  $\nu$ -й подрешетки в базисе  $\{\mathbf{i}^k\}$ , который связан с недеформированным телом, правильнее использовать компоненты  $\mu_{\nu i}$  этого же вектора, но вычисленные относительно локального базиса  $\mathbf{e}^k$ :

$$M_{\nu k} \mathbf{i}^k = \mu_{\nu p} \mathbf{e}^p. \quad (1.4.8)$$

Используя соотношение (1.4.5), находим, что локальные намагниченности подрешеток  $\mu_{\nu p}$  совпадают с инвариантами  $K_{\nu p}$  в (1.4.2):

$$\mu_{\nu p} = M_{\nu k} (\mathbf{i}^k \cdot \mathbf{e}_p) = M_{\nu k} \frac{\partial X^k}{\partial x^p} = K_{\nu p}.$$

Аналогичным образом, вместо производных  $\partial M_{\nu i} / \partial x^s$  от компонент вектора намагниченности  $\nu$ -й подрешетки, которые определены относительно базиса  $\{\mathbf{i}^k\}$ , лучше использовать абсолютные производные от компонент того же вектора, но вычисленные относительно локального репера  $\{\mathbf{e}^k\}$ . Дифференцируя равенство (1.4.8) по  $x^s$  с учетом (1.4.7), получим

$$\frac{\partial M_{\nu k}}{\partial x^s} \mathbf{i}^k = \left( \frac{\partial \mu_{\nu p}}{\partial x^s} \right) \mathbf{e}^p + \mu_{\nu p} \frac{\partial \mathbf{e}^p}{\partial x^s} = \left( \frac{\partial \mu_{\nu j}}{\partial x^s} - \Gamma_{sj}^n \mu_{\nu n} \right) \mathbf{e}^j \equiv \nabla_s \mu_{\nu j} \mathbf{e}^j.$$

Здесь  $\nabla_s \mu_{\nu j}$  — абсолютная (ковариантная) производная от локальной намагниченности  $\nu$ -й подрешетки  $\mu_{\nu i}$ . Ковариантные производные  $\nabla_s \mu_{\nu j}$  совпадают с инвариантами  $K_{\nu sj}$ :

$$\nabla_s \mu_{\nu j} = \left( \frac{\partial M_{\nu k}}{\partial x^s} \mathbf{i}^k \cdot \mathbf{e}_j \right) = \frac{\partial M_{\nu k}}{\partial x^s} \frac{\partial X^k}{\partial x^j} = K_{\nu sj}.$$

При произвольных непрерывных преобразованиях лагранжевых координат

$$x^s \rightarrow \tilde{x}^s = \tilde{x}^s(\mathbf{x})$$

величины  $g_{is}$ ,  $\mu_{\nu i}$ ,  $\nabla_s \mu_{\nu j}$  преобразуются как тензоры:

$$\tilde{g}_{km} = \frac{\partial x^s}{\partial \tilde{x}^k} g_{sp} \frac{\partial x^p}{\partial \tilde{x}^m}, \quad \tilde{\nabla}_k \tilde{\mu}_{\nu m} = \frac{\partial x^s}{\partial \tilde{x}^k} \nabla_s \mu_{\nu p} \frac{\partial x^p}{\partial \tilde{x}^m}, \quad \tilde{\mu}_{\nu m} = \frac{\partial x^s}{\partial \tilde{x}^m} \mu_{\nu s}.$$

Термодинамический потенциал магнетика, включающий энергии магнитного, упругого и магнитоупругого взаимодействий, записывается в форме

$$W = \int_{V_0} [f(\eta_{ij}, K_{\nu i}, K_{\nu ij}) - (\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}^{\text{ext}})] d^3 \mathbf{x}, \quad (1.4.9)$$

где интегрирование производится по объему  $V_0$  недеформированного тела, а плотность энергии  $f$  представляет разложение по инвариантам (1.4.2). Коэффициенты в разложении  $f$  определяются условием инвариантности энергии (1.4.9) относительно преобразований группы симметрии недеформированного магнитного кристалла, которые затрагивают лагранжевы координаты  $x_i$ .

В общем случае, потенциал  $W$  содержит не только объемную, но и поверхностную энергии. Объемная энергия задает форму динамических уравнений кристалломагнетика, поверхностная энергия конкретизирует граничные условия задачи. В отсутствии деформаций среды (при  $u_i = 0$ ) потенциал (1.4.9) совпадает с рассмотренной ранее энергией идеального магнитного кристалла (1.1.1). При  $\mathbf{M}_\nu = 0$  по-



тенциал (1.4.9) сводится к нелинейно-упругой энергии образца  $W^{(e)}$ . Эту энергию можно представить в форме разложения [26, 27]

$$W^{(e)} = \int_{V_0} [\lambda_{ik,sp} \eta_{ik} \eta_{sp} + \lambda_{ik,sp,mn} \eta_{ik} \eta_{sp} \eta_{mn} + \dots] d^3 \mathbf{x}, \quad (1.4.10)$$

где  $\lambda_{ik,sp}$  и т. д. суть упругие модули материала. В правой части (1.4.10) мы опустили слагаемые, линейные по  $\eta_{ij}$ , так как они соответствуют начальному нагружению образца.

На первый взгляд может показаться, что энергию магнитного и магнитоупругого взаимодействий можно получить путем формальной замены

$$M_{\nu i} \rightarrow \mu_{\nu i}, \quad \frac{\partial M_{\nu i}}{\partial x^s} \rightarrow \nabla_s \mu_{\nu i} \quad (1.4.11)$$

в выражении для энергии идеального магнитного кристалла (1.1.1) при отсутствии деформации тела. Однако это не верно потому, что симметрией магнетика допускаются не только минимальные взаимодействия. Более того, минимальные взаимодействия не являются основными, как это всегда предполагается в калибровочных теориях элементарных частиц [28–31]. Например, мы не получим верной энергии магнитоупругого взаимодействия, если осуществим формальную замену (1.4.11) в энергии (1.3.5) одноосного ферромагнетика. Во-первых, потому, что модель одноосного кристалла является приближением, при котором отбрасываются слагаемые магнитной анизотропии в базисной плоскости, являющиеся членами того же порядка малости, что и магнитоупругие взаимодействия. А во-вторых, даже если учесть слагаемые магнитной анизотропии в базисной плоскости кристалла, при формальной замене (1.4.11) они все равно не воспроизведут необходимых магнитоупругих взаимодействий (разумеется, речь идет об основных магнитоупругих взаимодействиях одного и того же порядка величины).

Пусть диссипацией энергии в системе, а также изменениями длин векторов намагниченностей подрешеток можно пренебречь. Тогда нелинейная динамика магнитоупругой среды описывается следующей системой из уравнений Ландау–Лифшица и уравнений теории упругости:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{M}_\nu &= -\gamma_\nu [\mathbf{M}_\nu \times \mathbf{H}_\nu^{\text{eff}}], \\ \mathbf{M}_\nu^2 &= M_{0\nu}^2 = \text{const}; \\ \rho_0 \partial_t^2 u^i &= \partial_s P^{is}. \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

Здесь

$$\mathbf{H}_\nu^{\text{eff}} = -\frac{\delta W}{\delta \mathbf{M}_\nu}$$

есть эффективное поле,  $P^{is}$  — тензор Пиолы–Кирхгофа (вообще говоря, не симметричный по индексам  $i, s$ ):

$$P^{is} = \frac{\partial W}{\partial [\partial_s u_i]}.$$

В случае ферромагнитного кристалла с одной магнитной решеткой динамические уравнения (1.4.12) и необходимые для их решения краевые условия можно вывести из вариационного принципа Гамильтона

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta A dt = 0. \quad (1.4.13)$$

Здесь  $L = K - W$  — функция Лагранжа магнитоупругого образца, функционал  $K$  имеет смысл кинетической энергии среды:

$$K = \int_{V_0} \left[ \frac{1}{2} \rho_0 (\partial_t^2 \mathbf{u})^2 + \frac{1}{\gamma} M_0 (1 - \cos \theta) \partial_t \varphi \right] d^3 \mathbf{x}.$$

Мы воспользовались параметризацией намагниченности среды  $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$  углами  $\theta, \varphi$  (1.3.6) ( $|\mathbf{M}| = M_0 = \text{const}$ ).

Работа внешних поверхностных сил имеет вид

$$\delta A = \int_S \delta u_i T^{ij} dS_j. \quad (1.4.14)$$

Подчеркнем, что внешние напряжения  $T^{ij}$  прилагаются к поверхности  $S$  деформированного тела. На элемент поверхности  $dS_j$  деформированного тела действует сила  $T^{ij} dS_j$ . Поэтому, чтобы воспользоваться принципом Гамильтона, в (1.4.14) интегрирование по поверхности  $S$  следует заменить на интегрирование по поверхности  $\sigma$  недеформированного тела. Необходимое преобразование

$$\int_S \delta u_i T^{ij} dS_j = \int_{\sigma} \delta u_i T^{ij} \frac{\partial \det A}{\partial A^j_s} d\sigma_s \quad (1.4.15)$$

достигается с помощью тождеств

$$\begin{aligned} dS_j &= \frac{1}{2} \varepsilon_{j'kp} dX^k \wedge dX^p = \\ &= \frac{1}{2} \left( \varepsilon_{j'kp} \frac{\partial X^{j'}}{\partial x^s} \frac{\partial X^k}{\partial x^m} \frac{\partial X^p}{\partial x^n} \right) \frac{\partial x^s}{\partial X^j} dx^m \wedge dx^n = \\ &= \det \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \right\| \frac{\partial x^s}{\partial X^j} \frac{1}{2} \varepsilon_{smn} dx^m \wedge dx^n = \\ &= \det \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \right\| \frac{\partial x^s}{\partial X^j} d\sigma_s = \frac{\partial \det A}{\partial A^j_s} d\sigma_s, \end{aligned}$$

где  $\wedge$  — символ внешнего произведения,

$$A^k_l = \frac{\partial X^k}{\partial x^l} = \delta^k_l + \frac{\partial u^k}{\partial x^l}.$$

Здесь мы воспользовались представлением обратной матрицы:

$$(A^{-1})^s_j \equiv \frac{\partial x^s}{\partial X^j} = \frac{\partial \ln \det A}{\partial A^j_s}.$$

В формулах (1.4.14), (1.4.15) можно было бы и не различать верхние и нижние индексы у тензоров, так как в данном случае все тензорные величины относятся к декартовой системе координат, связанной с недеформируемым телом.

Варьирование функционала действия (1.4.13) производится по полям  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $u_i$  при условии, что  $\delta\theta = 0$ ,  $\delta\varphi = 0$ ,  $\delta u_s = 0$  на концах промежутка времени  $[t_1, t_2]$ . Кроме того,  $\delta u_s = 0$  на той части поверхности  $\sigma$ , где заданы не напряжения  $T^{ij}$ , а смещения  $u_s^{\text{ext}}$ .

В данном случае полная энергия  $E$  магнетика не совпадает с потенциальной энергией  $W$ :

$$E = \int_{V_0} \frac{1}{2} \rho_0 (\partial_t \mathbf{u})^2 d^3 \mathbf{x} + W.$$

Заметим также, что ангармонизм, привносимый в упругую подсистему кристалла со стороны магнитной подсистемы, более значителен, чем собственный ангармонизм упругой подсистемы. Поэтому при анализе нелинейных явлений магнитоупругую энергию кристалла обычно записывают в линейном, а упругую энергию в квадратичном по градиентам смещений  $\partial_s u_k$  приближениях, а также не делают различия между поверхностями тела до и после деформации ( $dS_i \approx d\sigma_i$ ). В таких приближениях лагранжево и эйлерово описания совпадают.

Мы получили выражение для энергии кристалломагнетика, исходя из условия ее инвариантности (при  $\mathbf{H}^{\text{ext}} = 0$ ) относительно глобальных вращений деформируемого тела (1.4.1). Можно предположить, что при наличии ротационных дефектов кристаллической решетки — дисклиний — инвариантность энергии сохранится только относительно локальных вращений (1.4.1) с матрицей  $D$ , зависящей от лагранжевых координат  $x_s$ . А при наличии трансляционных дефектов решетки — дислокаций — энергия системы, по-видимому, будет сохранять инвариантность лишь при локальных трансляциях:  $X_k \rightarrow X_k + \eta_k(\mathbf{x}, t)$ . Требованию локальной симметрии энергии системы можно удовлетворить путем включения в теорию дополнительных калибровочных полей, которые по своему физическому смыслу должны теоретически описывать величину относительного сдвига или поворота соседних областей среды, т. е. пластическую деформацию материала или же неупорядоченное состояние среды, локально похожей на идеальный кристалл. Принцип локальной инвариантности энергии системы, отражающий сохранение идеального порядка в малых областях среды, определит форму дифференциальных инвариантов, которые будут энергией взаимодействия магнитной и упругой подсистем с калибровочными полями. В таком подходе геометрия перестает быть только инструментом описания.

Локальная симметрия среды становится динамической симметрией в том смысле, что детали динамики полей оказываются обусловленными геометрическими свойствами среды.

К сожалению, изложенная концепция [32–38] встречает серьезные трудности и содержит спорные утверждения [39, 40]. Одна из основных трудностей состоит в выборе лагранжиана свободных калибровочных полей. Это проявляется, например, в несоответствии выводов калибровочной теории дислокаций и дисклинаций в кристаллах [35] с результатами менее общей, но надежно установленной несовместной теории упругости [39]. Рассмотренный пример магнитоупругих взаимодействий показывает, что в кристаллах без дефектов инвариантности геометрических характеристик среды оказывается недостаточно и для формулировки теории нужно выписывать полную инвариантную энергию системы.

Применение калибровочного подхода к построению полевых моделей дефектов и теоретическому описанию неупорядоченных магнетиков, которые имеют локальный кристаллический порядок, остается открытой проблемой.

### 1.5. Обменная симметрия и метод феноменологических лагранжианов

*Симметрия, как бы широко или узко мы ни понимали это слово, есть идея, с помощью которой человек в течение веков пытался объяснить и создать порядок, красоту и совершенство.*

*Г. Вейль. «Симметрия»*

Традиционная макроскопическая теория кристалломагнетиков основана на гипотезе о существовании магнитных подрешеток. Хотя это модельное предположение обычно приводит к правильным выводам, для него, строго говоря, нет убедительных микроскопических обоснований. В работах Андреева, Волкова, Марченко, Желтухина [41–46] предложена альтернативная феноменологическая теория, основанная на общих соображениях симметрии, не привлекающая представления о подрешетках, которое во многих случаях является избыточным и осложняет теоретическое описание нелинейной динамики магнитных сред. Новый подход с равным успехом применим как к кристаллам, так и к неупорядоченным магнетикам при условии, что формирование магнитных структур в этих средах обусловлено главным образом обменными взаимодействиями как наиболее сильными по сравнению с магнитоанизотропными (релятивистскими) взаимодействиями. Оказалось, что любая обменная магнитная структура может быть охарактеризована не более чем тремя, причем взаимно ортогональными,

магнитными векторами. Теоретико-групповой анализ взаимодействия голдстоуновских мод, стремящихся восстановить в системе симметрию относительно вращений в спиновом пространстве спиновых моментов атомов кристалла (спонтанно нарушенной в результате образования равновесной магнитной структуры), дает уравнения нелинейной динамики для спиновых волн с наименьшей энергией возбуждения. Хотя эти уравнения проще уравнений Ландау–Лифшица для намагниченностей подрешеток, в области своей применимости новый феноменологический подход самосогласован с прежним. Более того, он позволяет достаточно просто установить ряд общих закономерностей, которые в микроскопической теории были выведены лишь при весьма жестких ограничениях.

### 1.5.1. Обменная симметрия магнетиков

В традиционной феноменологической теории свойства симметрии кристалломагнетиков характеризуются магнитными пространственными группами. Группы в качестве элементов содержат чисто пространственные преобразования (повороты, отражения, трансляции) в комбинации с операцией обращения времени  $R$ . Преобразования группы магнитной симметрии оставляют инвариантными плотность заряда  $\rho(\mathbf{x})$  и квазиклассическую плотность магнитного момента  $\mathbf{m}(\mathbf{x})$  среды ( $\rho(\mathbf{x})$  и  $\mathbf{m}(\mathbf{x})$  — величины, полученные в результате квантовомеханического и термодинамического усреднений по малым объемам среды). Хотя такое описание симметрии магнитной среды является полным, в нем теряется наиболее существенная информация. Дело в том, что в формировании равновесной магнитной структуры кристалла основную роль играют обменные силы, симметрия которых выше, чем симметрия слабых релятивистских взаимодействий. Поэтому при формулировке уравнений динамики магнитных сред правильнее исходить не из анализа точной магнитной симметрии кристалла, а из рассмотрения приближенной симметрии обменных сил [46].

Пренебрежем всеми релятивистскими взаимодействиями и обсудим обменную симметрию магнетика. Поскольку обменные взаимодействия зависят лишь от относительных ориентаций спиновых моментов соседних атомов кристалла, общая ориентация спиновых моментов атомов относительно кристаллографических осей становится условной. В результате появляется бесконечная совокупность новых элементов симметрии, состоящая из вращений  $U$  спинового пространства, т. е. произвольных поворотов всех спиновых моментов атомов кристалла на один и тот же угол. Обменная симметрия кристалломагнетиков определяется заданием обменных пространственных групп, каждая из которых в качестве своих элементов содержит комбинации операции обращения времени  $R$  с чисто пространственными преобразованиями и вращениями  $U$  спинового пространства. Если в элементах обменной группы кристалломагнетика формально отождествить преобразования  $R$  и  $U$

с единичным преобразованием, получится обычная пространственная группа  $G$  кристалла, относительно которой плотность заряда и плотности всех спиновых скаляров в системе остаются инвариантными. Величина  $\mathbf{m}(\mathbf{x})$  ведет себя как вектор при вращениях в спиновом пространстве. Операция обращения времени соответствует инверсии вектора  $\mathbf{m}(\mathbf{x})$  в спиновом пространстве:

$$R\mathbf{m} = -\mathbf{m}.$$

Чтобы охарактеризовать равновесную обменную структуру магнетика, представим плотность магнитного момента  $\mathbf{m}(\mathbf{x})$  в форме разложения по полной системе функций  $\{\varphi_{\nu\alpha}^{(a)}(\mathbf{x})\}$ , которые являются базисными для неприводимых представлений пространственной группы  $G$ :

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}) = \sum_{a=1}^3 \sum_{\nu,\alpha} \mathbf{M}_{\nu\alpha}^{(a)} \varphi_{\nu\alpha}^{(a)}(\mathbf{x}). \quad (1.5.1)$$

Функции  $\varphi_{\nu\alpha}^{(a)}$  с данным  $a$  преобразуются по  $\nu$ -му неприводимому представлению группы  $G$ , индекс  $\alpha$  нумерует функции, принадлежащие этому представлению. Для каждого  $\nu$  возможно, вообще говоря, три набора независимых функций, нумеруемых индексом  $a$ . Ввиду вещественности  $\mathbf{m}(\mathbf{x})$ , коэффициенты разложения  $\mathbf{M}_{\nu\alpha}^{(a)}$  и функции  $\varphi_{\nu\alpha}^{(a)}(\mathbf{x})$  можно выбрать вещественными. Величины  $\mathbf{M}_{\nu\alpha}^{(a)}$  преобразуются как векторы при спиновых вращениях  $U$  и меняют знак при обращении времени  $R$ . Поскольку группа конечна, можно построить представление, в котором действие элемента симметрии  $g \in G$  на ту или иную функцию от координат  $\varphi_{\nu\alpha}^{(a)}(\mathbf{x})$  определяется выражением

$$\varphi_{\nu\alpha}^{(a)}(\mathbf{x}) \xrightarrow{g} \sum_{\beta} U_{\nu\beta\alpha}^{(a)}(g) \varphi_{\nu\beta}^{(a)}(\mathbf{x}),$$

где вещественные матрицы  $U_{\nu\beta\alpha}^{(a)}(g)$  удовлетворяют условиям ортогональности [47, 48] ( $n(G)$  — число элементов в группе  $G$ ,  $l_\nu$  — размерность  $\nu$ -го представления):

$$\sum_g U_{\nu\alpha\beta}^{(a)}(g) U_{\nu'\alpha'\beta'}^{(a')}(g) = \frac{n(G)}{l_\nu} \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\nu\nu'} \delta_{aa'} \delta_{\beta\beta'}. \quad (1.5.2)$$

Величина  $\mathbf{m}^2$  является спиновым скаляром: в равновесном состоянии кристалла она должна оставаться инвариантной относительно преобразований группы  $G$ . Вследствие условий ортогональности (1.5.2) это возможно только при выполнении равенств

$$(\mathbf{M}_{\nu\alpha}^{(a)} \cdot \mathbf{M}_{\nu'\alpha'}^{(a')}) = C(a, \nu) \delta_{aa'} \delta_{\nu\nu'} \delta_{\alpha\alpha'}. \quad (1.5.3)$$

Соотношения (1.5.3) показывают, что различные магнитные векторы  $\mathbf{M}_{\nu\alpha}^{(a)}$  перпендикулярны друг другу, причем те из них, которые

соответствуют одному неприводимому представлению, имеют одинаковую длину. Максимальное число взаимно ортогональных трехмерных векторов с данным  $\nu$  равно трем. Следовательно, размерность любого из неприводимых представлений не может быть больше трех.

Для дальнейшего анализа удобнее считать, что под действием элементов группы  $G$  преобразуются не функции  $\varphi_{\nu\alpha}^{(a)}$ , а сами магнитные векторы:

$$\mathbf{M}_{\nu\beta}^{(a)} \xrightarrow{g} \sum_{\alpha} U_{\nu\beta\alpha}^{(a)}(g) \mathbf{M}_{\nu\alpha}^{(a)}.$$

Магнитные векторы  $\mathbf{M}_{\nu\alpha}^{(a)}$ , преобразующиеся по неединичным представлениям группы  $G$ , не дают вклада в полную намагниченность среды, поэтому являются антиферромагнитными векторами. Изменением нормировки функций  $\varphi_{\nu\alpha}^{(a)}$  всегда можно добиться того, чтобы антиферромагнитные векторы имели единичную длину. Будем обозначать их как  $\mathbf{I}_a$  (индекс  $a$  теперь нумерует разные антиферромагнитные векторы и принимает не более трех значений  $a = 1, 2, 3$ ). Когда векторы  $\mathbf{M}_{\nu\alpha}^{(a)}$  преобразуются по единичному (тождественному) представлению группы  $G$ :  $\mathbf{M}_{\nu\alpha}^{(a)} \xrightarrow{g} \mathbf{M}_{\nu\alpha}^{(a)}$ , один из них подходящим ортогональным преобразованием и нормировкой функций  $\varphi_{\nu\alpha}^{(a)}$  можно сделать совпадающим со спонтанной намагниченностью среды  $\mathbf{M}$ . Остальные векторы единичного представления, если они имеются, являются антиферромагнитными и не вносят вклада в среднюю намагниченность кристалла.

Возможны всего четыре различных случая (рис. 1.4).

1. Существует один преобразующийся по единичному представлению магнитный вектор, который совпадает с равновесной намагниченностью кристалла  $\mathbf{M}$ . Кристалл является ферромагнетиком или коллинеарным ферримагнетиком.
2. Существует один вектор  $\mathbf{I}$ , преобразующийся по неединичному одномерному представлению, тело является коллинеарным антиферромагнетиком.
3. Существует вектор полной намагниченности среды  $\mathbf{M}$  и один или два ортогональных к нему антиферромагнитных вектора  $\mathbf{I}_a$  ( $a = 1$  или  $a = 1, 2$ ). Тело является неколлинеарным ферримагнетиком.
4. Существует два или три взаимно перпендикулярных вектора  $\mathbf{I}_a$ . Кристалл является неколлинеарным антиферромагнетиком.

Как известно, трансляционная симметрия кристалла описывается функциями вида

$$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}),$$

где  $\mathbf{k}$  — волновой вектор, функция  $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$  имеет периодичность решетки Браве кристалла. Нас интересуют только одно- двух- или трехмерные вещественные неприводимые представления группы  $G$ . Такие представления могут характеризоваться волновыми векторами, занимающими общее положение в обратной ячейке, лишь для кристаллов триклинной системы (в более симметричных кристаллах объединен-

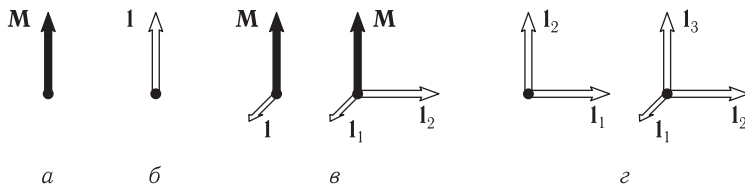


Рис. 1.4. Векторы ферромагнетизма (темная стрелка) и антиферромагнетизма (светлая стрелка) для разных магнитных кристаллов: а) ферромагнетик или коллинеарный ферримагнетик, б) коллинеарный антиферромагнетик, в) неколлинеарный ферримагнетик, г) неколлинеарный антиферромагнетик

ная звезда векторов  $\mathbf{k}$  и  $-\mathbf{k}$  содержит более трех векторов). В кристаллах моноклинной системы возможны представления с волновым вектором, занимающим общее положение в плоскости симметрии обратной решетки. Представления с волновым вектором, занимающим общее положение на оси симметрии, возможны для всех некубических кристаллов. В перечисленных случаях неприводимое представление группы  $G$  всегда двумерно [46], причем пара взаимно ортогональных векторов  $\mathbf{l}_1$  и  $\mathbf{l}_2$  преобразуется при трансляциях как пара функций  $\sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$  и  $\cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ . Тогда из разложения (1.5.1) следует, что плотность магнитного момента среды при трансляциях преобразуется как

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}) \sim \mathbf{l}_1 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + \mathbf{l}_2 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}).$$

Мы пришли к выводу, что в периодическом кристалле единственные обменные структуры, периоды которых несоизмеримы с периодами решетки, это геликоидальные магнитные структуры.

Не геликоидальные магнитные структуры теоретически описываются волновыми векторами, которые соответствуют выделенным точкам обратной решетки. В частности, если все отличные от нуля магнитные векторы преобразуются по представлению с  $\mathbf{k} = 0$ , магнитная и пространственная элементарные ячейки совпадают.

Реально наблюдаются не все возможные с точки зрения обменной симметрии магнитные структуры, а только те из них, которые удовлетворяют энергетическому критерию устойчивости. Например, наличие в разложении энергии системы инвариантного относительно преобразований группы  $G$  слагаемого

$$K_i^{ab} \left( \mathbf{l}_a \cdot \frac{\partial \mathbf{l}_b}{\partial x_i} - \mathbf{l}_b \cdot \frac{\partial \mathbf{l}_a}{\partial x_i} \right) \quad (1.5.4)$$

ведет к неустойчивости магнитной структуры, потому что при малых отклонениях векторов  $\mathbf{l}_a$  от их равновесных значений слагаемое (1.5.4) может принимать отрицательные значения.

В то же время важная особенность геликоидальных магнитных структур с волновыми векторами, занимающими общее положение в плоскости (на оси) симметрии обратной ячейки состоит в следующем. Инварианты (1.5.4) приводят к неустойчивостям структур лишь



в случае, когда выражение (1.5.4) содержит производную по пространственной координате вдоль направления, которое характеризуется волновым вектором, ортогональным плоскости (оси) симметрии обратной ячейки.

Инварианты типа (1.5.4) отсутствуют для представлений с волновыми векторами, компоненты которых равны  $1/2$ ,  $1/3$  или  $1/4$  периодов обратной решетки [46]. Это означает, что периоды магнитной ячейки в 2, 3 или 4 раза больше периодов пространственной ячейки (утроение магнитных периодов по сравнению с пространственными возможно только в гексагональных пространственных решетках, а учетверение — в кубических гранецентрированной и объемноцентрированной решетках).

Приведенная классификация обменных магнитных структур может быть распространена и на кристаллически неупорядоченные магнетики. Макроскопическая симметрия таких сред может быть охарактеризована с помощью мультипольных моментов [46]:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \langle \mathbf{m}(\mathbf{x}) \rangle, \\ \mathbf{M}_i &= \langle x_i \mathbf{m}(\mathbf{x}) \rangle, \\ \mathbf{M}_{ik} &= \left\langle \left( x_i x_k - \frac{1}{3} \delta_{ik} x_s^2 \right) \mathbf{m}(\mathbf{x}) \right\rangle, \\ &\dots, \end{aligned} \tag{1.5.5}$$

где  $\mathbf{m}(\mathbf{x})$  — квазиклассическая плотность магнитного момента, угловые скобки означают усреднение по всем конфигурациям неупорядоченной системы.

Обменная группа симметрии кристаллически неупорядоченной среды состоит из всех комбинаций пространственных вращений, инверсии, спиновых вращений  $U$  и преобразования обращения времени  $R$ , относительно которых отличные от нуля мультипольные моменты инвариантны. Группа  $G$  чисто пространственной симметрии среды получается из обменной группы путем формального отождествления элементов  $R$  и  $U$  с единичным преобразованием. Мультипольные моменты (1.5.5) преобразуются по неприводимым представлениям группы  $G$ . Поэтому можно использовать тот же самый феноменологический подход [46] для классификации обменных структур в неупорядоченных магнитных средах, а затем и для теоретического описания их нелинейной динамики.

### 1.5.2. Динамические симметрии, метод феноменологических лагранжианов для голдстоуновских частиц

Хорошо известно, что законы сохранения для системы полей тесно связаны с инвариантностью функции Лагранжа относительно преобразований, которые отражают алгебраическую симметрию задачи (теорема Нетер) [49]. Алгебраические симметрии реализуются на полевых переменных независимыми от градиентов полей линейными преобразованиями и потому оказываются не достаточными для выбора формы

записи гамильтониана системы или конкретизации функции Лагранжа. Явный вид функции Лагранжа может быть задан требованием ее инвариантности относительно более широкой группы преобразований, которая реализуется на полевых переменных неоднородно и нелинейно и характеризует так называемую динамическую симметрию задачи. Принципы динамической симметрии не могут быть выведены путем логических рассуждений, как подчеркивал Эйнштейн, к ним ведет «основанная на проникновении в суть опыта интуиция». Примером динамической симметрии может служить уже обсуждавшаяся нами гипотеза об инвариантности функции Лагранжа неупорядоченной среды относительно локальных калибровочных преобразований, которая отражает сохранение идеального кристаллического порядка в малых объемах среды. Более яркий пример плодотворного применения принципов динамической симметрии в теории магнетизма связан с построением феноменологических лагранжианов, описывающих нелинейную динамику спиновых волн с наименьшей энергией возбуждения. Прогресс в этом направлении связан с глубоким теоретико-групповым анализом следующего общего свойства магнитоупорядоченных состояний. Возникновение таких состояний всегда сопровождается явлением спонтанного нарушения симметрии обменных взаимодействий: гамильтониан обменных взаимодействий инвариантен относительно любого поворота всех атомных спинов кристалла на один и тот же угол, но никакая магнитная структура не является инвариантной относительно таких поворотов. Магнитные векторы  $\mathbf{M}_{\nu\alpha}^{(a)}$ , задающие равновесную обменную магнитную структуру, меняются при одновременном повороте спиновых моментов всех атомов кристалла на один и тот же угол. Зависящие от координат и времени локальные повороты спиновых моментов, изменяющие равновесные значения магнитных векторов  $\mathbf{M}_{\nu\alpha}^{(a)}$  структуры, представляют элементарные магнитные возбуждения системы. Вследствие близкодействующего характера обменных сил, энергия этих элементарных возбуждений — магнонов — обращается в нуль при импульсе, стремящемся к нулю. Последнее утверждение вытекает из общей теоремы Голдстоуна [50–52], которая формулируется следующим образом.

Пусть имеется непрерывная группа симметрии  $G$ , генераторы которой записаны в виде интегралов по всему пространству от локальных плотностей, а гамильтониан системы, обладающей короткодействующими силами, инвариантен относительно данной группы. Если основное (вакуумное) состояние системы не инвариантно относительно этой группы симметрии, то в спектре гамильтониана обязательно присутствует ветвь элементарных возбуждений, энергия которых стремится к нулю при стремлении к нулю импульса возбуждений.

С качественной точки зрения каждая равновесная магнитная структура выделяет одно из возможных вакуумных состояний магнетика и тем самым нарушает алгебраическую симметрию исходного микро-

гамильтониана системы относительно вращений в спиновом пространстве. Вследствие этого в системе появляются голдстоуновские возбуждения — магноны, стремящиеся восстановить нарушенную симметрию. Поскольку магноны являются голдстоуновскими квазичастицами, к ним применим универсальный теоретико-групповой метод описания нелинейной динамики голдстоуновских полей в системах со спонтанным нарушением симметрии вакуума, широко используемый в физике элементарных частиц [53–57]. В таком подходе трансформационные свойства голдстоуновских полей определяются посредством неоднородных нелинейных преобразований, которые учитывают динамическую симметрию задачи. В конечном счете метод дает явное выражение для функции Лагранжа голдстоуновских частиц, стремящихся восстановить симметрию первичных взаимодействий, спонтанно нарушенную появлением в системе не нулевых вакуумных средних. В то же время заметим, что внутренний механизм возникновения голдстоуновских частиц, так же как и механизм восстановления симметрии, остается вне области рассмотрения метода.

В рамках такого подхода были успешно описаны процессы с участием мягких пионов [57, 58], нейтрино появляется как голдстоуновский фермион в теории нелинейной реализации группы суперсимметрии [59], теория гравитации является теорией совместных нелинейных реализаций аффинной и конформной групп [60], теория калибровочных полей — теорией нелинейной реализации группы калибровочных преобразований [61].

Представляется важным распространение метода феноменологических лагранжианов на теоретическое описание нелинейных голдстоуновских возбуждений в физике конденсированного состояния. Обсудим вначале основные постулаты и математическую технику метода, а затем применим его для построения феноменологических лагранжианов спиновых волн.

Пусть  $G$  — непрерывная группа симметрии взаимодействий в системе — группа симметрии некоторого исходного лагранжиана, приводящего к вырождению вакуума и возникновению голдстоуновских частиц, и  $H$  — ее максимальная подгруппа, оставляющая вакуум инвариантным. Метод построения эффективного лагранжиана голдстоуновских частиц основан на следующих предположениях [55, 56]:

- 1) в длинноволновом пределе голдстоуновские частицы описываются локальными полями  $A(\mathbf{x}, t)$ , квантовые характеристики и трансформационные свойства которых определяются посредством однозначного соответствия этих полей параметрам  $a$  левых (правых) смежных классов группы  $G$  по подгруппе  $H$ .
- 2) эффективный лагранжиан взаимодействия голдстоуновских частиц инвариантен относительно преобразований группы  $G$ .

Далее мы покажем, что подгруппа  $H$  в рассматриваемом подходе является выделенной в том плане, что по отношению к ней симметрия лагранжиана остается алгебраической и характеризуется однородными

линейными представлениями при обсуждении трансформационных свойств полей. Поэтому преобразования подгруппы  $H$  не связаны с голдстоуновскими частицами.

С целью установить закон преобразования локальных голдстоуновских полей при операциях группы  $G$ , запишем произвольный элемент  $g$  группы в виде произведения:

$$g = K(a) H(b), \quad (1.5.6)$$

где  $H(b)$  — преобразование подгруппы  $H$ ,  $K(a)$  — представитель левого смежного класса  $G/H$  группы  $G$  по подгруппе  $H$ ,  $a$  и  $b$  — вещественные параметры группового пространства (в общем случае каждая из величин  $a$ ,  $b$  имеет конечное число компонент).

Элемент  $K(a) \in G$  после умножения его слева на любой элемент  $g_1 \in G$  переходит в некоторый элемент  $g'$  группы  $G$ , который вновь может быть разложен в соответствии с (1.5.6):

$$g_1 K(a) = g' = K(a') h(b'). \quad (1.5.7)$$

Согласно (1.5.7), под действием операции  $g_1 \in G$  координаты (параметры)  $a$  фактор-пространства  $G/H$  преобразуются по нелинейному закону

$$a \xrightarrow{g_1} a' = a'(a, g_1), \quad (1.5.8)$$

и это индуцирует левый сдвиг  $h(b')$  на группе симметрии вакуума системы с параметрами  $b'$ , зависящими от  $a$  и  $g_1$ :

$$b \xrightarrow{g_1} b' = b'(a, g_1). \quad (1.5.9)$$

Комбинируя (1.5.6), (1.5.7), имеем

$$g_1 g = K(a') h(b') H(b).$$

Для дальнейшего анализа важно, что при факторизации (1.5.6) преобразование (1.5.8) не содержит параметров  $b$ . Отметим также, что каждая конкретная параметризация элементов группы  $G$  соответствует определенному выбору координат  $a$  в фактор-пространстве  $G/H$ . Можно показать, что произвол в выборе систем координат в  $G/H$  не существен для описания взаимодействия голдстоуновских частиц.

В методе феноменологических лагранжианов каждому параметру  $a$  сопоставляется локальное голдстоуновское поле  $A(\mathbf{x}, t)$  так, что под действием операций группы  $G$  голдстоуновские поля преобразуются по закону

$$A(\mathbf{x}, t) \xrightarrow{g_1} A'(\mathbf{x}, t) = a'(A(\mathbf{x}, t), g_1). \quad (1.5.10)$$

Поля  $\Psi(\mathbf{x}, t)$ , не являющиеся голдстоуновскими, должны преобразовываться по линейным представлениям подгруппы  $H$ :

$$\Psi(\mathbf{x}, t) \xrightarrow{h(b')} \Psi'(\mathbf{x}, t) = D(h(b')) \Psi(\mathbf{x}, t). \quad (1.5.11)$$

Здесь  $D(h)$  — матрицы, которые осуществляют представление подгруппы  $H$  в пространстве функций  $\Psi$ . Используя представление (1.5.11) и закон преобразования (1.5.9) параметров подгруппы  $H$  под действием элементов группы  $G$ , можно построить так называемое индуцированное представление группы  $G$  в пространстве функций  $\Psi$ :

$$\Psi(\mathbf{x}, t) \xrightarrow{g_1} \Psi'(\mathbf{x}, t) = D\{h(b'(A, g_1))\} \Psi(\mathbf{x}, t). \quad (1.5.12)$$

Ясно, что преобразования на  $\Psi(\mathbf{x}, t)$  имеют смысл только вместе с преобразованиями на  $A(\mathbf{x}, t)$ , поскольку  $b'$  зависит от  $A$ . Соотношения (1.5.10), (1.5.12) определяют нелинейную реализацию группы  $G$  на локальных полях  $A$  и  $\Psi$  рассматриваемой физической системы.

При известных трансформационных свойствах функций  $A$  и  $\Psi$  построение феноменологического лагранжиана полей в длинноволновом приближении сводится к нахождению инвариантов преобразований группы  $G$ , содержащих минимальное число производных от локальных полей  $A(\mathbf{x}, t)$ . Неоднородность преобразований (1.5.10) приводит к важному следствию: не существует инвариантов, составленных только из голдстоуновских полей  $A(\mathbf{x}, t)$  и не содержащих производных этих полей. Это, в частности, означает, что феноменологический лагранжиан голдстоуновских частиц не имеет массового члена.

В качестве иллюстрации метода рассмотрим конкретный пример [57].

Пусть группа симметрии  $G$  первичных взаимодействий в системе определяется генераторами  $X_l$  ( $l = 1, 2, \dots, n$ ) и  $Y_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, m$ ), причем только генераторы  $Y_\alpha$  подгруппы  $H$  удовлетворяют соотношениям  $Y_\alpha|0\rangle = |0\rangle$ , где кет-вектор  $|0\rangle$  описывает вакуумное состояние системы. Это означает, что  $H$  — группа стабильности вакуума. Коммутационные соотношения алгебры группы  $G$  имеют вид

$$[X_l, X_m] = i C_{lm}^\alpha Y_\alpha, \quad [X_l, Y_\alpha] = i C_{l\alpha}^m X_m, \quad [Y_\alpha, Y_\beta] = i C_{\alpha\beta}^\gamma Y_\gamma. \quad (1.5.13)$$

Структурные постоянные  $C_{lm}^\alpha$ ,  $C_{l\alpha}^m$ ,  $C_{\alpha\beta}^\gamma$  антисимметричны при перестановке нижних индексов и связаны между собой равенствами, которые следуют из (1.5.13) и тождеств Якоби. В некоторой окрестности единичного элемента группы  $G$  любой элемент  $g \in G$  единственным образом разлагается в произведение

$$g = \exp(ia^l X_l) \exp(ib^\alpha Y_\alpha),$$

где  $a^l$ ,  $b^\alpha$  — вещественные параметры. Совокупность элементов  $K(a) = \exp(ia^l X_l)$  образует фактор-пространство  $G/H$ , а совокупность элементов  $\exp(ib^\alpha Y_\alpha)$  — подгруппу  $H(b)$ .

Конкретный вид формул (1.5.10), (1.5.12), определяющих нелинейную реализацию группы  $G$  на голдстоуновских полях  $A^l(\mathbf{x}, t)$  системы и на полях  $\Psi(\mathbf{x}, t)$ , не являющихся голдстоуновскими, выведем из (1.5.7) при учете алгебры коммутаторов (1.5.13).

В частности, при  $g_1 = h = \exp(i b^\alpha Y_\alpha) \in H$  левую часть соотношения (1.5.7) можно записать в виде

$$h \exp(i a^l X_l) = (h \exp(i a^l X_l) h^{-1}) h. \quad (1.5.14)$$

Дальнейшие расчеты упрощает искусственный прием. Введем вспомогательную операторную функцию от параметра  $s$ :

$$F(s) = h \exp(i a^l X_l s) h^{-1},$$

которая является решением дифференциального уравнения

$$\frac{dF}{ds} = i a^l h X_l h^{-1} F(s) \quad (1.5.15)$$

с начальным условием  $F(s=0) = I$ . Если мы найдем  $F(s)$ , то вычислим и произведение операторов в (1.5.14):

$$F(s=1) = h \exp(i a^l X_l) h^{-1}.$$

Используя тождество

$$e^A B e^{-A} = B + \frac{1}{1!}[A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \dots, \quad (1.5.16)$$

справедливое для любых операторов  $A$  и  $B$ , и перестановочные соотношения (1.5.13), нетрудно показать, что

$$h X_l h^{-1} = X_p S(h)_l^p, \quad (1.5.17)$$

где  $S(h)$  — матрица  $n \times n$ , зависящая от параметров  $b^\alpha$ :

$$S_l^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (P^n)_l^k = (\exp P)_l^k, \quad (1.5.18)$$

где  $P_l^k = C_{l\alpha}^k b^\alpha$ ,  $(P^2)_l^k = P_s^k P_l^s$  и т. д. Принимая во внимание формулу (1.5.17), уравнение (1.5.15) можно проинтегрировать:

$$F(s) = \exp(i X_m S_l^m a^l s).$$

В результате находим:

$$F(s=1) = h \exp(i a^l X_l) h^{-1} = \exp(i X_m S_l^m a^l).$$

Это означает, что представление (1.5.14) дает требуемую факторизацию (1.5.7):

$$h \exp(i a^l X_l) = \exp(i a^l S_l^m(h) X_m) \exp(i b^\alpha Y_\alpha).$$

Отсюда определяется закон преобразования локальных полей:

$$A^m(\mathbf{x}, t) \xrightarrow{h} S_l^m(h) A^l(\mathbf{x}, t), \quad \Psi(\mathbf{x}, t) \xrightarrow{h} D(h) \Psi(\mathbf{x}, t).$$

Здесь  $h = \exp(i b^\alpha Y_\alpha)$ , причем  $b^\alpha$  не зависит от  $A^l$ .

Таким образом, мы показали, что подгруппа  $H$  реализуется на всех полях однородно и линейно и, тем самым, описывает алгебраическую симметрию задачи.

Когда  $g_1 \notin H$ , трансформационные свойства локальных полей значительно сложнее, поэтому ограничимся рассмотрением инфинитезимальных преобразований с  $g_1 = I + i\varepsilon^l X_l$  ( $|\varepsilon^l| \ll 1$ ). Тогда (1.5.7) приобретает вид

$$(I + i\varepsilon^l X_l) \exp(i a^l X_l) = \exp(i (a^l + \delta a^l) X_l) \exp(i \delta b^\alpha Y_\alpha). \quad (1.5.19)$$

Найдем явный вид параметров  $\delta a^l$  и  $\delta b^\alpha$ . Поскольку  $\delta a^l \delta b^\alpha = O(\varepsilon^l)$ , для сопоставления по порядку величины членов в уравнении (1.5.19) в правой части (1.5.19) необходимо разложить экспоненциальные функции от некоммутирующих операторов в ряд с точностью до линейных слагаемых по параметрам  $\delta a^l$  и  $\delta b^\alpha$ .

Получим вначале разложение операторной функции

$$\exp(i (a^l + \delta a^l) X_l).$$

Для достижения этой цели также полезно ввести вспомогательную операторную функцию от параметра  $s$ :

$$F(s) = \exp(i (a^l + \delta a^l) X_l s), \quad (1.5.20)$$

которая является решением дифференциального уравнения

$$\frac{dF}{ds} = i (a^l + \delta a^l) X_l F \quad (1.5.21)$$

с начальным условием  $F(s=0) = I$ . Представим  $F(s)$  в виде

$$F(s) = \exp(i a^l X_l s) F_1(s).$$

Тогда из (1.5.21) находим, что новая операторная функция  $F_1(s)$  будет решением задачи:

$$\frac{dF_1}{ds} = i \delta a^k X_k(s) F_1, \quad F_1(s=0) = I, \quad (1.5.22)$$

где

$$X_k(s) = \exp(-i a^l X_l s) X_k \exp(i a^p X_p s).$$

Интегрируя (1.5.22), находим

$$F_1(s) = I + i \delta a^k \int_0^s X_k(s') F_1(s') ds'. \quad (1.5.23)$$

Решение интегрального уравнения (1.5.23) можно получить методом последовательных итераций в форме ряда по степеням  $\delta a^k$ . С точностью до членов, линейных по  $\delta a^l$ , имеем

$$F_1(s) = I + i \delta a^k \int_0^s X_k(s') ds'.$$

В результате находим  $F(s)$ , а значит, и требуемое разложение правой части равенства (1.5.20):

$$\begin{aligned} F(s=1) &= \exp(i(a^l + \delta a^l)X_l) = \\ &= \exp(i a^l X_l) \left[ I + i \delta a^k \int_0^1 X_k(s) ds + \dots \right]. \end{aligned} \quad (1.5.24)$$

Разложение второй экспоненциальной функции тривиально:

$$\exp(i \delta b^\alpha Y_\alpha) = I + i \delta b^\alpha Y_\alpha + \dots \quad (1.5.25)$$

Подставляя (1.5.24), (1.5.25) в (1.5.19) и приравнявая члены одного порядка малости, приводим уравнение (1.5.19) к виду

$$\varepsilon^l X_l(s=1) = \delta a^k \int_0^1 X_k(s) ds + \delta b^\alpha Y_\alpha. \quad (1.5.26)$$

Чтобы продвинуться дальше, заметим, что при дифференцировании операторной функции  $X_k(s)$  по параметру  $s$  появляется новая  $Y_\alpha(s)$ :

$$Y_\alpha(s) = \exp(-i a^l X_l s) Y_\alpha \exp(i a^p X_p s).$$

Однако дифференцирование  $Y_\alpha(s)$  по  $s$  вновь дает  $X_l(s)$ . В результате получаем замкнутую систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dX_k(s)}{ds} = -C_{kp}^\alpha a^p Y_\alpha(s), \quad \frac{dY_\alpha(s)}{ds} = -C_{\alpha p}^l a^p X_l(s)$$

с начальными условиями:

$$X_k(s=0) = X_k, \quad Y_\alpha(s=0) = Y_\alpha,$$

которая эквивалентна следующей задаче для определения  $X_k(s)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X_k(s)}{ds^2} &= -m_k^l X_l(s); \\ \frac{dX_k(s)}{ds} \Big|_{s=0} &= -C_{kp}^\alpha a^p Y_\alpha, \quad X_k(s) \Big|_{s=0} = X_k, \end{aligned} \quad (1.5.27)$$



где  $m_k^l = -C_{kp}^\alpha C_{\alpha s}^l a^p a^s$ . Явный вид  $X_k(s)$  может быть найден из (1.5.27) в форме ряда, соответствующего символической записи:

$$X_k(s) = (\cos \sqrt{m} s)_k^p X_p - \left( \frac{\sin \sqrt{m} s}{\sqrt{m}} \right)_k^l C_{lp}^\alpha a^p Y_\alpha. \quad (1.5.28)$$

Подставляя (1.5.28) в уравнение (1.5.26) и приравнявая коэффициенты при одинаковых генераторах, получаем необходимые формулы инфинитезимального преобразования:

$$\delta a^k = (\sqrt{m} \operatorname{ctg} \sqrt{m})_i^k \varepsilon^i, \\ \delta b^\alpha = - \left( [\sin \sqrt{m} + (\cos \sqrt{m} - 1) \operatorname{ctg} \sqrt{m}] \frac{1}{\sqrt{m}} \right)_i^l C_{lp}^\alpha a^p \varepsilon^i.$$

Для построения феноменологического лагранжиана необходимо знать ковариантные производные от полей  $A^l$  и  $\Psi$  по пространственным координатам  $\mathbf{x}$  и времени  $t$ . Далее, для упрощения записи, удобно ввести четырехвектор

$$x^\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, 3); \quad \mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3), \quad t = x^0.$$

Ковариантные производные от полей  $A^l$  и  $\Psi$  связаны с дифференциальными формами Картана  $\omega^l(A, \partial_\mu A)$  и  $\theta^\alpha(A, \partial_\mu A)$  [55–57], которые определим соотношениями

$$K^{-1} \partial_\mu K = i \omega^l(A, \partial_\mu A) X_l + i \theta^\alpha(A, \partial_\mu A) Y_\alpha, \quad (1.5.29)$$

где  $K = \exp(i A^l X_l)$ , и от координат  $x^\mu$  зависят только поля  $A^l$ .

Покажем, что специфическая форма левой части уравнения (1.5.29) и условия совместности производных  $\partial_\mu \partial_\nu K = \partial_\nu \partial_\mu K$  дают уравнения, конкретизирующие структуру функций  $\omega^l$  и  $\theta^\alpha$ . Для этого оказываются полезными тождества:

$$\begin{aligned} \partial_\nu K^{-1} &= -K^{-1} (\partial_\nu K) K^{-1}, \\ (K^{-1} \partial_\nu K) (K^{-1} \partial_\mu K) - (K^{-1} \partial_\mu K) (K^{-1} \partial_\nu K) &= \\ &= i [(\theta^\alpha(A, \partial_\mu A) \omega^s(A, \partial_\nu A) - \theta^\alpha(A, \partial_\nu A) \omega^s(A, \partial_\mu A)) \times \\ &\quad \times C_{\alpha s}^l X_l + (\omega^k(A, \partial_\mu A) \omega^s(A, \partial_\nu A) C_{ks}^\alpha + \\ &\quad + \theta^\gamma(A, \partial_\mu A) \theta^\beta(A, \partial_\nu A) C_{\gamma\beta}^\alpha) Y_\alpha]. \end{aligned} \quad (1.5.30)$$

Первое из них получено дифференцированием равенства  $K^{-1} K = I$ , второе — следствие формул (1.5.13), (1.5.29). Учитывая (1.5.30), диф-

ференцированием соотношений (1.5.29) нетрудно получить условия интегрируемости Мауэра–Картана:

$$\begin{aligned} & \partial_\nu \omega^l(A, \partial_\mu A) - \partial_\mu \omega^l(A, \partial_\nu A) + [\theta^\alpha(A, \partial_\mu A) \omega^s(A, \partial_\nu A) - \\ & - \theta^\alpha(A, \partial_\nu A) \omega^s(A, \partial_\mu A)] C_{\alpha s}^l = 0, \\ & \partial_\nu \theta^\alpha(A, \partial_\mu A) - \partial_\mu \theta^\alpha(A, \partial_\nu A) + \omega^k(A, \partial_\mu A) \omega^s(A, \partial_\nu A) C_{ks}^\alpha + \\ & + \theta^\gamma(A, \partial_\mu A) \theta^\beta(A, \partial_\nu A) C_{\gamma\beta}^\alpha = 0, \end{aligned}$$

которые необходимы и достаточны для того, чтобы поле  $K$  можно было восстановить по полю  $K^{-1} \partial_\mu K$ .

Представления для форм Картана  $\omega^l$ ,  $\theta^\alpha$  через голдстоуновские поля  $A^l$  найдем с помощью приема, аналогичного уже рассмотренным. Введем в (1.5.29) параметр  $s$  с помощью замены  $A^l \rightarrow s A^l$ :

$$\begin{aligned} \exp(-i A^l X_l s) \partial_\mu \exp(i A^k X_k s) = \\ = i \omega^l(s A, s \partial_\mu A) X_l + i \theta^\alpha(s A, s \partial_\mu A) Y_\alpha. \end{aligned} \quad (1.5.31)$$

Дифференцируя по  $s$  левую и правую части равенства (1.5.31), используя коммутационные соотношения (1.5.13) и приравнявая коэффициенты при одинаковых генераторах, получим замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для вычисления функций  $\omega^l(s A, s \partial_\mu A)$ ,  $\theta^\alpha(s A, s \partial_\mu A)$ :

$$\frac{d\omega^l}{ds} = \partial_\mu A^l + A^p \theta^\beta C_{p\beta}^l, \quad \frac{d\theta^\beta}{ds} = A^k \omega^p C_{kp}^\beta. \quad (1.5.32)$$

Согласно (1.5.31) системе (1.5.32) соответствуют следующие начальные условия:

$$\omega^l(s A, s \partial_\mu A)|_{s=0} = 0, \quad \theta^\alpha(s A, s \partial_\mu A)|_{s=0} = 0. \quad (1.5.33)$$

Формы Картана (1.5.29) совпадают со значениями решений задачи (1.5.32), (1.5.33) при  $s = 1$ . Приведем окончательный результат:

$$\begin{aligned} \omega^l(A, \partial_\mu A) &= \left( \frac{\sin \sqrt{m}}{\sqrt{m}} \right)_p^l \partial_\mu A^p, \\ \theta^\beta(A, \partial_\mu A) &= \left( \frac{1 - \cos \sqrt{m}}{\sqrt{m}} \right)_s^p \partial_\mu A^s C_{kp}^\beta A^k. \end{aligned} \quad (1.5.34)$$

Найдем трансформационные свойства форм Картана при операциях группы  $G$ . Как мы уже обсуждали, под действием операции  $g \in G$  элемент фактор-пространства  $K(A) = \exp(i A^l X_l)$  изменяется и результат может быть представлен в форме

$$g K(A) = K(A') h(b). \quad (1.5.35)$$

Здесь  $K(A') = \exp(i A'^s(A, g) X_s)$ ,  $h(b) = \exp(i b^\alpha(A, g) Y_\alpha)$ , величины  $A^l$  являются функциями от переменных  $x^\mu$ . Вычислим производную

по  $x^\mu$  от левой и правой частей равенства (1.5.35). Поскольку  $g$ ,  $X_l$ ,  $Y_\alpha$  не зависят от  $x^\mu$ , имеем

$$g \partial_\mu K(A) = \partial_\mu K(A') h(b) + K(A') \partial_\mu h(b). \quad (1.5.36)$$

Комбинируя соотношение

$$[g K(A)]^{-1} = K^{-1}(A) g^{-1} = h^{-1}(b) K^{-1}(A')$$

с формулой (1.5.36), находим

$$\begin{aligned} K^{-1}(A) \partial_\mu K(A) &= \\ &= h^{-1}(b) (K^{-1}(A') \partial_\mu K(A')) h(b) + h^{-1}(b) \partial_\mu h(b). \end{aligned} \quad (1.5.37)$$

Используя (1.5.29), перейдем в (1.5.37) к формам Картана и выразим преобразованные формы Картана через исходные:

$$\begin{aligned} \omega^l(A', \partial_\mu A') X_l + \theta^\alpha(A', \partial_\mu A') Y_\alpha &= h(b) [\omega^s(A, \partial_\mu A) X_s + \\ &+ \theta^\beta(A, \partial_\mu A) Y_\beta] h^{-1}(b) + h(b) \partial_\mu h^{-1}(b). \end{aligned}$$

С помощью тождества (1.5.16) и коммутационных соотношений (1.5.13) нетрудно убедиться в справедливости разбиения (приравниваем слагаемые линейные по генераторам  $X_n$  и  $Y_\alpha$  соответственно):

$$\omega^l(A', \partial_\mu A') X_l = h(b) X_s h^{-1}(b) \omega^s(A, \partial_\mu A), \quad (1.5.38)$$

$$\begin{aligned} \theta^\alpha(A', \partial_\mu A') Y_\alpha &= h(b) Y_\beta h^{-1}(b) \theta^\beta(A, \partial_\mu A) + \\ &+ h(b) \partial_\mu h^{-1}(b). \end{aligned} \quad (1.5.39)$$

Из (1.5.38) заключаем, что формы  $\omega^l$  под действием операций  $g \in G$  преобразуются по уже введенному ранее представлению подгруппы  $H$  (1.5.17) с параметрами  $b^\alpha$ , зависящими в общем случае от голдстоуновских полей:

$$\omega^l(A, \partial_\mu A) \xrightarrow{g} S(h)_k^l \omega^k(A, \partial_\mu A), \quad h = \exp(i b^\alpha(A, g) Y_\alpha). \quad (1.5.40)$$

Заметим также, что в общем случае операторы  $Y_\alpha$  и  $h(b)$  не заданы на пространстве функций  $\Psi(\mathbf{x}, t)$ . Поэтому для выявления трансформационных свойств производных от полей  $\Psi$  следует перейти от соотношения (1.5.39) к его реализации на функциях  $\Psi$ :

$$\begin{aligned} \theta^\alpha(A', \partial_\mu A') \lambda_\alpha &= D(h) \lambda_\beta D^{-1}(h) \theta^\beta(A, \partial_\mu A) + \\ &+ D(h) \partial_\mu D^{-1}(h). \end{aligned} \quad (1.5.41)$$

Здесь  $\lambda_\alpha$  — необходимое представление генераторов  $Y_\alpha$ , а  $D(h)$  — уже обсуждавшиеся ранее матрицы линейного представления подгруппы  $H$  на локальных полях  $\Psi$ . С помощью этих матриц строится индуцированное представление группы  $G$  на тех же полях:

$$\Psi \rightarrow D(h) \Psi, \quad h = \exp(i b^\alpha(A, g) Y_\alpha).$$

Ковариантные производные локальных полей  $A^l$  и  $\Psi$  определим соотношениями

$$D_\mu A^l = \omega^l(A, \partial_\mu A), \quad \nabla_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi + \theta^\beta(A, \partial_\mu A) \lambda_\beta \Psi. \quad (1.5.42)$$

Используя формулы преобразования форм Картана (1.5.40), (1.5.41), нетрудно убедиться, что при операциях группы  $G$  ковариантные производные (1.5.42) преобразуются по линейным представлениям подгруппы  $H$

$$D_\mu A^l \xrightarrow{g} S_k^l(h) D_\mu A^k, \quad \nabla_\mu \Psi \xrightarrow{g} D(h) \nabla_\mu \Psi,$$

где  $h = \exp(i b^\alpha(A, g) Y_\alpha)$  — элемент подгруппы  $H$  с параметрами  $b^\alpha$ , нетривиально зависящими как от конкретной операции  $g \in G$ , так и от голдстоуновских полей  $A^l$ .

Отсюда следует важный вывод: инвариантность лагранжиана  $L(\Psi, \nabla_\mu \Psi, D_\mu A^l)$  относительно подгруппы  $H$  необходима и достаточна для инвариантности  $L$  относительно всей группы  $G$ .

Можно сформулировать простые рабочие правила для построения феноменологических лагранжианов голдстоуновских частиц в любых физических системах со спонтанным нарушением симметрии.

1. В инвариантном относительно подгруппы лагранжиане свободных полей  $\Psi$ , не являющихся голдстоуновскими, обычные производные полей  $\Psi$  заменяются на ковариантные. Полученный в результате замены лагранжиан инвариантен относительно группы  $G$  и описывает взаимодействие полей с голдстоуновскими частицами.
2. К такому лагранжиану добавляется лагранжиан свободных голдстоуновских полей, который представляет инвариантное выражение из ковариантных производных  $D_\mu A^l$ .

В длинноволновом приближении при построении лагранжиана свободных голдстоуновских частиц достаточно ограничиться инвариантами, содержащими минимальное число производных от полей  $A^l$  по пространственным координатам  $\mathbf{x}$  и времени  $t$ .

В рассмотренном примере справедливо тождество

$$S_k^m g_{mr}(0) S_n^r = g_{kn}(0), \quad (1.5.43)$$

где  $g_{mr}(0) = C_{ml}^\rho C_{\rho r}^l$ , и потому минимальные взаимодействия голдстоуновских частиц теоретически описываются инвариантами

$$g_{ij}(0) \omega^i(A, \partial_\mu A) \omega^j(A, \partial_\mu A).$$

Формула (1.5.43) является следствием алгебраической структуры матриц  $S_n^k$  (1.5.18) и более простых соотношений

$$P_k^m g_{mn} = -g_{km} P_n^m, \quad C_{k\sigma}^m C_{ml}^\rho C_{\rho n}^l + C_{kl}^\gamma C_{\gamma m}^l C_{n\sigma}^m = 0. \quad (1.5.44)$$

Чтобы убедиться в справедливости (1.5.44), отметим, что тождества Якоби для генераторов группы  $G$

$$\begin{aligned} [X_l [X_k, Y_\sigma]] + [X_k [Y_\sigma, X_l]] + [Y_\sigma [X_l, X_k]] &= 0, \\ [Y_\sigma [Y_\gamma, X_n]] + [Y_\gamma [X_n, Y_\sigma]] + [X_n [Y_\sigma, Y_\gamma]] &= 0 \end{aligned}$$

дают важные ограничения на структурные постоянные группы

$$\begin{aligned} C_{k\sigma}^m C_{lm}^\rho + C_{\sigma l}^m C_{km}^\rho + C_{lk}^\gamma C_{\sigma\gamma}^\rho &= 0, \\ C_{\gamma n}^m C_{\sigma m}^l + C_{n\sigma}^m C_{\gamma m}^l + C_{\sigma\gamma}^\rho C_{n\rho}^l &= 0. \end{aligned} \quad (1.5.45)$$

Умножим первое из равенств (1.5.45) на  $C_{\rho n}^l$ , просуммируем результат по индексам  $l, \rho$  и воспользуемся вторым равенством. В результате получим тождество (1.5.44)

$$C_{k\sigma}^m C_{ml}^\rho C_{\rho n}^l + C_{kl}^\gamma C_{\gamma m}^l C_{n\sigma}^m = C_{km}^\rho C_{\sigma l}^m C_{\rho n}^l - C_{kl}^\gamma C_{\sigma m}^l C_{\gamma n}^m = 0.$$

Существует глубокая связь изложенного формализма с понятием дифференциальной геометрии. Определим метрику  $g_{ij}(A)$  фактор-пространства  $G/H$  соотношением

$$g_{ij}(A) dA^i dA^j = g_{sp}(0) \omega^s(A, dA) \omega^p(A, dA). \quad (1.5.46)$$

Здесь

$$\omega^i(A, dA) = \omega^i(A, \partial_\mu A) dx^\mu, \quad dA^l = \partial_\mu A^l dx^\mu.$$

Из (1.5.46), (1.5.34) находим

$$g_{ij}(A) = \left( \frac{\sin \sqrt{m}}{\sqrt{m}} \right)_i^s g_{sk}(0) \left( \frac{\sin \sqrt{m}}{\sqrt{m}} \right)_j^k. \quad (1.5.47)$$

Наличие метрики  $g_{ij}(A)$  позволяет ввести в групповом пространстве понятие подвижного ортогонального репера. При этом формы  $\omega^i(A, dA)$  можно трактовать как компоненты бесконечно малого смещения начала репера из точки с локальными координатами  $A^l$  в соседнюю точку группового пространства. Формы

$$\omega_k^i(A, dA) = C_{k\beta}^i \theta^\beta(A, \partial_\mu A) dx^\mu$$

определяют поворот базисных векторов смещенного репера в точке с координатами  $A^l$ . При такой интерпретации уравнения Мауэра–Картана задают структуру  $n$ -мерного риманова пространства с нулевым кручением, но ненулевой кривизной [57]. Преобразования подгруппы  $H$  оставляют неподвижным начало координат группового пространства, и поэтому соответствуют вращениям в групповом пространстве, а преобразования  $g \notin H$  отвечают сдвигам вместе с вращениями. С этой точки зрения введенное нами определение ковариантного дифференциала  $\nabla_\mu \Psi dx^\mu$  совпадает с обычным определением абсолютного дифференциала в римановых пространствах и пространствах аффинной связности.

## 1.6. Феноменологические лагранжианы нелинейной динамики голдстоуновских спиновых волн

*Мне всегда казалось странным, что самые фундаментальные законы физики после того, как они уже открыты, все-таки допускают такое невероятное многообразие формулировок, по первому впечатлению неэквивалентных и все же таких, что после определенных математических манипуляций между ними всегда удается найти взаимосвязь. Мне думается, что здесь каким-то образом отражается простота природы. Может быть, вещь проста только тогда, когда ее можно исчерпывающим образом охарактеризовать несколькими различными способами, еще не зная, что на самом деле ты говоришь об одном и том же.*

*Р. Фейнман*

В этом разделе мы покажем, как использование концепции спонтанного нарушения  $SO(3)$ -симметрии обменных взаимодействий позволяет строить феноменологические лагранжианы спиновых волн в магнетиках. Следствием спонтанного нарушения высокой симметрии является появление голдстоуновских полей. В основе метода феноменологических лагранжианов лежит реализация спонтанного нарушения симметрии нелинейными преобразованиями (так называемые нелинейные реализации  $SO(3)$ -симметрии) голдстоуновских полей. В длинноволновом пределе подход дает корректное описание спектра голдстоуновских спиновых волн и всех возможных их нелинейных взаимодействий. В зависимости от подгруппы инвариантности основного состояния магнетика в спектре возбуждений имеется одна, две или три голдстоуновские ветви спиновых волн. Для двух первых случаев подгруппой инвариантности основного состояния будет группа  $SO(2)$ , и эти случаи соответствуют простым ферро- и антиферромагнетикам. Малые отклонения от основного состояния в таких спиновых системах описываются двумя углами (координатами фактор-пространства  $SO(3)/SO(2)$ ), которые соответствуют одной или двум ветвям спектра спиновых возбуждений в зависимости от того, содержат ли уравнения динамики производные по времени первого или второго порядка. Три ветви спиновых волн появляются в случае максимального нарушения симметрии основного состояния магнетика, когда подгруппой его инвариантности является только тождественное преобразование. В этом случае локальные отклонения от равновесного состояния магнетика описываются тремя углами (параметрами группы  $SO(3)$ ), зависимость

которых от пространственных координат и времени конкретизирует динамику голдстоуновских мод.

Следуя [41–43], построим наиболее общее выражение для феноменологического лагранжиана спиновых волн, инвариантное относительно преобразований группы  $SO(3)$ -симметрии обменных взаимодействий, когда основное состояние магнетика инвариантно только относительно тождественного преобразования группы  $SO(3)$ .

Как известно, группа  $SO(3)$  состоит из  $3 \times 3$  ортогональных матриц  $D$  с определителем, равным единице:

$$D_{sk} D_{pk} = D_{ks} D_{kp} = \delta_{sp}, \quad \det D = 1. \quad (1.6.1)$$

Последнее из равенств (1.6.1) предполагает, что

$$\varepsilon_{ijk} D_{is} D_{jp} D_{kq} = \varepsilon_{spq}, \quad (1.6.2)$$

где  $\varepsilon_{spq}$  — абсолютно антисимметричный единичный тензор ( $\varepsilon_{123} = 1$ ); индексы, обозначенные латинскими буквами, принимают значения 1, 2, 3. При конкретных расчетах оказываются полезными тождества:

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ksp} = \delta_{is} \delta_{jp} - \delta_{ip} \delta_{js}, \quad \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jkp} = 2 \delta_{ip}. \quad (1.6.3)$$

Для дальнейшего анализа удобна параметризация матриц  $D$  углами Эйлера  $\theta, \varphi, \psi$  [62]:

$$D = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi & -\sin \psi \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi \cos \psi & \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi \sin \psi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi & -\sin \theta \cos \varphi \\ \sin \psi \sin \theta & \cos \psi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (1.6.4)$$

Введем обозначения:

$$A_1 = \theta, \quad A_2 = \varphi, \quad A_3 = \psi,$$

тогда  $D_{ij} = D_{ij}(A)$ . Определим преобразования группы  $SO(3)$  посредством левых сдвигов на группе:

$$D(A) \xrightarrow{D_0} D_0 D(A) = D(A'(A, D_0)), \quad (1.6.5)$$

где  $D_0$  — произвольный элемент группы  $SO(3)$ . Согласно общей схеме метода феноменологических лагранжианов трансформационные свойства голдстоуновских полей магнонов  $A_k(\mathbf{x}, t)$  ( $k = 1, 2, 3$ ) определяются посредством однозначного сопоставления этих полей параметрам группы  $SO(3)$ , так что для локальных полей  $A_k(\mathbf{x}, t)$  выполняется закон преобразования

$$A_k(\mathbf{x}, t) \xrightarrow{D_0} A'_k(A, D_0). \quad (1.6.6)$$

Как следствие первого из равенств (1.6.1), произведение  $D_{ks} \partial_\mu D_{kp}$  антисимметрично относительно перестановки индексов  $s, p$ . Выразим это посредством соотношения

$$D_{ks} \partial_\mu D_{kp} = -\varepsilon_{spn} \omega_n(A, \partial_\mu A). \quad (1.6.7)$$

Здесь  $\mu = 0, 1, 2, 3$ ,  $x_0 = t$  — время,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  — пространственные координаты,  $\partial_\mu = \partial/\partial x_\mu$ . Далее, если специально не оговорено, мы не различаем верхние и нижние индексы. Матрицы  $(J_n)_{sp} = -i\varepsilon_{spn}$  реализуют алгебру генераторов группы  $SO(3)$  с коммутационными соотношениями

$$[J_s, J_p] = i\varepsilon_{spk}J_k. \quad (1.6.8)$$

Равенство (1.6.7), которое можно переписать в форме

$$D^{-1}\partial_\mu D = -i\omega_s(A, \partial_\mu A)J_s, \quad (1.6.9)$$

показывает, что величины  $\omega_s$  совпадают с левыми формами Картана.

Формы Картана являются инвариантами относительно преобразования (1.6.6):

$$\begin{aligned} -i\omega_s(A', \partial_\mu A')J_s &= D^{-1}(A')\partial_\mu D(A') = \\ &= [D_0 D(A)]^{-1}\partial_\mu [D_0 D(A)] = D^{-1}(A)D_0^{-1}D_0\partial_\mu D(A) = \\ &= D^{-1}(A)\partial_\mu D(A) = -i\omega_s(A, \partial_\mu A)J_s. \end{aligned}$$

Как и в предыдущем разделе, нетрудно показать, что форма записи левой части равенства (1.6.9) и перестановочные соотношения (1.6.8) приводят к уравнениям Мауэра–Картана, которые конкретизируют структуру функций  $\omega_s$ :

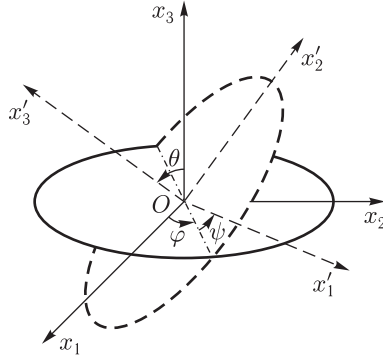
$$\begin{aligned} \partial_\nu \omega_s(A, \partial_\mu A) - \partial_\mu \omega_s(A, \partial_\nu A) + \\ + \varepsilon_{snp}\omega_n(A, \partial_\nu A)\omega_p(A, \partial_\mu A) = 0. \end{aligned} \quad (1.6.10)$$

Из (1.6.9) с помощью (1.6.3) находим:

$$\omega_n(A, \partial_\mu A) = -\frac{1}{2}\varepsilon_{nsp}D_{ks}\partial_\mu D_{kp}. \quad (1.6.11)$$

Во избежание утомительных расчетов, связанных с вычислением форм Картана (1.6.11) в терминах полей  $A_l$ , воспользуемся механической аналогией. Функции  $\omega_s(A, \partial_\mu A)$  линейны по производным  $\partial_\mu A_l$ , причем при фиксированном  $s$  коэффициенты при производных с одинаковыми  $l$ , но различными  $\mu$  одни и те же у всех форм Картана. Если вычислить три функции  $\omega_s(A, \partial_\mu A)$ , то будут найдены и все остальные. Явный вид величины  $\omega_s(A, \partial_\mu A)$  нетрудно получить, заметив, что их математическое определение (1.6.7), (1.6.11) совпадает с определением компонент  $\omega_s$  вектора угловой скорости вращения твердого тела вокруг неподвижной точки в декартовой системе координат, оси которой жестко связаны с телом, а начало системы координат помещено в центр вращения тела [63–65]. При этом матрицы  $D(A)$  осуществляют переход от неподвижной декартовой системы отсчета



Рис. 1.5. Углы Эйлера:  $\theta = A_1$ ,  $\varphi = A_2$ ,  $\psi = A_3$ 

$x_1 x_2 x_3$  к системе отсчета  $x'_1 x'_2 x'_3$ , связанной с вращающимся телом:  $\mathbf{x} = D\mathbf{x}'$  (см. рис. 1.5).

Хорошо известные результаты классической механики [63–65] позволяют выразить формы  $\omega_s(A, \partial_\mu A)$  через углы Эйлера:

$$A_1 = \theta, \quad A_2 = \varphi, \quad A_3 = \psi,$$

которые в данном случае описывают, конечно, не вращение твердого тела, а локальные повороты спинов в малых объемах магнитоупорядоченной среды:

$$\begin{aligned} \omega_1(A, \partial_\mu A) &= \partial_\mu A_2 \sin A_1 \sin A_3 + \partial_\mu A_1 \cos A_3, \\ \omega_2(A, \partial_\mu A) &= \partial_\mu A_2 \sin A_1 \cos A_3 - \partial_\mu A_1 \sin A_3, \\ \omega_3(A, \partial_\mu A) &= \partial_\mu A_2 \cos A_1 + \partial_\mu A_3. \end{aligned} \quad (1.6.12)$$

Важно, что не существует инвариантов относительно преобразований (1.6.5), (1.6.6), составленных только из матриц  $D(A)$  или из полей магнонов  $A_l(\mathbf{x}, t)$ . Кроме того, можно показать, что линейная независимость и полнота форм  $\omega_s(A, \partial_\mu A)$  позволяют представить любую дифференциальную форму  $\Xi(A, \partial_\mu A)$  в виде

$$\Xi(A, \partial_\mu A) = a_i \omega_i(A, \partial_\mu A),$$

где  $a_i$  — постоянные коэффициенты. Поскольку формы Картана (1.6.12) представляют полный набор инвариантов, наиболее общее  $SO(3)$ -инвариантное выражение для феноменологического лагранжиана спиновых волн, содержащее производные от квазиклассических полей магнонов не выше второй степени, имеет вид

$$Z = \int L d^3 \mathbf{x},$$

где  $L$  — плотность функции Лагранжа:

$$L = \frac{1}{2} [a_{ik} \omega_i(A, \partial_t A) \omega_k(A, \partial_t A) + 2b_i \omega_i(A, \partial_t A) - c_{ik,lm} \omega_i(A, \partial_l A) \omega_k(A, \partial_m A) - 2d_{i,l} \omega_i(A, \partial_l A)], \quad (1.6.13)$$

$a, b, c, d$  — феноменологические постоянные. Без ограничения общности можно считать, что  $a_{ik} = a_{ki}$ ,  $c_{ik,lm} = c_{ki,ml}$ . С микроскопической точки зрения параметры  $a, b, c, d$  являются ненулевыми вакуумными средними от определенных комбинаций спиновых операторов системы. Далее мы увидим, что постоянные  $b_i$  пропорциональны компонентам вектора равновесной спонтанной намагниченности среды и потому при обращении времени  $R$  они меняют знак:

$$b_i \xrightarrow{R} -b_i.$$

В результате функция Лагранжа (1.6.13) будет инвариантной относительно преобразования  $R$ . Заметим также, что наличие взаимодействий типа

$$d_{i,l} \omega_i(A, \partial_l A) \quad (1.6.14)$$

возможно только в кристаллах без центра инверсии и связано с существованием геликоидальных магнитных структур. Явный вид постоянных  $a, b, c, d$  определяется требованием инвариантности лагранжиана (1.6.13) относительно преобразований группы пространственной симметрии среды. Некоторые возможные ограничения на выбор констант обсудим в дальнейшем.

Интересно, что лагранжиан (1.6.13) при  $b_i = 0$  и в пренебрежении зависимостью углов  $A_l$  от пространственных координат (при  $\partial_k A_l = 0$ ,  $k = 1, 2, 3$ ) буквально совпадает с лагранжианом, который определяет вращение асимметричного твердого тела относительно неподвижной точки [63]. При этом  $\omega_s(A, \partial_t A)$  — угловая скорость тела в системе отсчета, жестко связанной с телом, постоянные  $a_{ij}$  — компоненты тензора моментов инерции тела.

При  $b_j \neq 0$ ,  $\partial_k A_l = 0$  выражение (1.6.13) совпадает с функцией Лагранжа вращающегося заряженного тела с собственным магнитным моментом [66] (магнитный волчок).

Можно сказать, что в общем случае лагранжиан (1.6.13) описывает систему взаимодействующих механических волчков, расположенных в разных точках пространства. Величины  $\omega_s(A, \partial_k A)$  характеризуют относительные повороты волчков в соседних точках системы. Постоянные  $c_{ik,lm}$ ,  $d_{i,l}$  определяют жесткость связей волчков друг с другом и с основным состоянием системы.

Аналогичным образом, в магнетиках формы  $\omega_s(A, \partial_\mu A)$  характеризуют локальные повороты спинов в малых объемах среды. Эти повороты осуществляются в спиновом пространстве относительно базиса, связанного с магнитными векторами обменной структуры. Важно, что

в малых объемах среды сохраняется идеальная обменная структура, которая характеризуется не более чем тремя жестко сориентированными по отношению друг к другу магнитными векторами неизменной длины. В возбужденных состояниях магнетика при переходе от одного малого объема среды к другому эти векторы, а вместе с ними и базис, поворачиваются как единое целое относительно неподвижной системы координат в спиновом пространстве. В конечном счете  $SO(3)$ -симметрия феноменологического лагранжиана (1.6.13) в неподвижном спиновом пространстве обеспечивается тем, что относительные смещения и повороты спинов выражены в подвижном репере. Позднее поясним эти утверждения на конкретных примерах.

Параметризация матриц  $D$  углами Эйлера удобна для обсуждения аналогии спиновой динамики с вращением твердого тела. Можно показать [55, 56], что использование других параметризаций группы  $SO(3)$  приводит к физически эквивалентным результатам. При этом теория учитывает все взаимодействия между магнонами, соответствующие диаграммам Фейнмана типа дерева (диаграммы без замкнутых петель), которые наиболее существенны в длинноволновом пределе.

По известному лагранжиану находим полную энергию магнетика:

$$\begin{aligned} E &= \int \left( \frac{\partial L}{\partial(\partial_t A_l)} \partial_t A_l - L \right) d^3 \mathbf{x} = \\ &= \frac{1}{2} \int [a_{ik} \omega_i(A, \partial_t A) \omega_k(A, \partial_t A) + 2d_{i,l} \omega_i(A, \partial_l A) + \\ &\quad + c_{ik,lm} \omega_i(A, \partial_l A) \omega_k(A, \partial_m A)] d^3 \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (1.6.15)$$

Уравнения динамики спиновых волн получаются варьированием действия, соответствующего лагранжиану

$$Z = \int L d^3 \mathbf{x},$$

по полям  $A_l$  или  $D_{ik}$ . Далее для упрощения анализа рассматриваем случай безграничной среды и предполагаем, что на бесконечности все поверхностные интегралы обращаются в нуль. При выборе в качестве динамических переменных полей  $D_{ij}(\mathbf{x}, t)$  следует учесть связи (1.6.1). Для этого воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа [64]. Введем вспомогательный лагранжиан

$$\tilde{Z} = Z + \frac{1}{2} \int \lambda_{ij} (D_{ki} D_{kj} - \delta_{ij}) d^3 \mathbf{x}, \quad (1.6.16)$$

где поля  $\lambda_{ij}(\mathbf{x}, t) = \lambda_{ji}(\mathbf{x}, t)$  играют роль множителей Лагранжа. Исходная вариационная задача эквивалентна вариационной задаче с лагранжианом  $\tilde{Z}$ , причем вариации полей  $\lambda_{ij}$  и  $D_{ij}$  теперь можно считать независимыми.

Уравнения Лагранжа, определяющие  $\lambda_{ij}$  и  $D_{ij}$ , имеют вид

$$\partial_\mu \frac{\tilde{\delta} Z}{\tilde{\delta}(\partial_\mu D_{sj})} - \frac{\tilde{\delta} Z}{\tilde{\delta} D_{sj}} - \lambda_{ij} D_{si} = 0, \quad D_{ki} D_{kj} = \delta_{ij}. \quad (1.6.17)$$

Здесь и далее величина  $\tilde{\delta} F / \tilde{\delta} u$  означает «частную» вариационную производную от функционала  $F$  полевой переменной  $u$ . А именно, в формуле (1.6.17)

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\delta} Z}{\tilde{\delta}(\partial_\mu D_{sj})} &= - \frac{\partial L}{\partial \omega_n(A, \partial_\mu A)} \frac{1}{2} \varepsilon_{nrj} D_{sr}, \\ \frac{\tilde{\delta} Z}{\tilde{\delta} D_{sj}} &= \frac{\partial L}{\partial \omega_n(A, \partial_\mu A)} \frac{1}{2} \varepsilon_{nrj} \partial_\mu D_{sr}. \end{aligned} \quad (1.6.18)$$

Частные вариационные производные (1.6.18) следующим образом связаны с «полной» вариационной производной от функционала  $Z$  полевой переменной  $D_{sj}$ :

$$\frac{\delta Z}{\delta D_{sj}} = \frac{\tilde{\delta} Z}{\tilde{\delta} D_{sj}} - \partial_\mu \frac{\tilde{\delta} Z}{\tilde{\delta}(\partial_\mu D_{sj})}.$$

Для исключения из первого равенства (1.6.17) множителей Лагранжа  $\lambda_{ij}$ , умножим его на  $D_{sk} \varepsilon_{kjl}$  и просуммируем результат по индексам  $s, j$ . С помощью второго равенства и формул (1.6.7), (1.6.3) получим

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial L}{\partial \omega_l(A, \partial_\mu A)} \right) - \varepsilon_{lnm} \left( \frac{\partial L}{\partial \omega_n(A, \partial_\mu A)} \right) \omega_m(A, \partial_\mu A) = 0.$$

Таким образом, уравнения эволюции квазиклассических полей магновов имеют вид

$$\begin{aligned} a_{lk} \partial_t \omega_k(A, \partial_t A) - c_{lr, nm} \partial_n \omega_r(A, \partial_m A) - \\ - \varepsilon_{lnm} [a_{nk} \omega_k(A, \partial_t A) + b_n] \omega_m(A, \partial_t A) + \\ + \varepsilon_{lnm} [c_{nr, pq} \omega_r(A, \partial_q A) + d_{n, p}] \omega_m(A, \partial_p A) = 0. \end{aligned} \quad (1.6.19)$$

С инвариантностью функции Лагранжа  $\tilde{Z}$  (или  $Z$ ) относительно вращений в спиновом пространстве связан закон сохранения механического спинового момента магнетика. Соответствующее такой симметрии инфинитезимальное преобразование есть

$$D \rightarrow D + i \varepsilon_k J_k D. \quad (1.6.20)$$

Генераторы  $J_k$  определяют вращение вокруг  $k$ -й оси в неподвижном спиновом пространстве,  $\varepsilon_k$  — постоянные параметры (малые углы поворота).

Существует простой способ построения сохраняющихся токов и их дивергенций, предложенный Гелл-Маном и Леви [57, 67]. Будем формально считать, что параметры  $\varepsilon_k$  в бесконечно малом преобразовании (1.6.20) зависят от координат и времени, тогда при преобразовании (1.6.20) лагранжиан (1.6.16) системы изменится на

$$\delta \tilde{Z} = \frac{\tilde{\delta} \tilde{Z}}{\tilde{\delta} \varepsilon_k} \varepsilon_k + \frac{\tilde{\delta} \tilde{Z}}{\tilde{\delta}(\partial_\mu \varepsilon_k)} \partial_\mu \varepsilon_k,$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\delta} \tilde{Z}}{\tilde{\delta} \varepsilon_k} &= \left[ \left( \frac{\tilde{\delta} \tilde{Z}}{\tilde{\delta} D_{sj}} + \lambda_{ij} D_{si} \right) \varepsilon_{ksp} D_{pj} + \frac{\tilde{\delta} \tilde{Z}}{\tilde{\delta}(\partial_\mu D_{sj})} \varepsilon_{ksp} \partial_\mu D_{pj} \right], \\ \frac{\tilde{\delta} \tilde{Z}}{\tilde{\delta}(\partial_\mu \varepsilon_k)} &= \frac{\tilde{\delta} \tilde{Z}}{\tilde{\delta}(\partial_\mu D_{sj})} \varepsilon_{ksp} D_{pj}. \end{aligned} \quad (1.6.21)$$

По определению током  $S_{k\mu}$ , связанным с преобразованием (1.6.20), называют величину

$$S_{k\mu} \equiv -\frac{\tilde{\delta} \tilde{Z}}{\tilde{\delta}(\partial_\mu \varepsilon_k)} = -\frac{\tilde{\delta} \tilde{Z}}{\tilde{\delta}(\partial_\mu D_{sj})} \varepsilon_{ksp} D_{pj}.$$

Привлекая формулы (1.6.18), (1.6.3) и тождество

$$\varepsilon_{nrj} D_{sr} D_{pj} = \varepsilon_{isp} D_{in},$$

которое следует из (1.6.1), (1.6.2), приходим к следующим соотношениям между компонентами тока и формами Картана:

$$\begin{aligned} S_{k\mu} &= \frac{\partial L}{\partial \omega_n(A, \partial_\mu A)} D_{kn}; \\ S_{k0} &= D_{kn} [b_n + a_{ni} \omega_i(A, \partial_t A)], \\ S_{kr} &= -D_{kn} [c_{ni,rm} \omega_i(A, \partial_m A) + d_{n,r}]. \end{aligned} \quad (1.6.22)$$

Первое из равенств (1.6.21) с учетом уравнений Лагранжа (1.6.17) можно переписать в виде

$$\frac{\tilde{\delta} \tilde{Z}}{\tilde{\delta} \varepsilon_k} = -\partial_\mu S_{k\mu}.$$

Если лагранжиан  $\tilde{Z}$  не зависит от параметров  $\varepsilon_k$ , а в данном случае это так, вследствие инвариантности  $\tilde{Z}$  относительно преобразований (1.6.20) с постоянными  $\varepsilon_k$ , то  $\partial_\mu S_{k\mu} = 0$ . Величины  $S_{k0}$  имеют смысл компонент вектора плотности спинного момента магнетика. В явном виде закон сохранения механического спинного момента системы есть

$$\begin{aligned} \partial_t [D_{kn} (b_n + a_{ni} \omega_i(A, \partial_t A))] - \\ - \partial_r [D_{kn} (d_{n,r} + c_{ni,rm} \omega_i(A, \partial_m A))] = 0. \end{aligned} \quad (1.6.23)$$

В силу соотношения

$$\partial_\mu D_{kn} = -\varepsilon_{lnq} \omega_q(A, \partial_\mu A) D_{kl}, \quad (1.6.24)$$

которое вытекает из (1.6.7), закон сохранения (1.6.23) и уравнения динамики полей магнонов (1.6.19) эквивалентны.

Поясним результат в рамках механической модели. Выражение  $S_{k0}$  (1.6.22) формально совпадает с определением момента импульса вращающегося тела в неподвижной системе координат, центр которой совмещен с центром вращения тела [65]. Важно, что величины

$$\sigma_{n0} = b_n + a_{ni} \omega_i(A, \partial_t A) \quad (1.6.25)$$

также являются компонентами момента импульса тела, но вычисленными в подвижной системе координат, оси которой жестко связаны с телом. С этой точки зрения уравнения (1.6.19), (1.6.23) при  $\partial_k A = 0$  ( $k = 1, 2, 3$ ) представляют для вращающегося тела один и тот же закон сохранения момента импульса, но записанный в разных системах отсчета: в системе, связанной с вращающимся телом, и в неподвижной системе отсчета.

В магнетиках ситуация аналогична. Выражение  $S_{k0}$  (1.6.22) дает спиновый момент системы относительно неподвижной системы координат в спиновом пространстве, в то время как  $\sigma_{k0}$  (1.6.25) представляет ту же самую характеристику, но записанную в подвижном репере спинного пространства, который жестко связан с магнитными векторами обменной структуры. Как уже упоминалось, в малых областях магнетика в подвижном базисе сохраняется идеальная обменная структура, хотя в неподвижном репере спинного пространства магнитные векторы структуры непрерывно поворачиваются как единое целое при переходе от одной области координатного пространства к другой. Поясним сказанное на примере формул для  $S_{k0}$  и  $\sigma_{k0}$ . Из (1.6.22), (1.6.25) следует, что вектор  $\mathbf{b}$  определяет равновесный спонтанный спиновый момент среды. В возбужденном состоянии магнетика, характеризующемся углами  $A_l \neq 0$ , в подвижном репере вектор  $\mathbf{b}$  остается неизменным (см. (1.6.25)), а в неподвижном базисе спинного пространства, согласно (1.6.22), он поворачивается по закону  $B_k = D_{kn} b_n$  (рис. 1.6). Как и в механике, при переходе от подвижного репера к неподвижному формы  $\omega_s(A, \partial_t A)$  преобразуются как компоненты вектора:

$$\omega_k(A, \partial_t A) \rightarrow \Omega(A, \partial_t A) = D_{kn} \omega_n(A, \partial_t A).$$

В результате энергия и лагранжиан системы остаются неизменными. Например, остается инвариантным слагаемое  $b_n \omega_n(A, \partial_t A) = B_k \Omega_k(A, \partial_t A)$ . С этой точки зрения у матричных элементов  $D_{ij}$  левый индекс относится к неподвижному реперу, а правый — к подвижному реперу в спиновом пространстве.

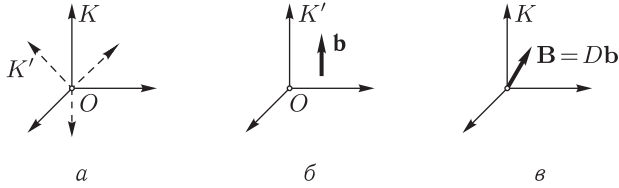


Рис. 1.6. Неподвижная  $K$  и подвижная  $K'$  декартовы системы координат в спиновом пространстве (а). Система  $K'$  жестко связана со спонтанным спиновым моментом среды, поэтому в ней  $\mathbf{b} = \text{const}$  (б). В лабораторной системе отсчета  $K$  в возбужденных состояниях спиновый момент  $\mathbf{B} = D(\mathbf{x}, t)\mathbf{b} \neq \text{const}$  (в)

Согласно законам квантовой механики, вектор спинового момента системы только магнитомеханическим отношением  $\gamma$  отличается от вектора намагниченности среды:

$$M_k(\mathbf{x}, t) = -\hbar \gamma S_{k0}(\mathbf{x}, t) = -\hbar \gamma D_{kn} [b_n + a_{ni} \omega_i(A, \partial_t A)]. \quad (1.6.26)$$

В магнетиках без центра инверсии плотность функции Лагранжа кроме слагаемого (1.6.14) может содержать члены  $\mu_{m,pq} \omega_p(A, \partial_m A) \omega_q(A, \partial_t A)$ . Среди них особенно интересны следующие:

$$\mu_{ms} \varepsilon_{pqs} \omega_p(A, \partial_m A) \omega_q(A, \partial_t A). \quad (1.6.27)$$

В антиферромагнетиках коэффициент  $\mu_{ms}$  может иметь вид  $\mu_{ms} = \mu_m^{(0)} l_{s\nu}^{(0)}$ ,  $\mu_m^{(0)}$  — обменные константы, постоянные векторы  $\mathbf{l}_\nu^{(0)} = (l_{1\nu}^{(0)}, l_{2\nu}^{(0)}, l_{3\nu}^{(0)})$  задают равновесную структуру. Векторы с разными номерами  $\nu$  ортогональны ( $\nu$  пробегает не более трех значений). При операции обращения времени имеем:

$$\mu_m^\nu \rightarrow \mu_m^\nu, \quad \mathbf{l}_\nu^{(0)} \rightarrow -\mathbf{l}_\nu^{(0)}, \quad \omega_q(A, \partial_t A) \rightarrow -\omega_q(A, \partial_t A),$$

поэтому выражение (1.6.27) будет инвариантным. Из-за дополнительных членов (1.6.27), компоненты сохраняющегося тока изменятся:

$$\begin{aligned} S_{k0} &= D_{kn} [b_n + a_{ni} \omega_i(A, \partial_t A) + \mu_{ms} \varepsilon_{qns} \omega_q(A, \partial_m A)], \\ S_{kr} &= -D_{kn} [c_{ni,rm} \omega_i(A, \partial_m A) + d_{n,r} + \mu_{rs} \varepsilon_{qns} \omega_q(A, \partial_t A)], \end{aligned}$$

а вместе с ними будет другой и намагниченность среды:

$$\begin{aligned} M_k(\mathbf{x}, t) &= -\hbar \gamma D_{kn} [b_n + a_{ni} \omega_i(A, \partial_t A) + \\ &\quad + \mu_{ms} \varepsilon_{qns} \omega_q(A, \partial_m A)]. \end{aligned} \quad (1.6.28)$$

Однако уравнения для расчета голдстоуновских полей  $A_n(\mathbf{x}, t)$  останутся прежними. В силу соотношений (1.6.3), (1.6.10) и (1.6.24), дополнительные слагаемые в уравнениях  $\partial_\mu S_{k\mu} = 0$  взаимно сокращаются.

Из (1.6.28) следует важный вывод: в антиферромагнетиках, где параметр  $b_n = 0$ , намагниченность может порождаться не только динамикой полей  $A_n$ , но и статическими дефектами и текстурами:  $A_n = A_n(\mathbf{x})$ .

Пространственная симметрия магнитоупорядоченной среды приводит к ограничениям на параметры  $a, b, c, d$  феноменологического лагранжиана спиновых волн (1.6.13). В качестве примера рассмотрим неколлинеарный антиферромагнетик  $\text{UO}_2$  [46].

Четырехподрешеточный антиферромагнетик  $\text{UO}_2$  имеет кубическую гранецентрированную пространственную решетку (группа  $O_h^5$ ). Магнитные ионы урана занимают позиции, совпадающие с узлами ГЦК решетки (см. рис. 1.7). Спиновые моменты этих атомов направлены

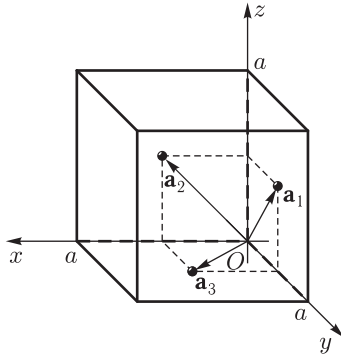


Рис. 1.7. Позиции магнитных атомов в соединении  $\text{UO}_2$  (черные шарики). Стрелками показаны векторы трансляций пространственной решетки соединения  $\text{UO}_2$ :  $\mathbf{a}_1 = (a/2)(0, 1, 1)$ ,  $\mathbf{a}_2 = (a/2)(1, 0, 1)$ ,  $\mathbf{a}_3 = (a/2)(1, 1, 0)$ ,  $a$  — длина ребра куба, который является кристаллографической ячейкой магнитной структуры. При переходе к безразмерным переменным полагаем  $a = 1$

вдоль пространственных диагоналей куба, т.е. соответственно вдоль направлений  $[1, 1, 1]$ ,  $[1, \bar{1}, \bar{1}]$ ,  $[\bar{1}, 1, \bar{1}]$ ,  $[\bar{1}, \bar{1}, 1]$ . Квазиклассическая плотность спинового момента инвариантна относительно трансляций на удвоенные элементарные векторы трансляций  $\mathbf{a}_\nu$ . Обменная структура описывается тремя взаимно ортогональными антиферромагнитными векторами  $\mathbf{l}_\nu^{(0)}$ , направленными вдоль ребер куба:

$$\mathbf{l}_1^{(0)} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{l}_2^{(0)} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{l}_3^{(0)} = (0, 0, 1).$$

Здесь  $\nu = 1, 2, 3$  — номер вектора. В возбужденных состояниях магнетика, характеризующемся углами  $A_l(\mathbf{x}, t)$ , магнитные векторы  $\mathbf{l}_\nu = D\mathbf{l}_\nu^{(0)}$  имеют компоненты  $l_{s\nu} = D_{sk}l_{k\nu}^{(0)}$ . Магнитное упорядочение в  $\text{UO}_2$  отвечает неприводимой звезде с лучами

$$\mathbf{k}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3), \quad \mathbf{k}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3), \quad \mathbf{k}_3 = \frac{1}{2}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2),$$



где  $\mathbf{b}_\nu$  — векторы обратной решетки. При трансляции на  $\mathbf{a}_\mu$  вектор  $\mathbf{l}_\mu^{(0)}$  не меняется, два же других антиферромагнитных вектора  $\mathbf{l}_\nu^{(0)}$  ( $\mu \neq \nu$ ) при трансляциях на  $\mathbf{a}_\nu$  меняют знак. Векторы  $\mathbf{l}_\nu^{(0)}$  преобразуются по одному трехмерному представлению пространственной группы  $G$  магнетика, которое соответствует кубической симметрии спинового пространства с инвариантами

$$\begin{aligned}\omega_i^2(A, \partial_t A) &= \Omega_i^2(A, \partial_t A); \\ \omega_i(A, \partial_k A) \omega_i(A, \partial_k A) &= \Omega_i(A, \partial_k A) \Omega_i(A, \partial_k A); \\ \sum_{\nu=1}^3 (\mathbf{l}_\nu^{(0)} \cdot \boldsymbol{\omega}(A, \partial_\nu A))^2 &= \sum_{\nu=1}^3 (\mathbf{l}_\nu \cdot \boldsymbol{\Omega}(A, \partial_\nu A))^2 = \\ &= \omega_1^2(A, \partial_1 A) + \omega_2^2(A, \partial_2 A) + \omega_3^2(A, \partial_3 A),\end{aligned}$$

где  $x_i$  — декартовы координаты вдоль главных осей кристалла,

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad \boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3), \quad \Omega_i = D_{ik}\omega_k.$$

Поэтому для соединения  $\text{UO}_2$  феноменологические постоянные в обменном лагранжиане (1.6.13) суть

$$\begin{aligned}b_n &= 0, \quad d_{n,k} = 0, \quad a_{ij} = R\delta_{ij}, \\ c_{ik,lm} &= P\delta_{ik}\delta_{lm} + Q[\delta_{i1}\delta_{k1}\delta_{l1}\delta_{m1} + \\ &\quad + \delta_{i2}\delta_{k2}\delta_{l2}\delta_{m2} + \delta_{i3}\delta_{k3}\delta_{l3}\delta_{m3}],\end{aligned}\tag{1.6.29}$$

где  $R, P > 0, P > Q$ .

Подчеркнем, что метод феноменологических лагранжианов спиновых волн основывается на учете общих свойств симметрии магнетиков. Поэтому единственное его ограничение состоит в том, что характерные частоты длинноволновых голдстоуновских возбуждений должны быть меньше обменных частот тех спиновых волн, которые отделены от голдстоуновских мод энергетическим щелями.

Важно, что уравнения (1.6.19) находят свое приложение в самых разных областях физики. В частности, можно показать, что при определенном выборе постоянных  $a, b, c, d$  они совпадают с уравнениями, предложенными в [68, 69] для описания динамики А- и В- фаз сверхтекучего  $^3\text{He}$ . Универсальность уравнений (1.6.19) объясняется тем обстоятельством, что при их выводе были заложены общие для многих физических систем требования симметрии.

Описание нелинейной динамики голдстоуновских возбуждений, основанное на моделях магнитных подрешеток, и метод феноменологических лагранжианов спиновых волн согласованы между собой, по крайней мере в обменном приближении. Справедливость этого утверждения мы проиллюстрируем далее на конкретных примерах.

В заключение раздела заметим, что конкретные расчеты упрощает локальный изоморфизм групп  $SO(3)$  и  $SU(2)$ . Напомним, что  $SU(2)$  — группа двумерных унитарных унимодулярных матриц  $g$ :

$$g g^\dagger = g^\dagger g = I, \quad \det g = 1. \quad (1.6.30)$$

Здесь и далее знак « $\dagger$ » означает эрмитово сопряжение.

Существует взаимно однозначное соответствие между окрестностями единичных элементов групп  $SU(2)$  и  $SO(3)$ , которое выражается следующей рабочей формулой [62, 70]:

$$g^\dagger \sigma_p g = \sigma_k D_{kp}, \quad g \sigma_p g^\dagger = D_{pk} \sigma_k. \quad (1.6.31)$$

Здесь  $\sigma_i$  — матрицы Паули, реализующие алгебру генераторов группы  $SU(2)$ :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \sigma_s \sigma_p &= I \delta_{sp} + i \varepsilon_{spq} \sigma_q, \quad \sigma_k^\dagger = \sigma_k, \quad \text{Sp } \sigma_k = 0. \end{aligned} \quad (1.6.32)$$

Нетрудно проверить, что если матрицам  $g_1, g_2 \in SU(2)$  соответствуют матрицы  $D_1, D_2 \in SO(3)$ , то произведению матриц  $g_1 g_2 \in SU(2)$  соответствует произведение матриц  $D_2 D_1 \in SO(3)$  [64]. Связь между группами позволяет заменить построение представлений группы  $SO(3)$  аналогичной и более простой задачей для группы  $SU(2)$ . В частности, формы Картана можно определить из разложения

$$(\partial_\mu g) g^\dagger = \frac{i}{2} \sigma_k \omega_k(A, \partial_\mu A).$$

Результат имеет вид

$$\omega_k(A, \partial_\mu A) = -i \text{Sp } ((\partial_\mu g) g^\dagger \sigma_k). \quad (1.6.33)$$

Здесь  $A_l$  — параметры группы  $SU(2)$ . При использовании параметризации матриц  $g \in SU(2)$  углами Эйлера имеем

$$g(A) = \begin{pmatrix} \cos \frac{A_1}{2} \exp \left( \frac{i}{2} (A_2 + A_3) \right) & i \sin \frac{A_1}{2} \exp \left( \frac{i}{2} (A_3 - A_2) \right) \\ i \sin \frac{A_1}{2} \exp \left( -\frac{i}{2} (A_3 - A_2) \right) & \cos \frac{A_1}{2} \exp \left( -\frac{i}{2} (A_2 + A_3) \right) \end{pmatrix}.$$

Функции  $A_l = A_l(\mathbf{x}, t)$  соответствуют квазиклассическим полям магнов.

Используя возможность циклической перестановки матриц под знаком операции «Sp» («след»), тождество  $(\partial_\mu g^\dagger) g = -g^\dagger \partial_\mu g$  и соотноше-

ния (1.6.30)–(1.6.32), прямой проверкой нетрудно убедиться, что прежнее определение форм Картана (1.6.11) совпадает с новым (1.6.33):

$$\begin{aligned}\omega_n(A, \partial_\mu A) &= -\frac{1}{2} \varepsilon_{nsp} D_{ks} \partial_\mu D_{kp} = \\ &= -\frac{1}{4} \varepsilon_{nsp} \operatorname{Sp} [(g^\dagger \sigma_s g) \partial_\mu (g^\dagger \sigma_p g)] = \\ &= -\frac{i}{2} \varepsilon_{nsp} \varepsilon_{spm} \operatorname{Sp} [(\partial_\mu g) g^\dagger \sigma_m] = -i \operatorname{Sp} [(\partial_\mu g) g^\dagger \sigma_n].\end{aligned}\quad (1.6.34)$$

В прежнем определении (1.6.11) инвариантность форм Картана относительно поворотов на произвольный угол в спиновом пространстве проявлялась в их неизменности при левых сдвигах на группе  $SO(3)$ :  $D(A) \rightarrow D_0 D(A)$ . Специально подчеркнем, что в новом представлении (1.6.33) инвариантности форм Картана относительно вращений в спиновом пространстве соответствует их инвариантность относительно правых сдвигов на группе  $SU(2)$ :  $g(A) \rightarrow g(A)g_0$ . Только при таком выборе двух разных представлений достигается согласование формул этой книги.

С помощью изоморфизма групп легко найти закон преобразования голдстоуновских полей (1.6.6) в явной форме:

$$g(A) \xrightarrow{g_0} g(A)g_0 = g(A'(A, g_0)).$$

## 1.7. Учет внешнего магнитного поля, релятивистских взаимодействий и процессов релаксации в методе феноменологических лагранжианов спиновых волн

*Если человек не понимает проблемы, он пишет много формул, а когда поймет, в чем дело, их остается в лучшем случае две.*

*Н. Бор*

При наличии внешнего магнитного поля  $\mathbf{H}^{\text{ext}}$  в изложенной теории следует учесть энергию взаимодействия магнетика с внешним полем. Для этого в энергию системы (1.6.15) достаточно добавить слагаемое  $-\int (\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}^{\text{ext}}) d^3\mathbf{x}$ , а в функцию Лагранжа (1.6.13) — такое же слагаемое, но с противоположным знаком.

Распределение намагниченности (1.6.26) или (1.6.28) создает в образце собственное магнитное поле  $\mathbf{H}^{(\text{m})}$ . Взаимодействие намагниченности с полем  $\mathbf{H}^{(\text{m})}$  можно учесть по той же схеме, добавив к энергии системы (1.6.15) магнитостатическую энергию (1.1.3).

Обсудим возможность включения в теорию локальных релятивистских взаимодействий. Релятивистские взаимодействия нарушают симметрию лагранжиана относительно вращений в спиновом пространстве,

сохраняя его инвариантность только относительно одновременных вращений спиновых и пространственных переменных. При наличии кристаллической решетки пространственными переменными будут векторы, связанные с кристаллографическими осями. Инварианты, описывающие релятивистские взаимодействия, состояются из матриц  $D$  и векторов, характеризующих ориентации кристаллографических осей. За ориентацию магнитной структуры относительно кристаллографических осей отвечает левый индекс матричных элементов  $D_{ij}$ .

Для антиферромагнетика  $\text{UO}_2$  имеется только один квадратичный по  $D_{ij}$  релятивистский инвариант

$$\sum_{\nu=1}^3 (\mathbf{l}_{\nu}^{(0)} \cdot \mathbf{l}_{\nu})^2 = D_{11}^2 + D_{22}^2 + D_{33}^2.$$

Поэтому к энергии  $\text{UO}_2$  следует добавить слагаемое

$$W_a = -\frac{\beta}{2} \int [D_{11}^2 + D_{22}^2 + D_{33}^2] d^3 \mathbf{x},$$

где  $\beta > 0$ .

Релятивистские взаимодействия приводят к пространственной анизотропии распространения спиновых волн, корреляциям поляризации спиновых волн с направлением их распространения, возникновению определенной поляризации спиновых волн при их рассеянии друг на друге и другим эффектам.

Поскольку магнитное поле и релятивистские взаимодействия нарушают инвариантность феноменологического лагранжиана по отношению к спиновым вращениям, уравнения непрерывности для тока спина не имеют места.

В работе [71] предпринята интересная попытка включить также и процессы релаксации в обсуждаемую макроскопическую теорию. При учете потерь энергии уравнения нелинейной динамики голдстоуновских возмущений записываются в форме

$$\partial_{\mu} \frac{\tilde{\delta} Z}{\tilde{\delta}(\partial_{\mu} A_l)} - \frac{\tilde{\delta} Z}{\tilde{\delta} A_l} + \frac{\delta Q}{\delta(\partial_t A_l)} = 0, \quad (1.7.1)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\delta} Z}{\tilde{\delta}(\partial_{\mu} A_l)} &= \frac{\partial L}{\partial \omega_n(A, \partial_{\nu} A)} \frac{\partial \omega_n(A, \partial_{\nu} A)}{\partial(\partial_{\mu} A_l)}, \\ \frac{\tilde{\delta} Z}{\tilde{\delta} A_l} &= \frac{\partial L}{\partial \omega_n(A, \partial_{\nu} A)} \frac{\partial \omega_n(A, \partial_{\nu} A)}{\partial A_l}, \end{aligned} \quad (1.7.2)$$

$Z$  — определенный ранее феноменологический лагранжиан спиновых волн,  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$  и

$$Q = \int R d^3 \mathbf{x}$$

есть диссипативный функционал системы,  $R = R(A, \partial_t A, \partial_t \partial_l A, \dots)$ . В отличие от частных вариационных производных (1.7.2), в формуле (1.7.1) под величиной  $\delta Q / \delta(\partial_t A_l)$  подразумевается полная вариационная производная от функционала  $Q$  по обобщенным скоростям  $(\partial_t A_l)$ , которая получается после интегрирования по частям подинтегральных выражений с множителями типа  $\partial_n [\delta \partial_t A_l]$ .

В общем случае  $Q$  — положительно определенный функционал той же симметрии, что и лагранжиан  $Z$  магнетика. В обменном приближении диссипативный функционал  $Q_{\text{ex}}$  должен удовлетворять условию сохранения полного спинового момента системы:

$$\int S_{k0}(\mathbf{x}, t) d^3 \mathbf{x} = \text{const.}$$

Обменная релаксация не изменяет полного спинового момента среды, а лишь приводит к диффузии плотности спинового момента из тех областей координатного пространства, где она больше, в те области, где ее значение меньше. Удовлетворяющий сформулированным критериям простейший квадратичный по формам Картана обменный диссипативный функционал, содержащий минимальное число производных, имеет вид

$$Q_{\text{ex}} = \frac{1}{2} \int r_{ij, nm} \partial_t \omega_i(A, \partial_n A) \partial_t \omega_j(A, \partial_m A) d^3 \mathbf{x} > 0,$$

где без ограничения общности можно считать  $r_{ij, nm} = r_{ji, mn}$ . Пространственная симметрия среды накладывает ограничения на выбор феноменологических параметров  $r_{ij, nm}$ . Например, для неколлинеарного антиферромагнетика  $\text{UO}_2$  имеем:

$$r_{ij, mn} = r_1 \delta_{ij} \delta_{mn} + r_2 [\delta_{i1} \delta_{j1} \delta_{n1} \delta_{m1} + \delta_{i2} \delta_{j2} \delta_{m2} \delta_{n2} + \delta_{i3} \delta_{j3} \delta_{m3} \delta_{n3}]; \quad r_1 > 0, \quad r_1 > r_2.$$

С целью записать динамические уравнения (1.7.1) в более явном виде, воспользуемся следующим представлением форм Картана:

$$\omega_n(A, \partial_\mu A) = K_{nl}(A) \partial_\mu A_l. \quad (1.7.3)$$

Функции  $K_{nl}(A)$  в (1.7.3) зависят только от углов  $A_l$ . Хотя их вид легко найти из формул (1.6.12), мы его приводить не будем, так как для вычислений важно лишь, что  $3 \times 3$ -матрица  $K$  имеет обратную:

$$K_{il}(K^{-1})_{lp} = \delta_{ip},$$

а ее матричные элементы удовлетворяют тождествам

$$\frac{\partial K_{nl}}{\partial A_s} - \frac{\partial K_{ns}}{\partial A_l} + \varepsilon_{npq} K_{ps} K_{ql} = 0,$$

которые являются следствиями структурных уравнений Мауэра–Картана (1.6.10). Эти свойства функций  $K_{nl}(A)$  позволяют исключить их из окончательной записи уравнений (1.7.1):

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left( \frac{\partial L}{\partial \omega_l(A, \partial_\mu A)} \right) - \varepsilon_{lnm} \frac{\partial L}{\partial \omega_n(A, \partial_\mu A)} \omega_m(A, \partial_\mu A) = \\ = \partial_n \left( \frac{\partial R}{\partial [\partial_t \omega_l(A, \partial_n A)]} \right) - \varepsilon_{liq} \frac{\partial R}{\partial [\partial_t \omega_i(A, \partial_n A)]} \omega_q(A, \partial_n A). \end{aligned}$$

Таким образом, уравнения динамики полей магнонов, учитывающие потери энергии, суть

$$\begin{aligned} a_{lk} \partial_t \omega_k(A, \partial_t A) - c_{lr, nm} \partial_n \omega_r(A, \partial_m A) + \\ + \varepsilon_{lnm} [c_{nr, pq} \omega_r(A, \partial_q A) + d_{n, p}] \omega_m(A, \partial_p A) - \\ - \varepsilon_{lnm} [a_{nk} \omega_k(A, \partial_t A) + b_n] \omega_m(A, \partial_t A) = \\ = -\varepsilon_{liq} r_{ij, nm} \partial_t \omega_j(A, \partial_m A) \omega_q(A, \partial_n A) + \\ + r_{lj, nm} \partial_n \partial_t \omega_j(A, \partial_m A). \quad (1.7.4) \end{aligned}$$

Используя (1.6.24), (1.7.4), нетрудно показать, что уравнение для плотности спинового момента системы, как и должно быть, удовлетворяет закону сохранения полного механического спинового момента:

$$\partial_t S_{k0} = -\partial_n [\Pi_{kn} + S_{kn}].$$

Здесь динамический спиновый ток  $S_{k\mu}$  такой же, как в формуле (1.6.22), поток  $\Pi_{kn}$  определяет обменную диффузию намагниченности в образце

$$\Pi_{kn} = -D_{kl} r_{lj, nm} \partial_t \omega_j(A, \partial_m A),$$

сопровождающуюся потерями энергии:

$$\frac{dE}{dt} = - \int \frac{\delta Q_{\text{ex}}}{\delta (\partial_t A_s)} \partial_t A_s d^3 \mathbf{x} = -2Q_{\text{ex}} < 0.$$

Релятивистские взаимодействия понижают симметрию диссипативного функционала. Релятивистский диссипативный функционал  $Q_a$  будет инвариантен только относительно одновременных вращений магнитных векторов обменной структуры и решетки. Наиболее общее выражение  $Q_a$ , содержащее минимальное число производных, есть

$$Q_a = \frac{1}{2} \int \lambda_{ijkl} \partial_t D_{ij} \partial_t D_{kl} d^3 \mathbf{x} > 0. \quad (1.7.5)$$

Функционал (1.7.5) описывает релаксацию однородной спиновой прецессии в магнитоупорядоченной среде. Для антиферромагнетика  $\text{UO}_2$  имеем

$$Q_a = \frac{\lambda}{2} \int [(\partial_t D_{11})^2 + (\partial_t D_{22})^2 + (\partial_t D_{33})^2] d^3 \mathbf{x},$$

где  $\lambda > 0$ .

Далее мы покажем, что феноменологические лагранжианы магнетиков в пренебрежении процессами релаксации приводят к физически содержательным полностью интегрируемым нелинейным моделям, которые допускают точные решения, описывающие особые типы магнитных солитонов в многоподрешеточных магнетиках. В реальных магнитоупорядоченных средах всегда имеются потери энергии. При малых потерях энергии эволюцию магнитных солитонов можно подробно изучить в рамках изложенного подхода методами нелинейной теории возмущений.

### 1.8. Обсуждение эквивалентности подхода Ландау–Лифшица к описанию динамики магнетиков и метода феноменологических лагранжианов спиновых волн

*Similis similiti gaudet.*

(Подобный радуется себе подобному. — лат.)

В настоящее время применяются две макроскопические теории при теоретическом описании нелинейной динамики магнетиков: подход с использованием магнитных подрешеток и метод феноменологических лагранжианов. Далее рассмотрен одноподрешеточный ферромагнетик, ферримагнетик с двумя магнитными подрешетками и четырехподрешеточный неколлинеарный антиферромагнетик  $\text{UO}_2$ . На этих примерах обсудим вопрос эквивалентности указанных феноменологических теорий.

В обменном приближении уравнение Ландау–Лифшица для одноподрешеточного ферромагнетика имеет вид

$$\partial_t \mathbf{M} = -\gamma [\mathbf{M} \times \alpha_{rm} \partial_r \partial_m \mathbf{M}], \quad \mathbf{M}^2 = M_0^2 = \text{const}, \quad (1.8.1)$$

где  $\alpha_{mn} = \alpha_{nm}$  — постоянные обменного взаимодействия,  $M_0$  — величина номинальной намагниченности,  $\gamma$  — магнитомеханическое отношение.

После перехода от вектора намагниченности среды  $\mathbf{M}$  к вектору плотности спинового момента среды  $\mathbf{S}$  уравнение (1.8.1) можно переписать в форме

$$\partial_t \mathbf{S} = \tilde{\alpha}_{rm} \partial_r [\mathbf{S} \times \partial_m \mathbf{S}], \quad \mathbf{M} = -\gamma \hbar \mathbf{S}, \quad \tilde{\alpha}_{mn} = \alpha_{mn} \hbar \gamma^2. \quad (1.8.2)$$

Покажем, что уравнения (1.8.2) совпадают с (1.6.23) при следующем выборе феноменологических постоянных:

$$\begin{aligned} a_{ni} &= 0, \quad d_{n,r} = 0, \quad b_n = -\delta_{n3} \frac{M_0}{\gamma \hbar}, \\ c_{ni,rm} &= (\delta_{ni} - \delta_{n3} \delta_{i3}) \tilde{\alpha}_{rm} b_3^2. \end{aligned} \quad (1.8.3)$$

При таком выборе параметров уравнения (1.6.23) и вектор плотности магнитного момента среды принимают вид

$$\partial_t [D_{k3} b_3] - \tilde{\alpha}_{rm} \partial_r [D_{k1} \omega_1(A, \partial_m A) + D_{k2} \omega_2(A, \partial_m A)] b_3^2 = 0; \quad (1.8.4)$$

$$M_k = -\gamma \hbar b_3 D_{k3} \equiv D_{k3} M_0, \quad S_k = D_{k3} b_3. \quad (1.8.5)$$

Вследствие условия ортогональности матриц  $D$ , длина вектора  $\mathbf{M}$  является постоянной:  $\mathbf{M}^2 = M_0^2$ . Из (1.6.4) заключаем, что вектор  $\mathbf{M}$  параметризуется двумя углами Эйлера:

$$\mathbf{M} = M_0 \left( \sin \theta \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{2} \right), \sin \theta \sin \left( \varphi - \frac{\pi}{2} \right), \cos \theta \right).$$

Для преобразования второго слагаемого в уравнении (1.8.4) нам потребуется вспомогательное соотношение, которое нетрудно получить умножением равенства (1.6.24):

$$\partial_m D_{ji} = -\varepsilon_{liq} \omega_q(A, \partial_m A) D_{jl}$$

на  $\varepsilon_{knj} D_{nr}$  с последующим суммированием по дважды встречающимся индексам:

$$\begin{aligned} \partial_m D_{ji} \varepsilon_{knj} D_{nr} &= -\omega_q(A, \partial_m A) \varepsilon_{knj} D_{nr} D_{jl} \varepsilon_{liq} = \\ &= -\omega_q(A, \partial_m A) \varepsilon_{srl} D_{ks} \varepsilon_{liq} = \\ &= -\omega_q(A, \partial_m A) D_{ks} [\delta_{si} \delta_{rq} - \delta_{sq} \delta_{ri}]. \end{aligned} \quad (1.8.6)$$

При выполнении преобразований мы воспользовались формулой

$$\varepsilon_{knj} D_{nr} D_{jl} = \varepsilon_{srl} D_{ks},$$

которая следует из (1.6.1), (1.6.2), и тождествами (1.6.3). Полагая в (1.8.6)  $r = i = 3$ , находим:

$$\varepsilon_{knj} D_{n3} \partial_m D_{j3} = D_{k1} \omega_1(A, \partial_m A) + D_{k2} \omega_2(A, \partial_m A). \quad (1.8.7)$$

С учетом соотношений (1.8.5), (1.8.7) уравнение (1.8.4) в точности совпадает с уравнениями Ландау–Лифшица для простого ферромагнетика (1.8.2). Кроме того, рассмотренный пример показывает, что определенным выбором постоянных  $a, b, c, d$  можно уменьшить число голдстоуновских полей в уравнениях (1.6.23) или (1.6.19). В данном случае для параметризации уравнений (1.6.23) достаточно только двух локальных полей  $A_1 = \theta$ ,  $A_2 = \varphi$ . Для интерпретации результата, напомним, что равновесное состояние одноподрешеточного ферромагнетика в обменном приближении характеризуется единственным макрорепараметром — спонтанной намагниченностью  $-\gamma \hbar \mathbf{b}$ . Направление спонтанной намагниченности выделяет одно из возможных вакуумных состояний ферромагнетика. Поскольку вектор  $\mathbf{b}$  не изменяется при одновременном повороте всех спинов на один и тот же угол вокруг оси, совпадающей с направлением  $\mathbf{b}$ , указанное вакуумное состояние име-



ет нетривиальную подгруппу инвариантности  $SO(2)$ . Голдстоуновские поля описывают возбужденные состояния ферромагнетика, соответствующие лишь тем локальным поворотам спинов, которые приводят к изменению спонтанной намагниченности  $-\gamma \hbar \mathbf{b}$ . Для описания таких поворотов достаточно задания двух динамических переменных.

Как показано в главе 5, из уравнений Ландау–Лифшица для изотропного ферромагнетика с двумя кристаллографически неэквивалентными магнитными подрешетками в обменном приближении можно вывести эффективные уравнения движения:

$$[\mathbf{l} \times (c^{-2} \partial_t^2 \mathbf{l} - \Delta \mathbf{l})] + \beta c^{-1} \partial_t \mathbf{l} = 0, \quad \mathbf{l}^2 = 1. \quad (1.8.8)$$

Если в уравнениях (1.6.23) положить

$$\begin{aligned} d_{n,r} &= 0, \quad a_{ni} = c^{-2} \left( \delta_{ni} - \frac{b_n b_i}{\mathbf{b}^2} \right), \\ c_{ni,rm} &= \delta_{rm} \left( \delta_{ni} - \frac{b_i b_n}{\mathbf{b}^2} \right), \\ \mathbf{b} &= (0, 0, \beta c^{-1}), \quad l_k = D_{k3}, \end{aligned} \quad (1.8.9)$$

они совпадут с уравнениями (1.8.8). Доказательство этого утверждения аналогично приведенному для ферромагнетика.

Перейдем к обсуждению феноменологических уравнений, описывающих неколлинеарный антиферромагнетик  $\text{UO}_2$ . В рамках подхода Ландау–Лифшица вопрос о возможных типах обменных магнитных структур и спектр спиновых волн в  $\text{UO}_2$  рассмотрены в работах [46, 72, 73]. Магнитные ионы этого кристалла (ионы урана) образуют гранецентрированную кубическую решетку. Конкретное расположение немагнитных ионов безразлично (важно лишь, что они не нарушают симметрию решетки, образованной магнитными ионами, т.е. симметрию группы  $O_h^5$ ). В магнитном смысле кристалл представляет систему из четырех вставленных друг в друга магнитных подрешеток, каждая из которых образована ионами урана в позициях  $\mathbf{a}_0 = (0, 0, 0)$ ,  $\mathbf{a}_1 = (0, 1/2, 1/2)$ ,  $\mathbf{a}_2 = (1/2, 0, 1/2)$ ,  $\mathbf{a}_3 = (1/2, 1/2, 0)$  (см. рис. 1.7). Спины ионов направлены вдоль пространственных диагоналей куба (вдоль направлений  $[1, 1, 1]$ ,  $[1, \bar{1}, \bar{1}]$ ,  $[\bar{1}, 1, \bar{1}]$ ,  $[\bar{1}, \bar{1}, 1]$  соответственно).

Для описания магнитной структуры  $\text{UO}_2$  в рамках модели магнитных подрешеток удобно использовать следующие линейные комбинации спиновых моментов подрешеток:

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_4, \quad \mathbf{k} = 0; \\ \mathbf{l}_1 &= \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_3 - \mathbf{S}_4, \quad \mathbf{k} = \frac{\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3}{2}; \\ \mathbf{l}_2 &= \mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3 - \mathbf{S}_4, \quad \mathbf{k} = \frac{\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3}{2}; \\ \mathbf{l}_3 &= \mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_4, \quad \mathbf{k} = \frac{\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2}{2}. \end{aligned}$$

Справа указан волновой вектор  $\mathbf{k}$ , определяющий трансляционную симметрию соответствующего магнитного вектора ( $\mathbf{b}_s$  — векторы решетки, обратной по отношению к решетке, образованной векторами элементарных трансляций  $\mathbf{a}_s$ ).

Спиновые моменты ионов имеют одинаковую длину

$$\mathbf{S}_1^2 = \mathbf{S}_2^2 = \mathbf{S}_3^2 = \mathbf{S}_4^2 = S^2 = \text{const} \quad (1.8.10)$$

и могут быть выражены через магнитные векторы  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{l}_\nu$  ( $\nu = 1, 2, 3$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1 &= \frac{1}{4} (\mathbf{m} + \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \mathbf{l}_3), & \mathbf{S}_2 &= \frac{1}{4} (\mathbf{m} + \mathbf{l}_1 - \mathbf{l}_2 - \mathbf{l}_3), \\ \mathbf{S}_3 &= \frac{1}{4} (\mathbf{m} - \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 - \mathbf{l}_3), & \mathbf{S}_4 &= \frac{1}{4} (\mathbf{m} - \mathbf{l}_1 - \mathbf{l}_2 + \mathbf{l}_3). \end{aligned}$$

В терминах  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{l}_\nu$  условия нормировки (1.8.10) принимают вид

$$(\mathbf{l}_1)^2 + (\mathbf{l}_2)^2 + (\mathbf{l}_3)^2 + \mathbf{m}^2 = (4S)^2; \quad (1.8.11)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{l}_2) + (\mathbf{l}_3 \cdot \mathbf{m}) &= (\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{l}_3) + (\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{m}) = \\ &= (\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{l}_3) + (\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{m}) = 0. \end{aligned} \quad (1.8.12)$$

В равновесном антиферромагнитном состоянии кристалла  $\mathbf{m} = 0$ , а векторы  $\mathbf{l}_\nu$  имеют одинаковую длину и направлены вдоль ребер куба  $[1, 0, 0]$ ,  $[0, 1, 0]$ ,  $[0, 0, 1]$ .

Инвариантное разложение обменной энергии  $\text{UO}_2$  по степеням параметров порядка получено в работах [72, 73]. Выражения для энергии содержат слагаемые неоднородного билинейного и однородного биквадратичного обмена. Учет биквадратичного обмена имеет принципиальное значение, поскольку благодаря ему реализуется жесткая взаимная ориентация антиферромагнитных векторов  $\mathbf{l}_\nu$  магнитной структуры. По приведенным в работе [74] оценкам, величины билинейного и биквадратичного обмена в соединениях типа  $\text{UO}_2$  одного порядка. В то же время в главном приближении динамика голдстоуновских магнонов в  $\text{UO}_2$  определяется исключительно билинейным обменом и сводится к локальным поворотам векторов  $\mathbf{l}_\nu$  при сохранении их длины и взаимной ориентации, предписанной однородным биквадратичным обменом. Обсудим это подробнее.

Билинейная обменная энергия  $\text{UO}_2$  имеет вид [73]

$$\begin{aligned} w_2 &= \frac{1}{2} \sum \bar{J}_{ij} [(\mathbf{S}_1^i \cdot \mathbf{S}_1^j) + (\mathbf{S}_2^i \cdot \mathbf{S}_2^j) + (\mathbf{S}_3^i \cdot \mathbf{S}_3^j) + \\ &\quad + (\mathbf{S}_4^i \cdot \mathbf{S}_4^j)] + \sum J_{ij} [(\mathbf{S}_1^i \cdot \mathbf{S}_2^j) + (\mathbf{S}_1^i \cdot \mathbf{S}_3^j) + (\mathbf{S}_1^i \cdot \mathbf{S}_4^j) + \\ &\quad + (\mathbf{S}_2^i \cdot \mathbf{S}_4^j) + (\mathbf{S}_2^i \cdot \mathbf{S}_3^j) + (\mathbf{S}_3^i \cdot \mathbf{S}_4^j)]. \end{aligned} \quad (1.8.13)$$

Здесь  $\bar{J}_{ij}$ ,  $J_{ij}$  — обменные интегралы, индексы  $i$ ,  $j$  обозначают номера подрешеток, все суммы берутся по ближайшим соседям. В прибли-

жении ближайших соседей Фурье-компоненты обменных интегралов имеют вид:

$$\begin{aligned}\bar{J}_k &= 2\bar{J}(\cos k_1 + \cos k_2 + \cos k_3), \\ J_{12} &= J_{34} = 2J \left( \cos \frac{k_2 + k_3}{2} + \cos \frac{k_2 - k_3}{2} \right), \\ J_{13} &= J_{24} = 2J \left( \cos \frac{k_1 + k_3}{2} + \cos \frac{k_1 - k_3}{2} \right), \\ J_{14} &= J_{23} = 2J \left( \cos \frac{k_1 + k_2}{2} + \cos \frac{k_1 - k_2}{2} \right).\end{aligned}\tag{1.8.14}$$

Здесь для упрощения записи использованы безразмерные переменные ( $\mathbf{k}$  измеряется в единицах обратной длины кристаллографической ячейки).

Переход в разложении (1.8.13), (1.8.14) к континуальному пределу дает следующее выражение для плотности обменной энергии [72]:

$$\begin{aligned}w_2 &= \frac{A}{2} \left[ (\mathbf{l}_1)^2 + (\mathbf{l}_2)^2 + (\mathbf{l}_3)^2 \right] + \frac{B}{2} \mathbf{m}^2 + \\ &+ \frac{\alpha}{2} \sum_{\nu,j=1}^3 \left( \frac{\partial \mathbf{l}_\nu}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{l}_\nu}{\partial x_j} \right) + \frac{\beta}{2} \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{l}_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathbf{l}_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathbf{l}_3}{\partial x_3} \right)^2 \right],\end{aligned}\tag{1.8.15}$$

где  $B, \alpha > 0, \alpha > \beta$ . Мы опустили слагаемые  $\sim (\partial_i \mathbf{m})^2$ , которые малы в длинноволновом пределе по сравнению с членом  $\sim \mathbf{m}^2$ .

Поскольку члены, содержащие  $\mathbf{m}$ , также малы по сравнению с выражениями, содержащими  $\mathbf{l}_\nu$  ( $\mathbf{m}^2 \ll (\mathbf{l}_\nu)^2$ ), в записи плотности энергии  $w_4$  биквадратичного обмена можно опустить слагаемые  $(\mathbf{m} \cdot \mathbf{l}_\nu)^2, \mathbf{m}^4$ . В результате имеем

$$\begin{aligned}w_4 &= \frac{C}{4} \left[ (\mathbf{l}_1)^2 + (\mathbf{l}_2)^2 + (\mathbf{l}_3)^2 \right]^2 + \frac{D}{4} \left[ (\mathbf{l}_1)^4 + (\mathbf{l}_2)^4 + (\mathbf{l}_3)^4 \right] + \\ &+ \frac{E}{2} \left[ (\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{l}_2)^2 + (\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{l}_3)^2 + (\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{l}_3)^2 \right] + \\ &+ F \left[ (\mathbf{m} \cdot \mathbf{l}_1) (\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{l}_3) + (\mathbf{m} \cdot \mathbf{l}_2) (\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{l}_3) + (\mathbf{m} \cdot \mathbf{l}_3) (\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{l}_2) \right],\end{aligned}$$

где  $3C + D > 0, E > 0$  (выбор неравенств будет понятен из дальнейшего анализа).

Более того, поскольку  $\mathbf{m}^2 \ll (\mathbf{l}_\nu)^2$ , для определения равновесных значений  $\mathbf{l}_\nu$  достаточно минимизировать однородную часть полной плотности обменной энергии кристалла в пренебрежении ее зависимостью от вектора  $\mathbf{m}$  [72]:

$$\begin{aligned}w &= \frac{A}{2} \left[ (\mathbf{l}_1)^2 + (\mathbf{l}_2)^2 + (\mathbf{l}_3)^2 \right] + \\ &+ \frac{C}{4} \left[ (\mathbf{l}_1)^2 + (\mathbf{l}_2)^2 + (\mathbf{l}_3)^2 \right]^2 + \frac{D}{4} \left[ (\mathbf{l}_1)^4 + (\mathbf{l}_2)^4 + (\mathbf{l}_3)^4 \right] + \\ &+ \frac{E}{2} \left[ (\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{l}_2)^2 + (\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{l}_3)^2 + (\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{l}_3)^2 \right].\end{aligned}\tag{1.8.16}$$

В этом приближении связь (1.8.11) следует заменить более простым ограничением:

$$(\mathbf{l}_1)^2 + (\mathbf{l}_2)^2 + (\mathbf{l}_3)^2 \approx (4S)^2,$$

которое легко учесть методом неопределенных множителей Лагранжа.

При условиях  $3C + D > 0$ ,  $E > 0$ ,  $A < 0$  минимуму энергии (1.8.16) отвечает следующая магнитная структура:

$$\mathbf{l}_1 \perp \mathbf{l}_2 \perp \mathbf{l}_3, \quad (\mathbf{l}_1)^2 = (\mathbf{l}_2)^2 = (\mathbf{l}_3)^2 \equiv l^2 = \frac{(4S)^2}{3} = -\frac{A}{3C + D}. \quad (1.8.17)$$

Возвращаясь к полному выражению для плотности обменной энергии  $w = w_2 + w_4$ , содержащему  $\mathbf{m}$ , заключаем, что в основном состоянии (1.8.17) (при условии  $B > 0$ ) суммарный спиновый момент  $\mathbf{m} = 0$ . Найденные значения векторов  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{l}_\nu$  автоматически удовлетворяют ограничениям (1.8.12) и соответствуют эксперименту.

В контексте теории фазовых переходов Ландау параметр  $A$  предполагается зависящим от температуры  $T$  по закону:  $A = -r(T_c - T)$ , где параметр  $r > 0$ ,  $T_c$  — температура перехода. В области температур  $T > T_c$  коэффициент  $A > 0$ , поэтому магнитная структура (1.8.17) не реализуется, кристалл переходит в парамагнитное основное состояние:  $\mathbf{l}_\nu = \mathbf{m} = 0$ .

Ограничения (1.8.17) на взаимную ориентацию векторов  $\mathbf{l}_\nu$  можно представить в компактной математической форме:

$$l_{i\nu} l_{j\nu} = \delta_{ij} l^2, \quad l_{i\nu} l_{i\mu} = \delta_{\nu\mu} l^2. \quad (1.8.18)$$

Здесь греческие индексы нумеруют различные векторы  $\mathbf{l}_\nu$ , а латинские — проекции этих векторов на координатные оси:  $\mathbf{l}_\nu = (l_{1\nu}, l_{2\nu}, l_{3\nu})$ .

В возбужденных состояниях кристалла компоненты вектора  $\mathbf{m}$  не равны нулю, но они остаются малыми по сравнению с компонентами вектора  $\mathbf{l}_\nu$ :  $(\mathbf{l}_\nu)^2 \gg \mathbf{m}^2$ . Пренебрежем  $\mathbf{m}$  по сравнению с  $\mathbf{l}_\nu$  и будем считать, что и в возбужденных состояниях  $\text{UO}_2$  относительная ориентация векторов  $\mathbf{l}_\nu$  по-прежнему определяется соотношениями (1.8.18). Сравнение формул (1.8.18) и (1.6.1) позволяет сопоставить компонентам векторов  $\mathbf{l}_\nu$  элементы ортогональных матриц  $D \in SO(3)$  [75]:

$$l_{i\nu} = D_{i\nu} l. \quad (1.8.19)$$

В этом приближении нелинейная динамика  $\text{UO}_2$  теоретически описывается следующими слагаемыми билинейной обменной энергии:

$$W_{\text{ex}} = \int \left( \frac{\tilde{B}}{2} \mathbf{m}^2 + \frac{\alpha}{2} \sum_{\nu,j=1}^3 \left( \frac{\partial \mathbf{l}_\nu}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{l}_\nu}{\partial x_j} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\beta}{2} \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{l}_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathbf{l}_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathbf{l}_3}{\partial x_3} \right)^2 \right] \right) d^3 \mathbf{x}. \quad (1.8.20)$$

При переходе от выражения (1.8.15) к (1.8.20) мы воспользовались первым из условий нормировки (1.8.11), чтобы исключить инвариант  $(\mathbf{l}_1)^2 + (\mathbf{l}_2)^2 + (\mathbf{l}_3)^2$ . В результате в (1.8.20) имеем  $\tilde{B} = B - A$  и можем использовать приближение (1.8.19) для векторов  $\mathbf{l}_\nu$ . Далее при оценках полагаем  $\alpha, \beta \sim a^2 \tilde{B}$  ( $a$  — межатомное расстояние).

Используя (1.8.20), легко переписать уравнения Ландау–Лифшица (1.1.10) в терминах векторов  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{l}_\nu$ . В данном случае речь идет об эволюции спиновых моментов подрешеток, поэтому в (1.1.10) следует формально положить  $\gamma_\nu = -1$  (все  $\gamma_\nu$  одинаковы, так как ионы урана находятся в кристаллографически эквивалентных позициях). Уравнения движения для векторов  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{l}_\nu$  имеют вид:

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{m} &= [\mathbf{m} \times \mathbf{H}_m] + \sum_\nu [\mathbf{l}_\nu \times \mathbf{H}_{l_\nu}], \\ \partial_t \mathbf{l}_\nu &= [\mathbf{l}_\nu \times \mathbf{H}_m] + [\mathbf{m} \times \mathbf{H}_{l_\nu}] + \sum_{\chi, \lambda} |\varepsilon_{\nu\chi\lambda}| [\mathbf{l}_\nu \times \mathbf{H}_{l_\lambda}],\end{aligned}$$

где

$$\mathbf{H}_m = -\frac{\delta W_{\text{ex}}}{\delta \mathbf{m}}, \quad \mathbf{H}_{l_\nu} = -\frac{\delta W_{\text{ex}}}{\delta \mathbf{l}_\nu}$$

суть эффективные поля, соответствующие векторам  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{l}_\nu$ ,  $\varepsilon_{\nu\chi\lambda}$  — антисимметричный единичный тензор. В более подробной форме записи:

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{m} &= \sum_\nu [\mathbf{l}_\nu \times (\alpha \Delta \mathbf{l}_\nu + \beta \partial_\nu^2 \mathbf{l}_\nu)], \\ \partial_t \mathbf{l}_\nu &= -\tilde{B} [\mathbf{l}_\nu \times \mathbf{m}] + [\mathbf{m} \times (\alpha \Delta \mathbf{l}_\nu + \beta \partial_\nu^2 \mathbf{l}_\nu)] + \\ &\quad + \sum_{\chi, \lambda} |\varepsilon_{\nu\chi\lambda}| [\mathbf{l}_\nu \times (\alpha \Delta \mathbf{l}_\lambda + \beta \partial_\lambda^2 \mathbf{l}_\lambda)].\end{aligned}\tag{1.8.21}$$

Будем считать, что характерный размер  $d$  магнитных неоднородностей много больше межатомного расстояния  $a$ , поэтому в уравнениях (1.8.21) можно пренебречь слагаемыми  $\alpha [\mathbf{m} \times \Delta \mathbf{l}_\nu]$ ,  $\beta [\mathbf{m} \times \partial_\nu^2 \mathbf{l}_\nu]$  по сравнению с членами  $\tilde{B} [\mathbf{m} \times \mathbf{l}_\nu]$ :

$$\frac{\alpha |[\mathbf{m} \times \Delta \mathbf{l}_\nu]|}{\tilde{B} |[\mathbf{m} \times \mathbf{l}_\lambda]|} \sim \frac{\beta |[\mathbf{m} \times \partial_\nu^2 \mathbf{l}_\nu]|}{\tilde{B} |[\mathbf{m} \times \mathbf{l}_\lambda]|} \sim \left(\frac{a}{d}\right)^2 \ll 1.$$

При указанных предположениях из второго уравнения системы (1.8.21) можно выразить вектор  $\mathbf{m}$  через компоненты  $l_{i\nu}$  и их производные. После подстановки такого представления для  $\mathbf{m}$  в первое уравнение системы (1.8.21) получим замкнутое уравнение для расчета  $l_{i\nu}$ . Однако, прежде чем это сделать, заметим, что слагаемые вида  $\alpha [\mathbf{l}_\nu \times \Delta \mathbf{l}_\lambda]$ ,  $\beta [\mathbf{l}_\nu \times \partial_\lambda^2 \mathbf{l}_\lambda]$  в правых частях последнего уравнения системы (1.8.21) приводят после подстановки выражения для  $\mathbf{m}$  в первое уравнение к членам, содержащим третьи производные от компонент векторов  $\mathbf{l}_\nu$ ,

которые в длинноволновом пределе малы по сравнению с членами, содержащими вторые производные от векторов  $\mathbf{l}_\nu$ . Следовательно, слагаемыми типа  $\alpha [\mathbf{l}_\nu \times \Delta \mathbf{l}_\lambda]$ ,  $\beta [\mathbf{l}_\nu \times \partial_\lambda^2 \mathbf{l}_\lambda]$  в правой части последнего уравнения системы (1.8.21) также следует пренебречь. В результате это уравнение существенно упрощается и приобретает вид

$$\partial_t D_{i\nu} = -\tilde{B} \varepsilon_{ijk} D_{j\nu} m_k. \quad (1.8.22)$$

Используя формулы (1.6.1)–(1.6.3), (1.6.11), из равенства (1.8.22) нетрудно выразить компоненты вектора  $\mathbf{m}$  через элементы матриц  $D \in SO(3)$  и формы Картана [75]:

$$\begin{aligned} m_k &= -\frac{1}{2\tilde{B}} \varepsilon_{kij} D_{j\nu} \partial_t D_{i\nu} = -\frac{1}{2\tilde{B}} \varepsilon_{\lambda\mu\nu} D_{k\lambda} D_{i\mu} \partial_t D_{i\nu} = \\ &= \frac{1}{\tilde{B}} D_{k\lambda} \omega_\lambda(A, \partial_t A). \end{aligned} \quad (1.8.23)$$

После подстановки (1.8.23) в первое уравнение системы (1.8.21) получаем:

$$\frac{1}{\tilde{B}} \partial_t [D_{k\lambda} \omega_\lambda(A, \partial_t A)] = \sum_\nu [\mathbf{l}_\nu \times (\alpha \Delta \mathbf{l}_\nu + \beta \partial_\nu^2 \mathbf{l}_\nu)]_k. \quad (1.8.24)$$

Для преобразования правой части уравнения (1.8.24) нам потребуются два вспомогательных соотношения:

$$\begin{aligned} [\mathbf{l}_\nu \times \partial_\nu \mathbf{l}_\nu]_k &= -D_{k\mu} \omega_\lambda(A, \partial_\nu A) [\delta_{\lambda\nu} \delta_{\nu\mu} - \delta_{\mu\lambda}] l^2, \\ [\mathbf{l}_\nu \times \partial_q \mathbf{l}_\nu]_k &= 2l^2 D_{k\mu} \omega_\mu(A, \partial_q A), \end{aligned} \quad (1.8.25)$$

которые являются следствиями формулы (1.8.6). Заметим, что в первом из равенств (1.8.25) суммирование по индексу  $\nu$  не производится. Во втором равенстве по всем дважды встречающимся индексам, в том числе и по  $\nu$ , подразумевается суммирование. С помощью формул (1.8.25) легко убедиться, что эффективные уравнения нелинейной динамики антиферромагнетика  $\text{UO}_2$  (1.8.24) в точности совпадают с уравнениями (1.6.23), (1.6.29). Феноменологические параметры двух подходов связаны соотношениями

$$R = \frac{1}{\tilde{B}}, \quad P = (2\alpha + \beta) l^2, \quad Q = -\beta l^2.$$

Совпадают также выражения (1.8.23) и (1.6.26) для полного спинового момента системы.

В рамках теории Ландау–Лифшица для описания магнитной структуры и динамики намагниченности соединения  $\text{UO}_2$  необходимо задание четырех векторов  $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3, \mathbf{S}_4$  (или  $\mathbf{m}, \mathbf{l}_\nu, \nu = 1, 2, 3$ ), которые параметризуются посредством восьми независимых полей.

Важное преимущество метода феноменологических лагранжианов в том, что он эффективно сокращает число полевых переменных, необходимых для теоретического описания голдстоуновских возбуждений, связанных с локальными вращениями векторов обменной структуры магнетика. Общее число голдстоуновских полей магнонов не превышает трех.

Рассмотренные примеры показывают, что уравнения Ландау–Лифшица и уравнения Андреева–Волкова–Марченко–Желтухина родственны по своей математической структуре и эквивалентны по физическим следствиям в области, характерной для голдстоуновских возбуждений.

Установленную в данном разделе согласованность в обменном приближении двух макроскопических теорий можно проследить и далее. В частности, нетрудно проверить, что проявления релятивистских и магнитоупругих эффектов для соединения  $\text{UO}_2$  в модели подрешеток будут точно такими же, что и в методе феноменологических лагранжианов.

## 1.9. Феноменологический лагранжиан магнитоупругих взаимодействий

*То, что мы должны искать, — это не фундаментальные частицы, а фундаментальные симметрии.*

*В. Гейзенберг*

Функция Лагранжа любой замкнутой системы частиц всегда инвариантна относительно непрерывной группы трансляции координатного пространства. В то же время в основном состоянии кристалла атомы образуют решетку, симметрия которой ниже исходной симметрии лагранжиана или гамильтониана системы микрочастиц, образующих кристалл. Физические характеристики равновесного кристалла инвариантны только относительно дискретной группы трансляций. В соответствии с теоремой Голдстоуна это означает, что в кристалле легко возбуждаются бесщелевые моды упругих колебаний решетки (акустические фононы), которые как бы стремятся восстановить нарушенную трансляционную симметрию. Число ветвей в спектре акустических фононов определяется числом нарушенных элементов исходной группы симметрии микрогамильтониана системы. Равновесное состояние кристалла нарушает симметрию относительно непрерывных трансляций в трех независимых направлениях, которая «генерировалась» тремя компонентами импульса  $P_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Следовательно, в кристалле возбуждаются три голдстоуновские ветви колебаний решетки.

В магнитоупорядоченных средах наряду с акустическими фононами существуют три ветви голдстоуновских магнонов. Обсудим теоретиче-

ское описание магнитоупругих взаимодействий в рамках метода феноменологических лагранжианов [76–78].

Рассмотрим кристалломагнетик с микрогамильтонианом, инвариантным относительно группы  $SO(3)$  спиновых вращений. Пусть основное состояние кристалла полностью нарушает эту группу симметрии, а также группу непрерывных трансляций  $T(3)$  координатного пространства. Преобразования группы  $SO(3)$  и преобразования группы трансляций  $T(3)$  в данной задаче коммутируют между собой, так как осуществляются в разных пространствах (спиновом и координатном соответственно). Представим произвольный элемент  $g$  группы  $T(3) \otimes SO(3)$  в форме

$$g(X, A) = t(X) D(A).$$

Здесь  $D(A) \in SO(3)$ , для элемента  $t(X) \in T(3)$  воспользуемся параметризацией

$$t(X) = \exp(i X_s P_s).$$

Генераторы сдвигов  $P_s$  коммутируют между собой, но не коммутируют с пространственными координатами. Важное отличие данной задачи от ранее рассмотренных состоит в том, что на первых этапах вычислений (при определении трансформационных свойств параметров группы  $T(3) \otimes SO(3)$  и построении дифференциальных инвариантов группы) параметры  $X_s$  и  $A_i$  следует считать не зависящими от координат и времени. Поясним особенности расчетов.

Пусть  $g_0 = t(x_0) D(a_0)$  — некоторый другой элемент группы  $T(3) \otimes SO(3)$ , тогда

$$g_0 g = t(X + x_0) D(A'(A, a_0)). \quad (1.9.1)$$

Дифференциальные инварианты группы определим равенством

$$g^{-1} dg = i dX_s P_s - i \omega_s(A, dA) J_s. \quad (1.9.2)$$

При получении равенств (1.9.1), (1.9.2) групповые параметры  $X_i$  и  $A_i$  рассматривались как не зависящие от пространственно-временных координат  $x_i$ ,  $t$ . В то же время, в соответствии с аксиоматикой метода феноменологических лагранжианов соотношение (1.9.1) определяет трансформационные свойства локальных голдстоуновских полей:

$$X_i(\mathbf{x}, t) \xrightarrow{g_0} X_i(\mathbf{x}, t) + x_{0i}, \quad A_i(\mathbf{x}, t) \xrightarrow{g_0} A'_i(A(\mathbf{x}, t), a_0).$$

Трансформационные свойства полей магнонов  $A_i(\mathbf{x}, t)$  в данной задаче совпадают с рассмотренными ранее. Поля  $X_i(\mathbf{x}, t)$ , сопоставленные фононам, можно переписать в форме  $X_i(\mathbf{x}, t) = x_i + u_i(\mathbf{x}, t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Тогда переменные  $x_i$ , как будет ясно из дальнейшего анализа, приобретают смысл декартовых координат материальных частиц в недеформированном состоянии тела, а величины  $u_i(\mathbf{x}, t)$  являются компонентами вектора смещений среды.



Соотношение (1.9.2) позволяет ввести локальные дифференциальные формы. Полям магнонов  $A_i(\mathbf{x}, t)$  сопоставляются формы Картана

$$\omega_s(A, dA) = \omega_s(A, \partial_\mu A) dx_\mu, \quad dA_s = \partial_\mu A_s dx_\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \\ x_0 = t, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3),$$

которые совпадают с обсуждавшимися ранее. Акустические фононы описываются локальными дифференциальными инвариантами, которые характеризуют дисторсию среды:

$$\partial_\mu X_s = \delta_{\mu s} + \partial_\mu u_s(\mathbf{x}, t), \quad dX_s = \partial_\mu X_s dx_\mu.$$

Наиболее общее выражение для плотности функции Лагранжа фононов, инвариантное относительно вращений кристалла как целого и содержащее минимальное число производных, имеет вид

$$L_e = \frac{1}{2} \rho_0 (\partial_t u_s)^2 - w_e(\eta_{ij}), \quad (1.9.3)$$

где  $\rho_0 = \text{const}$  — плотность среды в недеформированном состоянии. Мы предполагаем, что плотность нелинейно-упругой энергии среды  $w_e$  зависит только от лагранжева тензора деформаций

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial X_s}{\partial x_i} \frac{\partial X_s}{\partial x_j} - \delta_{ij} \right] = \frac{1}{2} [\partial_i u_j + \partial_j u_i + \partial_i u_s \partial_j u_s]. \quad (1.9.4)$$

Тензор  $\eta_{ij}$  инвариантен относительно глобальных вращений деформируемого тела:

$$X_i \rightarrow \tilde{D}_{ik} X_k.$$

В данном случае постоянная ортогональная матрица  $\tilde{D}$  описывает вращение кристалла как целого в обычном координатном пространстве.

Плотность лагранжиана фононов (1.9.3) полностью соответствует традиционному описанию нелинейно-упругой динамики кристаллов (см. раз. 1.4).

Плотность функции Лагранжа голдстоуновских магнонов  $L_m$  совпадает с (1.6.13).

Лагранжиан  $\int L_{\text{me}} d^3\mathbf{x}$  магнитоупругих взаимодействий нарушает симметрию системы полей  $u_i$ ,  $A_j$  относительно вращений в спин-овом пространстве. В то же время, при учете магнитоупругой связи должен сохраняться полный момент импульса спиновой и упругой подсистем кристалла. Следовательно, плотность функции Лагранжа  $L = L_m + L_e + L_{\text{me}}$  должна оставаться инвариантной при произвольных вращениях магнитного кристалла как целого. Удовлетворяющее этому требованию выражение для плотности функции Лагранжа  $L_{\text{me}}$  следует строить из производных  $\partial X_k / \partial x_s$  и векторных функций, зависящих от полей магнонов и определенных относительно неподвижной системы

координат в спиновом пространстве. Наиболее важными оказываются величины

$$\begin{aligned} S_{i0}(\mathbf{x}, t) &= D_{in}(\mathbf{x}, t) [b_n + a_{np}\omega_p(A, \partial_t A)], \\ l_{i\nu}(\mathbf{x}, t) &= D_{in}(\mathbf{x}, t) l_{n\nu}^{(0)}, \end{aligned} \quad (1.9.5)$$

совпадающие с проекциями плотности спинового момента

$$\mathbf{S}_0 = (S_{10}, S_{20}, S_{30})$$

магнетика и антиферромагнитных векторов

$$\mathbf{l}_\nu = (l_{1\nu}, l_{2\nu}, l_{3\nu})$$

на оси неподвижной системы координат в спиновом пространстве. Векторы

$$\mathbf{l}_\nu^{(0)} = (l_{1\nu}^{(0)}, l_{2\nu}^{(0)}, l_{3\nu}^{(0)}) = \text{const}$$

задают в той же системе координат обменную структуру магнетика в невозбужденном состоянии.

Комбинации

$$\begin{aligned} K_j &= \frac{\partial X_i}{\partial x_j} S_{i0} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} D_{in} [b_n + a_{np}\omega_p(A, \partial_t A)], \\ L_{j\nu} &= \frac{\partial X_i}{\partial x_j} l_{i\nu} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} D_{in} l_{n\nu}^{(0)} \end{aligned} \quad (1.9.6)$$

остаются инвариантными при одновременных глобальных вращениях магнитного кристалла:

$$D_{in} \rightarrow \tilde{D}_{ik} D_{kn}, \quad S_{i0} \rightarrow \tilde{D}_{ik} S_{k0}, \quad X_i \rightarrow \tilde{D}_{ik} X_k. \quad (1.9.7)$$

Повороты спиновых и пространственных векторов деформированного тела осуществляются относительно неподвижных систем отсчета в спиновом и координатном пространствах соответственно и характеризуются одной и той же постоянной ортогональной матрицей  $\tilde{D}$ . Напомним, что в (1.9.5), (1.9.6) векторным индексом является только индекс  $i$ . Координаты  $x_j$  служат «метками» материальных частиц недеформированного тела. Они не реагируют на вращения (1.9.7), затрагивающие координаты  $X_i(\mathbf{x}, t)$  частиц деформированного кристалла.

Ввиду слабости магнитоупругих взаимодействий инварианты, содержащие производные от матриц  $D$ , менее важны в длинноволновом пределе. Такими инвариантами будут, например,

$$K_{jp} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial S_{i0}}{\partial x_p}, \quad L_{jp\nu} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial l_{i\nu}}{\partial x_p}.$$

Другие инварианты можно построить из производных  $\partial X_i / \partial x_j$  и форм

$$\Omega_m(A, \partial_j A) = D_{mn} \omega_n(A, \partial_j A),$$

которые определяют локальные повороты спинов относительно неподвижной системы координат в спиновом пространстве. Это будут инварианты

$$P_{ij} = \frac{\partial X_m}{\partial x_i} \Omega_m(A, \partial_j A).$$

Плотность потока спинового момента  $\mathbf{S}_r = (S_{1r}, S_{2r}, S_{3r})$  (см. (1.6.22)) непосредственно связана с пространственными переменными и также должна быть использована для построения инвариантов в разложении магнитоупругой энергии кристалла:

$$T_{ij} = \frac{\partial X_m}{\partial x_i} S_{mj} = -\frac{\partial X_m}{\partial x_i} D_{mn} [c_{np,js} \omega_p(A, \partial_s A) + d_{n,j}].$$

Содержащие минимальное число производных инварианты

$$\eta_{ij}, \quad K_j, \quad L_{j\nu}, \quad K_{jp}, \quad L_{jp\nu}, \quad P_{ij}, \quad T_{ij} \quad (1.9.8)$$

являются базисными. Они могут быть зависимыми только при специальных выборах феноменологических постоянных:

$$c_{np,js} \sim \delta_{np} c_{js}$$

или

$$c_{np,js} \sim (\delta_{np} \mathbf{b}^2 - b_n b_p) c_{js}, \quad c_{np,js} \sim \left[ \delta_{np} (I_\nu^{(0)})^2 - l_{n\nu}^{(0)} l_{p\nu}^{(0)} \right] c_{js}$$

(по  $\nu$  нет суммирования).

С двумя последними из перечисленных вариантов мы уже встречались (см. (1.8.3), (1.8.9)).

В общем случае плотность лагранжиана магнитоупругих взаимодействий  $L_{\text{ме}}$  является функцией базисных инвариантов (1.9.8). В справедливости утверждения можно убедиться [76], воспользовавшись следующей теоремой.

Инвариантной относительно вращений функцией  $f(\mathbf{V}^1, \mathbf{V}^2, \dots, \mathbf{V}^n)$  от  $n$  векторов  $\mathbf{V}^A = (V_1^A, V_2^A, V_3^A)$  может быть только функция  $f(\pi^{AB}, \dots, \Delta^{ABC})$  от величин  $\pi^{AB} = V_i^A V_i^B$  и  $\Delta^{ABC} = \varepsilon_{ijk} V_i^A V_j^B V_k^C$ .

В нашей задаче все возможные комбинации подобного типа выражаются через базисные инварианты (1.9.8). Например, используя соотношения

$$\varepsilon_{ijk} \det \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \right\| = \varepsilon_{lmn} \frac{\partial X_i}{\partial x_l} \frac{\partial X_j}{\partial x_m} \frac{\partial X_k}{\partial x_n}, \quad \det \|2\eta + E\| = \det^2 \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \right\|,$$

нетрудно показать, что

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial X_i}{\partial x_p} S_{jr} S_{k0} = \frac{1}{\sqrt{\det \|2\eta + E\|}} \varepsilon_{lmn} (2\eta_{pl} + \delta_{pl}) T_{mr} K_n.$$

Здесь  $E$  — единичная  $3 \times 3$ -матрица.

Изложенная теория согласуется с описанием магнитоупругих взаимодействий в рамках модели магнитных подрешеток. Так, для  $\text{UO}_2$  в обменном приближении квадратичная по спинам плотность магнитоупругости в рамках подхода Ландау–Лифшица приведена в [79]:

$$w_{\text{me}}^{\text{ex}} = -\frac{\Lambda}{2} (\mathbf{l}_1^2 u_{11} + \mathbf{l}_2^2 u_{22} + \mathbf{l}_3^2 u_{33}) - \frac{\Lambda_1}{2} \mathbf{m}^2 u_{ss}. \quad (1.9.9)$$

Ввиду малости ангармонизма упругой подсистемы, выражение (1.9.9) записано в линейном по смещениям приближении;  $u_{si} = (\partial_s u_i + \partial_i u_s)/2$  — линейная часть тензора  $\eta_{si}$ ,  $\Lambda$ ,  $\Lambda_1$  — постоянные магнитоупругой связи.

С помощью результатов предыдущего раздела легко убедиться, что выражению (1.9.9) в контексте подхода Андреева–Марченко–Волкова–Желтухина следует сопоставить инвариантную плотность энергии

$$w_{\text{me}}^{\text{ex}} = -\frac{\Lambda}{2} \left( (\mathbf{L}_1)^2 \eta_{11} + (\mathbf{L}_2)^2 \eta_{22} + (\mathbf{L}_3)^2 \eta_{33} \right) - \frac{\Lambda_1}{2} \eta_{kk} K_s^2, \quad (1.9.10)$$

где  $\mathbf{L}_\nu = (L_{1\nu}, L_{2\nu}, L_{3\nu})$  (см. (1.8.23), (1.9.4), (1.9.6)).

Формулы (1.9.9) и (1.9.10) совпадают в главном линейном по смещениям приближении. Выражению (1.9.10) соответствует плотность функции Лагранжа

$$L_{\text{me}}^{\text{ex}} = \sum_{\nu=1}^3 \left[ \frac{\Lambda_1}{2\tilde{B}^2} \eta_{kk} \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_\nu} D_{in} \omega_n(A, \partial_t A) \right)^2 + \frac{\Lambda^2}{2} \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_\nu} D_{i\nu} \right)^2 \eta_{\nu\nu} \right]. \quad (1.9.11)$$

Мы учли, что

$$l_{n\nu}^{(0)} = l \delta_{n\nu}, \quad b_n = 0, \quad a_{np} = \frac{\delta_{np}}{\tilde{B}}$$

(см. предыдущий раздел).

Поскольку  $K_s^2 \approx \omega_s^2(A, \partial_t A)/\tilde{B}^2$ , первое слагаемое в правой части формулы (1.9.11) приводит к перенормировке обменных постоянных в лагранжиане кристалла  $\int (L_e + L_{\text{me}} + L_{\text{m}}) d^3\mathbf{x}$ , которая обусловлена изменением расстояний между магнитными ионами при деформациях среды:

$$a_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\tilde{B}} \rightarrow \tilde{a}_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\tilde{B}} \left( 1 + \frac{\Lambda_1}{\tilde{B}} \eta_{kk} \right).$$

Ввиду малости магнитоупругих деформаций  $|\Lambda_1 \eta_{kk}/\tilde{B}| \ll 1$  первым слагаемым в (1.9.11) в главном приближении можно пренебречь.

Плотность энергии упругих деформаций для кристаллов кубической сингонии, к которым относится  $\text{UO}_2$ , с точностью до  $O(\eta^2)$  есть

$$w_e = \frac{c_{11}}{2} [\eta_{11}^2 + \eta_{22}^2 + \eta_{33}^2] + c_{12} [\eta_{11}\eta_{22} + \eta_{11}\eta_{33} + \eta_{22}\eta_{33}] + \\ + 2c_{44} [\eta_{23}^2 + \eta_{13}^2 + \eta_{12}^2],$$

где  $c_{ij}$  — упругие модули кристалла. Неравенства

$$c_{11} > 0, \quad c_{11} > \max(c_{12}, -2c_{12}), \quad c_{44} > 0$$

гарантируют положительную определенность энергии  $w_e$ .

## Глава 2

# НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ИЗОТРОПНОГО ФЕРРОМАГНЕТИКА. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ В ТЕОРИИ СОЛИТОНОВ

## 2.1. Метод обратной задачи рассеяния и солитоны

*Открытие Гарднером, Грином, Кру-  
скалом и Миурой в 1967 г. того фак-  
та, что для уравнения КдФ существует  
аналитический метод решения задачи  
Коши, и сделанное впоследствии откры-  
тие, показавшее, что аналогичные ме-  
тоды применимы также к СГ-уравнению  
и другим нелинейным уравнениям, вы-  
звали революцию в нелинейной физике,  
изменившую наши взгляды и подход ко  
многим нелинейным задачам. Нет ника-  
ких признаков, что эта революция идет  
на убыль, а то, что ею уже достигну-  
то, имеет, по-видимому, непреходящую  
ценность.*

*Р. Буллаф, Ф. Кодри. «Солитоны»*

Первые исследования коллективных возбуждений в магнетиках свя-  
заны с понятием малоамплитудных спиновых волн. Рассматривались  
спиновые волны, формирующиеся при слабых внешних воздействиях на  
среду, которая находилась в состоянии, близком к состоянию устойчи-  
вого равновесия, например к состоянию с однородным распределением  
намагниченности. Эффективным и фактически единственным методом  
анализа спиновых волн был путь линеаризации уравнений нелинейной  
динамики магнетиков около основного состояния среды с последую-  
ющим учетом ангармонизмов по теории возмущений. Как известно,  
линейные уравнения удовлетворяют принципу суперпозиции. Принцип  
суперпозиции чрезвычайно облегчает анализ линейных волновых про-  
цессов: сколь угодно сложное волновое поле с помощью преобразова-  
ния Фурье можно представить как сумму простейших гармонических  
волн. Это мощный математический прием. Любое изменение формы  
произвольного волнового пакета можно описать, находя изменение  
характеристик простейших гармонических волн, составляющих пакет.

При квантовом описании малоамплитудных колебаний намагничен-  
ности полному набору линейных спин-волновых мод сопоставляется

газ невзаимодействующих квазичастиц — магнонов. Квантовые числа магнонов характеризуют степень возбуждения той или иной ветви спектра спиновых волн.

Процедуру Фурье и связанную с ней концепцию квазичастиц можно применять не всегда. При сильных внешних воздействиях на среду колебания намагниченности кристалла описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, для которых принцип суперпозиции не выполняется. Распределения намагниченности реального кристалла включают такие сильно нелинейные объекты, как доменные границы, кольцевые и спиральные домены, регулярно упорядоченные доменные структуры. Узоры из магнитных доменов и отдельные доменные границы содержат многочисленные нелинейные дефекты: магнитные дислокации, дисклинации, вихри, блоховские линии, блоховские точки и другие нетривиальные нелинейные объекты. Некоторые из них являются праобразами дефектов линейной теории упругости. В то же время нелинейные дефекты, будучи по своей внутренней структуре богаче дефектов линейной теории упругости, обладают специфическими особенностями взаимодействия.

Значение нелинейных магнитных возбуждений и дефектов велико: они несут важную информацию о структуре и динамике среды, управляют процессами перемагничивания, играют важную роль в процессах энергообмена между разными подсистемами кристалла, участвуют в явлениях переноса и т. д. Физические свойства таких состояний не могут быть получены ни в каком конечном порядке линейной теории возмущений.

Отличительной чертой даже слабонелинейных волн намагниченности являются процессы их взаимодействия друг с другом. В процессе взаимодействия нелинейные волны могут трансформироваться до неузнаваемости. Например, две нелинейные волны, встретившись, могут исчезнуть, дав начало новой волне, частота которой равна сумме или разности частот исходных волн.

В этой монографии рассматриваются магнитные среды с пространственной дисперсией нелинейных волн намагниченности, в условиях, когда можно пренебречь потерями энергии на релаксацию волн.

Оказалось, что при сильных внешних воздействиях в любых конденсированных средах, в которых есть дисперсия, но малы потери энергии, полный набор нелинейных нормальных мод включает не только волны, аналогичные возникающим при слабых воздействиях, но и совершенно новые частицеподобные волны — солитоны. Более того, именно солитоны определяют основные физические свойства конденсированных сред при сильных внешних воздействиях.

Для пояснения механизма образования солитонов напомним, что в средах с дисперсией волны различной длины распространяются с разными фазовыми скоростями. Поэтому в линейной теории любой волновой пакет, составленный из гармонических волн, по истечении некоторого времени всегда распадается на составляющие его волны.

Подчеркнем, что при этом энергия волнового пакета, конечно, сохраняется, хотя сам волновой пакет расплывается: его амплитуда уменьшается. Однако при наличии даже слабой нелинейной связи между гармоническими волнами, составляющими волновой пакет, возникают взаимодействия, стремящиеся сжать пакет или же увеличить крутизну фронта результирующей волны. Происходит нелинейная перекачка энергии от одних гармонических составляющих волнового пакета к другим, и это уравнивает его расплывание из-за дисперсии.

В результате баланса двух конкурирующих эффектов в конденсированных средах и, в частности, в магнетиках, формируются особые нелинейные волны, получившие название солитонов. Отличительная черта солитонов в том, что они подобны частицам. Как и частицы, солитоны локализованы в пространстве и сохраняют свою форму и скорость не только при собственном движении, но даже после столкновения с другими солитонами. После столкновения друг с другом солитоны разлетаются, восстанавливая форму и скорость, которые имели до соударения. Результат столкновения внешне выглядит так, как будто «центр тяжести» и фаза внутренних колебаний каждого из солитонов приобрели дополнительный постоянный сдвиг.

Поскольку формирование солитонов определяется свойствами, присущими любым конденсированным средам, возможно изучение нелинейных систем различной физической природы в рамках универсальных моделей. Оказалось, что теоретическое описание нелинейных явлений в реальных сложных системах может быть получено посредством построения в каждой области характерных пространственно-временных масштабов своих упрощенных моделей, корректно учитывающих основные нелинейные взаимодействия и, в то же время, допускающих точные решения. Для построения универсальных моделей были развиты специальные варианты нелинейной теории возмущений [1, 2].

Наконец, самое главное — это то, что удалось открыть мощные методы интегрирования большого числа универсальных моделей. В некотором смысле, новые методы обобщают преобразование Фурье для линейных систем. С их помощью впервые удалось аналитически описать сильно нелинейные состояния среды. В основе новой математической техники интегрирования нелинейных уравнений в частных производных лежат различные варианты так называемого метода обратной задачи рассеяния [1–10].

Классический вариант обратной задачи рассеяния наиболее распространен для интегрирования эволюционных (волновых) нелинейных уравнений в частных производных, которые содержат только одну пространственную координату  $x$  и время  $t$ .

Для возможности применения метода обратной задачи рассеяния исходное нелинейное уравнение необходимо представить в форме условия совместности

$$[\partial_x - U(\lambda), \partial_t - V(\lambda)] \equiv \partial_t U(\lambda) - \partial_x V(\lambda) + [U(\lambda), V(\lambda)] = 0 \quad (2.1.1)$$



некоторой системы линейных дифференциальных уравнений для вектор-функции  $\chi(\lambda)$ :

$$\partial_x \chi = U(\lambda)\chi, \quad \partial_t \chi = V(\lambda)\chi. \quad (2.1.2)$$

Элементы матриц  $U$  и  $V$  содержат полевые переменные и их производные по координатам  $x$  и  $t$ , в терминах которых записано исходное нелинейное дифференциальное уравнение. Обратим внимание на то, что величины  $U$ ,  $V$ ,  $\chi$  зависят не только от координат  $x$  и  $t$ , но еще и от дополнительного комплексного параметра  $\lambda$ . Для дальнейшего анализа важно, что  $U(\lambda)$  и  $V(\lambda)$  являются мероморфными функциями от параметра  $\lambda$ . Напомним, что функция называется мероморфной в некоторой ограниченной области, если она является там аналитической функцией всюду, за исключением конечного числа полюсов. Отметим также, что после выполнения всех операций в формуле (2.1.1) соотношение (2.1.1) оказывается тождественным исходному нелинейному уравнению для рассматриваемых полей при произвольных значениях параметра  $\lambda$ .

Система (2.1.2) и условие ее совместности (2.1.1) допускают геометрическую интерпретацию. Соотношения (2.1.2) можно трактовать как равенство нулю ковариантных производных от вектор-функции  $\chi$  на некотором многообразии с коэффициентами связности (символами Кристоффеля)  $U$  и  $V$ . Тогда условие совместности (2.1.1) равносильно утверждению, что связность  $U$ ,  $V$  имеет нулевую кривизну. Поэтому запись исходного нелинейного уравнения в виде (2.1.1) иногда называют представлением нулевой кривизны. Впервые подобное представление появилось в работах Лакса [4], затем оно было обобщено Захаровым и Шабатом [5]. Поэтому матричные функции  $U$  и  $V$  называют также обобщенной парой Лакса, представлением Захарова–Шабата, или просто  $U$ – $V$ -парой [1, 2, 6–11].

Представление исходного нелинейного дифференциального уравнения в форме (2.1.1) более универсально, чем система (2.1.2). Дело в том, что уравнения (2.1.2) в каждой конкретной задаче немного видоизменяют в процессе расчетов. Например, для того чтобы сохранить неизменность во времени предписанных при  $x \rightarrow \pm\infty$  асимптотик у фундаментальных решений системы (2.1.2).

Представление (2.1.1), (2.1.2) используется для перехода от исходных динамических переменных (полей) к новым обобщенным переменным (данном рассеяния). В новых переменных нелинейное уравнение распадается на ряд не зацепляющихся линейных дифференциальных уравнений. После того как решение последних найдено, обращением замены переменных получают решение исходного нелинейного уравнения. Таким образом, все этапы интегрирования нелинейного уравнения методом обратной задачи рассеяния связаны с решением определенных линейных задач. Тем самым открывается возможность детального описания существенно нелинейных явлений и процессов с той же

степенью подробности, с какой изучены соответствующие линейные задачи.

Используемые при интегрировании обобщенные переменные отвечают допустимым типам возбуждений в системе и естественным образом разбиваются на две группы.

К первой группе принадлежит дискретный набор переменных, которым отвечают возбуждения солитонного типа, обладающие замечательным свойством стабильности при взаимодействиях друг с другом. В магнитных средах к возбуждениям солитонного типа относятся, например, доменные границы, уединенные домены, самолокализованные волны намагниченности.

Ко второй группе переменных относятся переменные, непрерывным образом зависящие от спектрального параметра  $\lambda$ , которые в реальном физическом пространстве описывают нелинейные локализованные волны с преобладающим влиянием дисперсии. Такие волны не имеют стационарной формы и расплываются с течением времени.

Хотя перечисленные типы решений хорошо разделены на языке обобщенных переменных, их трудно разделить в пространстве наблюдаемых переменных. Тем не менее, когда начальный волновой пакет рассматривается в течение длительного времени, содержащиеся в нем «радиационные» компоненты расплываются вследствие дисперсии, а солитоны остаются как локализованные возбуждения неизменной формы на фоне осциллирующих волн малой амплитуды.

Разбиение произвольного начального волнового пакета на солитоны по значимости можно поставить в один ряд с таким отличительным свойством, как сохранение формы и скорости солитонов при их движении и взаимодействии друг с другом.

Классический вариант метода обратной задачи рассеяния позволяет детально проследить, как произвольный начальный импульс распадается на набор солитонов и осциллирующий хвост. Однако этот метод связан с изучением свойств аналитичности частных решений вспомогательной линейной системы (2.1.2). Последнее представляет достаточно сложную задачу, сравнительно простое решение которой возможно лишь для быстро убывающих при  $x \rightarrow \pm\infty$  решений исходного нелинейного уравнения. Между тем оказывается, что для построения частных решений уравнений движения в полном исследовании спектральной задачи (2.1.2) нет необходимости. Были предложены прямые методы вычисления точных решений,  $U$ - $V$ -пара которых рациональным образом зависит от спектрального параметра  $\lambda$ : метод полиномиального замыкания [12, 13], процедура «одевания» [7, 14, 15], метод Хироты [16, 17], преобразования Бэклунда (Дарбу) и другие [1, 2, 8, 10, 11, 18].

Из всех перечисленных модификаций традиционной схемы обратной задачи рассеяния процедура «одевания» более универсальна и технически прозрачна. Процедура «одевания» основана на использовании матричной задачи Римана в комплексной  $\lambda$ -плоскости и позволяет по из-

вестному частному решению исходного нелинейного уравнения (2.1.1) строить новые решения. Недостатком метода «одевания» частных решений является то, что он, в отличие от классического варианта обратной задачи рассеяния, не дает решения задачи Коши для исходного эволюционного нелинейного уравнения.

Преимущество процедуры «одевания» в том, что новые решения уравнений движения строятся локально — в окрестности каждой точки  $x, t$ . Последнее позволяет легко исследовать любые решения, а не только быстро убывающие при  $x \rightarrow \pm\infty$ . В частности, этим методом получены нелокализованные в пространстве магнитные возбуждения солитонного типа (солитоны на фоне нелинейных спиновых волн) [19–21]. Главной особенностью таких солитонов по-прежнему остается свойство стабильности при взаимодействиях друг с другом.

Отметим, что решения солитонного типа находятся в явном виде путем чисто алгебраических вычислений. Исследование волн с преобладанием дисперсии требует решения линейных интегральных уравнений и, в общем случае, возможно с привлечением численных методов.

В аналитической механике известна теорема Лиувилля–Арнольда [22], согласно которой уравнения движения гамильтоновой системы с  $N$  степенями свободы в фазовом пространстве размерности  $2N$  могут быть проинтегрированы в квадратурах только при наличии у системы  $N$  (половина размерности фазового пространства) первых интегралов движения в инволюции. При этом само фазовое пространство расслаивается на подмногообразия размерности  $N$ , движение вдоль которых линейно. С формальной точки зрения любое нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных имеет бесконечное число степеней свободы и, следовательно, может быть проинтегрировано в квадратурах лишь при наличии бесконечного числа интегралов движения. Долгое время считали, что такая ситуация не реальна. Тем не менее, оказалось, что полная интегрируемость большого числа универсальных моделей связана с наличием у них бесконечной серии законов сохранения [7, 23, 24]. В [9, 24] на ряде примеров показано, что с точки зрения аналитической механики преобразование метода обратной задачи рассеяния является каноническим преобразованием к переменным действие–угол, «диагонализирующим» функционал энергии рассматриваемой системы. Здесь и далее под интегрируемостью уравнений мы подразумеваем наличие у них скрытой алгебраической симметрии, с помощью которой можно найти все их точные решения в определенном классе функций (например, убывающих на бесконечности). Можно сказать, что динамическая стабильность солитонов гарантирована бесконечной серией законов сохранения.

Среди многообразия солитонов существуют такие, динамическая стабильность которых усилена топологическими причинами. Напомним, что топология изучает свойства отображений, сохраняющиеся

при непрерывных деформациях. С математической точки зрения векторные поля, описывающие топологические солитоны, имеют особенности, которые невозможно устранить непрерывными деформациями векторных полей. С физической точки зрения, для устранения возникшего в системе топологического солитона требуется большая энергия на разрыв характеризующих солитон геометрических связей, на разрушение упорядоченного состояния в большом объеме вещества. Это обстоятельство делает топологические солитоны самыми нелинейными и самыми стабильными из всех имеющихся.

Обобщенное представление Лакса (2.1.1) можно использовать также при вычислении квазипериодических по  $x$  («конечнозонных») решений нелинейных уравнений (см., например, [25–29]).

Конечно, не все нелинейные системы обладают представлением (2.1.1), а значит и не все нелинейные уравнения в частных производных могут быть проинтегрированы с помощью метода обратной задачи рассеяния или его модификаций. Точно так же, как метод Фурье не позволяет проинтегрировать все линейные дифференциальные уравнения. Поэтому возникает вопрос о практической значимости метода обратной задачи рассеяния. В этой связи, прежде всего, следует напомнить свойство универсальности точно интегрируемых уравнений. Универсальность интегрируемых уравнений объясняется тем, что они объединяют наиболее распространенные типы дисперсии с характерными типами нелинейностей и определяются требованиями симметрии, общими для многих физических систем. Число нелинейных явлений, которые (в определенном приближении) могут быть описаны данным уравнением, необычайно велико. Например, уравнение «sine-Gordon» описывает распространение дислокаций в кристаллах, движение доменных границ в ферромагнетиках, распространение магнитного потока по джозефсоновской линии, поведение волн зарядовой плотности, фазовые переходы соизмеримость–несоизмеримость [11, 30–32], может быть использовано для изучения ряда магнитных возбуждений в слабых ферромагнетиках и антиферромагнетиках [33–36].

Кроме того, согласно [8, 11, 37–39], можно развить аппарат теории возмущений, основанный на методе обратной задачи рассеяния, который позволяет исследовать уравнения, близкие к точно интегрируемым. Решения, найденные по такой теории возмущений, нельзя получить ни в каком конечном порядке теории возмущений для линейных мод. Использование теории возмущений существенно расширяет рамки применимости обратной задачи рассеяния и придает еще большую ценность изучению точно интегрируемых моделей.

Следует особо отметить предложенное в работах Склянина, Тахтаджана, Фаддеева [40–42] обобщение метода обратной задачи, которое позволило точно решить многие квантово-механические модели, получающиеся при квантовании интегрируемых классических систем. Оказалось, что квантовый метод обратной задачи рассеяния тесно

связан с методами точного решения двумерных решеточных моделей статистической физики [43, 44] и является естественным обобщением алгебраического анзаца Бете, который использовался ранее при теоретическом описании гейзенберговской цепочки с обменным взаимодействием между ближайшими соседями и атомным спином  $S = 1/2$  [45].

С помощью квантового метода обратной задачи рассеяния и обобщений метода Бете проведено полное исследование [41, 43, 46–50] основного состояния и спектра возбуждений одномерной цепочки спинов с гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^N [J_x \hat{\sigma}_l^x \hat{\sigma}_{l+1}^x + J_y \hat{\sigma}_l^y \hat{\sigma}_{l+1}^y + J_z \hat{\sigma}_l^z \hat{\sigma}_{l+1}^z],$$

где  $\hat{\sigma}_l^\alpha$  — операторы спина  $S = 1/2$ , относящиеся к определенному узлу цепочки. Постоянные параметры  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_z$  управляют типом упорядочения спинов в основном состоянии цепочки (ферро- или антиферромагнитное упорядочение), а также магнитной анизотропией цепочки.

Ярким примером общности и плодотворности квантового метода обратной задачи рассеяния явилось его применение для построения новых аналитических решений одномерной модели Хаббарда в теории магнетизма. Модель Хаббарда описывает сильно коррелированную систему электронов, в которой учитываются как перенос электронов с узла на узел решетки, так и кулоновское отталкивание двух электронов с противоположными спинами на одном узле. Получены также новые результаты в задаче о газе электронов, резонансно взаимодействующих с примесным магнитным центром (проблема Кондо). Кондовские магнетики интересны тем, что в них при относительно небольшом изменении химического состава за счет специфических многочастичных эффектов возможен переход от полностью «локализованного» магнетизма до поведения, напоминающего «коллективизированные» магнетики с малой намагниченностью насыщения (см. [51] и ссылки, приведенные там).

На основе квантового метода обратной задачи рассеяния были развиты эффективные приемы расчета асимптотик корреляционных функций в квантово-механических моделях [42]. В частности, для анизотропной гейзенберговской цепочки вычислена асимптотика коррелятора спинов при больших расстояниях между спинами.

Перечислим основные теоретические результаты по исследованию классических магнитных солитонов.

Возможность применения метода обратной задачи рассеяния к интегрированию уравнений Ландау–Лифшица изотропного квазиодномерного ферромагнетика была впервые установлена в работах [52, 53]. Сформулирована процедура вычисления всех точных решений модели с однородной асимптотикой намагниченности при  $x \rightarrow \pm\infty$  [9, 53].

В [54–57] установлено, что одномерные уравнения Ландау–Лифшица одноосного ферромагнетика также обладают  $U$ – $V$ -парой. Для построения точных решений этих уравнений в [54, 56] предложен упрощенный вариант общей техники интегрирования — метод полиномиального замыкания. Для ферромагнетика с одноосной анизотропией в [55, 58, 59] сформулирован классический вариант обратной задачи рассеяния, который позволяет получить все решения с однородной асимптотикой при  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Непосредственным интегрированием уравнений нелинейной динамики магнетиков найдено много частных решений типа уединенных волн намагниченности [60]. Показано, что некоторые из них можно трактовать как связанное состояние большого числа магнонов. Такие исследования играют важную роль в понимании физической природы нелинейных коллективных возбуждений и являются ориентирами в поиске интегрируемых систем.

В результате непосредственного интегрирования уравнений Ландау–Лифшица для ферромагнетика с анизотропией типа «легкая плоскость» найдено, что в присутствии постоянного магнитного поля, направленного по оси анизотропии, существует несколько типов пространственно локализованных волн намагниченности. В магнитном поле, меньшем определенного критического значения, существуют волны поворота, алгебраические и пульсирующие солитоны [61–64]. При большой величине поля найдены прецессионные солитоны [62].

В [19, 20] предложена процедура интегрирования уравнений ферромагнетика с анизотропией типа «легкая плоскость», основанная на матричной задаче Римана. Метод математически достаточно прост и позволяет исследовать новые типы нелинейных коллективных возбуждений. В частности, этим методом можно проанализировать магнитные возбуждения с неоднородной асимптотикой при  $x \rightarrow \pm\infty$  при наличии направленного вдоль оси анизотропии внешнего магнитного поля.

В работах [57, 65] была найдена обобщенная пара Лакса для одномерных уравнений двухосного ферромагнетика. Матрицы  $U(\lambda)$  и  $V(\lambda)$  представления (2.1.1) в данном случае оказались мероморфными функциями параметра  $\lambda$  не в комплексной плоскости, как это имело место во всех ранее известных задачах, а на римановой поверхности, топологически эквивалентной тору. Модель двухосного ферромагнетика привела к необходимости изучения принципиально нового класса  $U$ – $V$ -пар, зависимость которых от параметра  $\lambda$  выражается через эллиптические функции Якоби. В связи с указанным обстоятельством техника обратной задачи рассеяния не могла быть применена буквально, а требовала обобщения. Важный класс решений солитонного типа для уравнений двухосного ферромагнетика был получен в работах [66–68] непосредственным интегрированием уравнений Ландау–Лифшица, а также в [69, 70] методом Хироты. Необходимое обобщение алгоритма «одевания» частных решений выполнено незави-

симо в работах [71–78]. Основанная на методе «одевания» процедура построения многосолитонных возбуждений в двухосном ферромагнетике обсуждается в [71, 72, 75–78].

Для двухосного ферромагнетика Борисовым предложен классический вариант метода обратной задачи рассеяния, который позволяет решить задачу Коши для уравнения Ландау–Лифшица при начальных распределениях намагниченности с однородной асимптотикой на бесконечности [79].

Конечнозонные решения одноосного и двухосного ферромагнетиков, описывающие модулированные периодически по  $x$  волны намагниченности, найдены в [80–85].

Двумерные и трехмерные волны намагниченности требуют специального рассмотрения, поскольку при переходе к большему числу измерений теряется свойство интегрируемости указанных выше систем. Классический вариант метода обратной задачи рассеяния при переходе к большему числу измерений становится малоэффективным, хотя и позволяет исследовать некоторые частные классы неоднородных волн намагниченности. Например, в [72, 86, 87] аналитически описаны цилиндрически симметричные магнитные возбуждения, а в [88, 89] найдены двумерные солитоноподобные волны прецессии и магнитные дисклинации в изотропных ферро- и антиферромагнетиках.

Основные идеи, методы и результаты теории нелинейных интегрируемых уравнений в  $(2 + 1)$ -измерениях изложены в [90, 91]. Большой класс точных решений эффективных уравнений изотропного антиферромагнетика в  $(3 + 1)$ -пространстве найден в работах [92, 93]. Все они характеризуются типичными эффектами для сред без дисперсии: укрупнением фронта и неоднозначностью решений.

Доменные границы и нелинейные волны намагниченности в магнетиках с несколькими магнитными подрешетками богаче по своей внутренней структуре, обладают рядом особенностей и пока еще не исследованы так подробно, как доменные стенки и локализованные волны в простом ферромагнетике с одной подрешеткой. Трудности математического расчета состоят в том, что уравнения Ландау–Лифшица для магнетиков с несколькими подрешетками представляют более сложную систему нелинейных уравнений.

Отмечалось [94, 95], что уравнения Ландау–Лифшица для сред с несколькими магнитными подрешетками могут быть новым источником физически содержательных интегрируемых моделей. Однако интегрируемость полных динамических уравнений даже для двухподрешеточных магнетиков до сих пор не доказана. Путем непосредственного интегрирования уравнений Ландау–Лифшица изучены некоторые типы уединенных волн намагниченности лишь в двухподрешеточных магнетиках [33–36, 67, 96, 97].

Мы полагаем, что важную роль в изучении динамики магнетиков с несколькими магнитными подрешетками могут сыграть феноменологические уравнения, впервые предложенные в работах Андреева–



Марченко–Волкова–Желтухина на основе концепции спонтанного нарушения симметрии группы спиновых вращений, относительно которой обменные взаимодействия инвариантны.

В рамках такого подхода были выявлены [73, 98–103] физически содержательные интегрируемые осесимметричная и асимметричная киральные модели, которые эффективны при анализе нелинейной динамики многоподрешеточных неколлинеарных ферри- и антиферромагнетиков. Например, осесимметричная модель [102] описывает магнитные возбуждения в шестиподрешеточных антиферромагнетиках со структурой типа  $\text{YMnO}_3$ . Получены «многоподрешеточные» солитоны и исследовано их взаимодействие [73, 102, 103]. Установлено [102, 104], что уравнения Ландау–Лифшица двухподрешеточного изотропного ферромагнетика при физически оправданных приближениях также могут быть сведены к интегрируемой модели. Перечисленные результаты будут изложены в главах 6 и 7.

В данной главе в разделах 2.2–2.8 мы поясним общую технику метода обратной задачи рассеяния на примере интегрирования уравнений Ландау–Лифшица изотропного квазиодномерного ферромагнетика. Изложим простой способ построения необходимой  $U$ – $V$ -пары, а затем с ее помощью покажем, как задача об эволюции начального распределения намагниченности сводится к решению ряда линейных задач. Проиллюстрируем общий алгоритм построения бесконечной серии законов сохранения для интегрируемых моделей. Поясним связь солитонных состояний квазиклассической модели ферромагнетика со спиновыми комплексами Бете в квантовой цепочке спинов. На примере модели изотропного ферромагнетика в разделах 2.9 и 2.10 познакомим с универсальной процедурой «одевания» частных решений интегрируемых уравнений, впервые предложенной в работах Захарова и Шабата. В разделе 2.11 изложим метод построения  $U$ – $V$ -пар с движущимся спектральным параметром [105, 106], который по известным интегрируемым нелинейным уравнениям в частных производных с постоянными коэффициентами позволяет строить новые интегрируемые уравнения с переменными коэффициентами. Плодотворность метода проиллюстрируем на примере теоретического описания кольцевых солитонов в изотропном ферромагнетике [72, 86].

Ввиду важности моделей квазиодномерного ферромагнетика с одноосной и двухосной магнитной анизотропией, в следующих главах 3–5 специально обсудим специфические особенности метода обратной задачи рассеяния и процедуры «одевания» для соответствующих уравнений Ландау–Лифшица. Для ферромагнетиков с одноосной и двухосной магнитной анизотропией приведем полную классификацию возможных солитонных состояний. Покажем, что процедура «одевания» позволяет аналитически описать мультисолитонные возбуждения на фоне нелокализованных нелинейных волн намагниченности, анализировать взаимодействия солитонов друг с другом и с нетривиальным фоном.



## 2.2. Основные уравнения квазиодномерной динамики изотропного ферромагнетика

*Нельзя удержаться от мысли, что эти математические формулы обладают независимым существованием и собственным рассудком, что они знают больше, чем те, кто их открыл, и что мы выводим из них больше, чем было вложено в них изначально.*

Г. Герц

### 2.2.1. Континуальная модель. Построение $U$ – $V$ -пары

Рассмотрим одномерные уравнения Ландау–Лифшица для изотропного ферромагнетика с одной магнитной подрешеткой:

$$\partial_t \mathbf{M} = -\alpha \gamma [\mathbf{M} \times \partial_x^2 \mathbf{M}], \quad \mathbf{M}^2 = M_0^2 = \text{const.} \quad (2.2.1)$$

Здесь  $\alpha > 0$  — постоянная неоднородного обменного взаимодействия,  $M_0$  — номинальная намагниченность на единицу длины среды,  $\gamma > 0$  — магнитомеханическое отношение. В уравнениях (2.2.1) учтены лишь основные (обменные) взаимодействия. Свободная энергия изотропного квазиодномерного ферромагнетика имеет вид

$$W = \frac{\alpha}{2} \int (\partial_x \mathbf{M})^2 dx.$$

Такая модель может быть использована, например, для описания нелинейных возбуждений в структурах, представляющих совокупность цепочек из магнитных атомов, когда можно пренебречь взаимодействиями атомов разных цепочек, а также релятивистскими и магнитостатическими взаимодействиями атомов внутри каждой из цепочек.

Посредством масштабных преобразований введем безразмерные переменные  $\mathbf{S}$ ,  $t$ ,  $x'$ :

$$\mathbf{S} = -\frac{\mathbf{M}}{M_0}, \quad t' = \gamma M_0 t, \quad x' = \frac{x}{\sqrt{\alpha}}$$

и перепишем уравнения (2.2.1) в форме, удобной для анализа:

$$\partial_{t'} \mathbf{S} = [\mathbf{S} \times \partial_{x'}^2 \mathbf{S}], \quad \mathbf{S}^2 = 1. \quad (2.2.2)$$

Далее будем опускать «штрих» над переменными  $x'$ ,  $t'$ .

Согласно общей схеме метода обратной задачи рассеяния, необходимо найти такие матрицы  $U(\lambda)$  и  $V(\lambda)$ , чтобы уравнение (2.2.2) было эквивалентно коммутационному представлению

$$[\partial_x - U, \partial_t - V] \equiv \partial_t U - \partial_x V + [U, V] = 0. \quad (2.2.3)$$

Явный вид матриц  $U$  и  $V$  в представлении (2.2.3) определяется симметрией исходного нелинейного уравнения в частных производных. В данном случае — инвариантностью уравнений (2.2.2) относительно вращений в трехмерном спиновом пространстве. Форма записи (2.2.3) уравнений (2.2.2) будет инвариантной относительно преобразований группы  $SO(3)$  спиновых вращений, если матрицы  $U$  и  $V$  преобразуются по линейному представлению этой группы как компоненты трехмерного вектора. Чтобы удовлетворить указанному требованию, будем искать  $U$  и  $V$  в форме разложения по генераторам  $\sigma_s$  ( $s = 1, 2, 3$ ) группы вращений:

$$U = -i u_s \sigma_s, \quad V = -i v_s \sigma_s. \quad (2.2.4)$$

Выберем двумерное представление генераторов  $\sigma_s$ , реализованное матрицами Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\sigma_s \sigma_p = I \delta_{sp} + i \varepsilon_{spq} \sigma_q.$$

Здесь  $\delta_{sp}$  — символ Кронекера,  $\varepsilon_{spq}$  — антисимметричный единичный тензор ( $\varepsilon_{123} = 1$ ).

Пусть  $SU(2)$  — группа унитарных унимодулярных  $2 \times 2$ -матриц. Используем локальный изоморфизм групп  $SU(2)$  и  $SU(3)$ , который выражается формулой

$$g^\dagger \sigma_p g = \sigma_k D_{kp}, \quad (2.2.5)$$

где

$$\begin{aligned} g &\in SU(2) & (g^\dagger g = I, \det g = 1); \\ D &\in SO(3) & (D^T D = E, \det D = 1). \end{aligned}$$

Верхние индексы «†» и «Т» указывают на операции эрмитового сопряжения и транспонирования соответствующих матриц,  $E$  — единичная матрица  $3 \times 3$ .

С помощью формулы (2.2.5) нетрудно убедиться, что на множестве матриц вида (2.2.4) преобразования

$$U \rightarrow g^\dagger U g = -i \sigma_k D_{kp} u_p, \quad V \rightarrow g^\dagger V g = -i \sigma_k D_{kp} v_p$$

определяют линейное представление группы  $SO(3)$  так, что при спиновых вращениях величины  $u_p$  ( $v_p$ ) в разложении (2.2.4) преобразуются как компоненты вектора.

Соотношение (2.2.3) в переменных  $u_p$ ,  $v_s$  принимает вид векторного уравнения

$$\partial_t \mathbf{u} - \partial_x \mathbf{v} + 2 [\mathbf{u} \times \mathbf{v}] = 0, \quad (2.2.6)$$

которое инвариантно относительно вращений в спиновом пространстве и должно быть равносильным уравнению движения изотропного ферромагнетика (2.2.2). Поскольку в уравнение (2.2.2) входит вектор  $\mathbf{S}$  и его производные, будем искать  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  в форме разложения по линейно независимым векторам, образованным из вектора  $\mathbf{S}$  и его производных:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \delta_1 \mathbf{S} + \delta_2 \partial_x \mathbf{S} + \delta_3 \partial_t \mathbf{S} + \delta_4 [\mathbf{S} \times \partial_x \mathbf{S}] + \delta_5 [\mathbf{S} \times \partial_t \mathbf{S}] + \dots, \\ \mathbf{v} &= \gamma_1 \mathbf{S} + \gamma_2 \partial_x \mathbf{S} + \gamma_3 \partial_t \mathbf{S} + \gamma_4 [\mathbf{S} \times \partial_x \mathbf{S}] + \gamma_5 [\mathbf{S} \times \partial_t \mathbf{S}] + \dots\end{aligned}\quad (2.2.7)$$

Постоянные  $\delta$ ,  $\gamma$  и число членов в разложении (2.2.7) подберем так, чтобы уравнения (2.2.2) и (2.2.6) были эквивалентными. Опуская алгебраические вычисления, приведем один из возможных вариантов выбора векторов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{u} = \delta_1 \mathbf{S}, \quad \mathbf{v} = \gamma_1 \mathbf{S} + \gamma_4 [\mathbf{S} \times \partial_x \mathbf{S}]. \quad (2.2.8)$$

Здесь коэффициенты  $\delta_1$  и  $\gamma_1$ ,  $\gamma_4$  связаны соотношениями

$$\delta_1 = \gamma_4, \quad \gamma_1 = -2\delta_1\gamma_4. \quad (2.2.9)$$

Для возможности применения метода обратной задачи рассеяния необходимо использовать такую параметризацию соотношений (2.2.9), чтобы все коэффициенты в разложении (2.2.8) были мероморфными функциями независимого параметра. В настоящем случае этому требованию легко удовлетворить, полагая

$$\delta_1 = \gamma_4 = \frac{\lambda}{2}, \quad \gamma_1 = -\frac{\lambda^2}{2},$$

где  $\lambda$  — произвольный комплексный параметр (множитель  $1/2$  введен для упрощения алгебраических выражений).

Таким образом,  $U$ – $V$ -пара для уравнений (2.2.2) имеет вид

$$\begin{aligned}U(\lambda) &= \frac{\lambda}{2i} S_k \sigma_k \equiv \frac{\lambda}{2i} S, \\ V(\lambda) &= \frac{1}{2i} (-\lambda^2 S_p + \lambda [\mathbf{S} \times \partial_x \mathbf{S}]_p) \sigma_p \equiv -\frac{1}{2i} \lambda^2 S - \frac{\lambda}{2} S \partial_x S,\end{aligned}\quad (2.2.10)$$

где  $S = S_p \sigma_p$ .

Симметрия группы  $SO(3)$  обменных взаимодействий является определяющей, поэтому простое обобщение изложенной схемы позволяет воспроизвести обобщенные пары Лакса для всех известных интегрируемых уравнений теории магнетизма, в том числе для моделей, включающих энергию релятивистских магнитоанизотропных взаимодействий.

### 2.2.2. Вспомогательные линейные уравнения

Важную роль в методе обратной задачи рассеяния играют вспомогательные линейные уравнения, для которых (2.2.3) является условием совместности. Для модели (2.2.2) в качестве одного из вспомогательных уравнений выберем

$$\partial_x \chi = U(\lambda) \chi, \quad (2.2.11)$$

где матрица  $U(\lambda)$  определена формулой (2.2.10). Второе уравнение обсудим чуть позже.

Из теории дифференциальных уравнений известно, что общее решение линейной системы (2.2.11) можно представить в форме суперпозиции каких-либо двух линейно независимых решений (вектор-функций  $\chi^{(1)}$  и  $\chi^{(2)}$ ):

$$\chi = c_1 \chi^{(1)} + c_2 \chi^{(2)}, \quad (2.2.12)$$

где  $c_1, c_2$  — произвольные, независимые от  $x$  множители. Для дальнейшего анализа удобно объединить вектор-столбцы  $\chi^{(\alpha)}$  ( $\alpha = 1, 2$ ) в  $2 \times 2$ -матрицу фундаментальных решений:

$$\varphi = (\chi^{(1)}, \chi^{(2)}).$$

Тогда общее решение (2.2.12) системы (2.2.11) запишется в форме

$$\chi = \varphi \mathbf{c},$$

где  $\mathbf{c}$  — произвольный комплексный двумерный вектор, который может зависеть только от переменных  $\lambda$  и  $t$ .

Будем рассматривать распределения намагниченности с однородной асимптотикой на бесконечности:

$$\mathbf{S} \rightarrow (0, 0, 1) \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Тогда при  $|x| \rightarrow \infty$  уравнение (2.2.11) упрощается и приобретает вид

$$\partial_x \chi \cong \frac{\lambda}{2i} \sigma_3 \chi. \quad (2.2.13)$$

Система (2.2.13) имеет два линейно независимых решения, которые образуют матрицу  $2 \times 2$

$$\varphi_0 = \exp \left( \frac{\lambda}{2i} \sigma_3 x \right). \quad (2.2.14)$$

В линейной независимости столбцов матрицы  $\varphi_0$  легко убедиться простой проверкой:

$$\det \varphi_0 = 1 \neq 0.$$

Напомним, что любое частное решение системы (2.2.11) может быть фиксировано его асимптотическим поведением при  $x \rightarrow -\infty$

(или при  $x \rightarrow +\infty$ ). Зададим два частных решения вспомогательной системы (2.2.11) их асимптотическим поведением при  $x \rightarrow -\infty$ :

$$\varphi_- \rightarrow \varphi_0 = \exp\left(\frac{\lambda}{2i}\sigma_3 x\right) \quad \text{при } x \rightarrow -\infty. \quad (2.2.15)$$

Здесь мы также объединили вектор-столбцы решений в  $2 \times 2$ -матричную функцию (функцию Йоста), которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\partial_x \varphi_- = U(\lambda) \varphi_-. \quad (2.2.16)$$

Векторы-столбцы матрицы  $\varphi_-$  будут линейно независимыми в силу линейной независимости их асимптотик при  $x \rightarrow -\infty$ .

Учитывая, что  $\text{Sp } U(\lambda) = 0$ , из уравнения (2.2.16) находим

$$\text{Sp} [\partial_x \varphi_- \varphi_-^{-1}] \equiv \partial_x \ln \det \varphi_- = \text{Sp } U = 0,$$

т. е.  $\det \varphi_-$  не зависит от  $x$ . Поэтому определители матриц  $\varphi_-$  и  $\varphi_0$  совпадают:

$$\det \varphi_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} \det \varphi_- = \det \varphi_0 = 1.$$

Для дальнейшего анализа нам потребуется еще одна функция Йоста  $\varphi_+$ , которая является решением матричного уравнения, совпадающего с (2.2.16):

$$\partial_x \varphi_+ = U(\lambda) \varphi_+,$$

но с асимптотическим поведением, заданным на противоположной бесконечности:

$$\varphi_+ \rightarrow \varphi_0 = \exp\left(\frac{\lambda}{2i}\sigma_3 x\right) \quad \text{при } x \rightarrow +\infty.$$

Столбцы матрицы  $\varphi_-$  образуют базис в пространстве всех решений системы (2.2.11) точно так же, как столбцы матрицы  $\varphi_+$ . Отсюда следует алгебраическая связь между функциями Йоста:

$$\varphi_- = \varphi_+ T. \quad (2.2.17)$$

Здесь  $T$  — матрица перехода  $2 \times 2$  с элементами, зависящими только от спектрального параметра  $\lambda$  и времени  $t$ . В силу унитарности матриц  $\varphi_+$  и  $\varphi_-$  матрица перехода также оказывается унитарной:

$$\det T = 1. \quad (2.2.18)$$

Обсудим теперь зависимость матричных функций Йоста от времени. С целью получения уравнения эволюции для  $\varphi_-$  продифференцируем равенство (2.2.16) по  $t$ :

$$\partial_t \partial_x \varphi_- = U \partial_t \varphi_- + \partial_t U \varphi_-$$

и с помощью коммутационного соотношения (2.2.3) перепишем результат в виде

$$\begin{aligned}\partial_t \partial_x \varphi_- &= U \partial_t \varphi_- + (\partial_x V + VU - UV) \varphi_- = \\ &= U \partial_t \varphi_- + \partial_x V \varphi_- + V \partial_x \varphi_- - UV \varphi_- = U (\partial_t \varphi_- - V \varphi_-) + \partial_x (V \varphi_-).\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\partial_t \partial_x \varphi_- = \partial_x \partial_t \varphi_-,$$

находим:

$$(\partial_x - U) [\partial_t \varphi_- - V \varphi_-] = 0.$$

Мы показали, что столбцы матрицы  $\partial_t \varphi_- - V \varphi_-$  удовлетворяют уравнениям (2.2.16). Поэтому их можно представить в форме разложения по фундаментальным решениям системы (2.2.16):

$$(\partial_t - V) \varphi_- = \varphi_- C. \quad (2.2.19)$$

Здесь матрица  $C$  может зависеть только от переменных  $\lambda$  и  $t$ . Воспользуемся тем обстоятельством, что  $C$  не зависит от  $x$ , и перейдем в (2.2.19) к пределу  $x \rightarrow -\infty$ . В результате, используя (2.2.10), (2.2.15), найдем  $C$ :

$$C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi_-^{-1} (\partial_t - V) \varphi_- = \frac{\lambda^2}{2i} \sigma_3.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение по переменной  $t$  для функции Йоста  $\varphi_-$  имеет вид

$$\partial_t \varphi_- = V \varphi_- + \frac{\lambda^2}{2i} \varphi_- \sigma_3. \quad (2.2.20)$$

При получении вспомогательного линейного уравнения (2.2.20), дополнительного к уравнению (2.2.16), мы использовали коммутационное представление (2.2.3). Прямой проверкой можно убедиться в справедливости обратного утверждения: условие совместности системы вспомогательных линейных уравнений (2.2.16), (2.2.20), т.е. требование  $\partial_t \partial_x \varphi_- = \partial_x \partial_t \varphi_-$ , эквивалентно представлению нулевой кривизны (2.2.3) для исходного нелинейного уравнения (2.2.2).

Далее нам потребуется также дифференциальное уравнение по переменной  $t$  для матричной функции  $\varphi_-^{-1}$ . Его легко вывести из (2.2.20), используя соотношение

$$\partial_t \varphi_-^{-1} = -\varphi_-^{-1} \partial_t \varphi_- \varphi_-^{-1},$$

которое является следствием тождества  $\varphi_-^{-1} \varphi_- = \varphi_- \varphi_-^{-1} = I$ . Приведем результат:

$$\partial_t \varphi_-^{-1} = -\varphi_-^{-1} V - \frac{\lambda^2}{2i} \sigma_3 \varphi_-^{-1}. \quad (2.2.21)$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$\begin{aligned}\partial_t \varphi_+ &= V \varphi_+ + \frac{\lambda^2}{2i} \varphi_+ \sigma_3, \\ \partial_t \varphi_+^{-1} &= -\varphi_+^{-1} V - \frac{\lambda^2}{2i} \sigma_3 \varphi_+^{-1}.\end{aligned}\tag{2.2.22}$$

С целью получить уравнение эволюции для матрицы перехода  $T$  (см. (2.2.17)) продифференцируем по  $t$  соотношение

$$T = \varphi_+^{-1} \varphi_-.$$

Используя (2.2.22), (2.2.20), приходим к простому матричному уравнению:

$$\partial_t T = \frac{i\lambda^2}{2} [\sigma_3, T].\tag{2.2.23}$$

Далее мы покажем, что элементы матрицы перехода  $T$  и некоторые параметры функций Йоста  $\varphi_{\pm}$  являются новыми обобщенными переменными, в терминах которых линейризуется исходное нелинейное уравнение в частных производных (2.2.2). Для перехода к новым обобщенным переменным необходимо изучить аналитические свойства функций Йоста и матрицы перехода. Это составляет содержание так называемой прямой задачи рассеяния.

## 2.3. Прямая задача рассеяния

*Самый эффективный метод, который можно предложить в настоящее время, — это использование всех ресурсов чистой математики для усовершенствования и обобщения математического формализма, образующего настоящую основу теоретической физики.*

П.А.М. Дирак

### 2.3.1. Интегральные представления функций Йоста

В предыдущем параграфе было показано, что обобщенное представление Лакса (2.2.3) уравнений динамики изотропного ферромагнетика (2.2.2) является условием совместности вспомогательной линейной системы дифференциальных уравнений для функций Йоста  $\varphi_{\pm}$ :

$$\partial_x \varphi_{\pm} = \frac{\lambda}{2i} S \varphi_{\pm},\tag{2.3.1}$$

$$\partial_t \varphi_{\pm} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\lambda^2}{i} S + \lambda S \partial_x S \right) \varphi_{\pm} + \frac{\lambda^2}{2i} \varphi_{\pm} \sigma_3\tag{2.3.2}$$

с асимптотическими условиями на бесконечности:

$$\varphi_{\pm} \rightarrow \varphi_0(x, \lambda) = \exp\left(\frac{\lambda}{2i}\sigma_3 x\right) \quad \text{при } x \rightarrow \pm\infty. \quad (2.3.3)$$

Альтернативно уравнения (2.3.1) и условия (2.3.3) можно задать при помощи интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \varphi_-(x, t, \lambda) = & \varphi_0(x, \lambda) + \\ & + \frac{\lambda}{2i} \int_{-\infty}^x \varphi_0(x-y, \lambda) [S(y, t) - \sigma_3] \varphi_-(y, \lambda) dy \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

$$\begin{aligned} \varphi_+(x, t, \lambda) = & \varphi_0(x, \lambda) - \\ & - \frac{\lambda}{2i} \int_x^{+\infty} \varphi_0(x-y, \lambda) [S(y, t) - \sigma_3] \varphi_+(y, \lambda) dy. \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

При вещественных значениях параметра  $\lambda$  интегральные уравнения (2.3.4), (2.3.5) являются вольтерровскими, а их итерации (при определенных ограничениях на  $S(y, t)$ ) абсолютно сходятся. Анализируя итерации, после простых преобразований и интегрирований по частям убеждаемся, что матрицы  $\varphi_{\pm}(x, t, \lambda)$  допускают представления

$$\begin{aligned} \varphi_- = & \varphi_0(x, \lambda) + \frac{\lambda}{2i} \int_{-\infty}^x \Gamma_-(x, y, t) \varphi_0(y, \lambda) dy, \\ \varphi_+ = & \varphi_0(x, \lambda) + \frac{\lambda}{2i} \int_x^{+\infty} \Gamma_+(x, y, t) \varphi_0(y, \lambda) dy, \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

где ядра  $\Gamma_{\pm}$  не зависят от  $\lambda$ .

Для обоснования справедливости представлений (2.3.6), подставим их в уравнения (2.3.1). Уравнения (2.3.1) обращаются в тождества, когда матрицы  $\Gamma_{\pm}$  удовлетворяют задачам Гурса, т. е. дифференциальным уравнениям в частных производных

$$\partial_x \Gamma_{\pm}(x, y) + S(x) \partial_y \Gamma_{\pm}(x, y) \sigma_3 = 0 \quad (2.3.7)$$

при  $\pm(y-x) > 0$  и граничным условиям

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \Gamma_{\pm}(x, y) = 0, \quad (2.3.8)$$

$$\mp [\Gamma_{\pm}(x, x) - S(x) \Gamma_{\pm}(x, x) \sigma_3] = S(x) - \sigma_3. \quad (2.3.9)$$

В формулах (2.3.8), (2.3.9) и далее, где это не вызывает недоразумений, не указываем зависимость функций  $\Gamma_{\pm}$  от параметра  $t$ .



Для быстро убывающих при  $|x| \rightarrow \infty$  распределений намагнитченности  $\mathbf{S}(x, t)$  задача Гурса (2.3.7)–(2.3.9) всегда имеет решение. Поэтому представления (2.3.6) действительно существуют.

Из соотношения (2.3.9) следует, что эволюция распределений намагнитченности в изотропном ферромагнетике будет теоретически описана, если удастся вычислить матрицы  $\Gamma_{\pm}(x, y, t)$ :

$$S(x, t) = [I \mp \Gamma_{\pm}(x, x, t) \sigma_3] \sigma_3 [I \mp \Gamma_{\pm}(x, x, t) \sigma_3]^{-1}. \quad (2.3.10)$$

### 2.3.2. Редукции на функции Йоста и матрицу перехода

Используя соотношения

$$\sigma_2 \sigma_{\alpha} \sigma_2 = -\sigma_{\alpha}, \quad \alpha = 1, 3,$$

нетрудно проверить, что при вещественных значениях  $\lambda$  матрицы  $U(\lambda)$ ,  $V(\lambda)$ ,  $\varphi_0(\lambda)$  удовлетворяют инволюциям (символ «\*» означает комплексное сопряжение):

$$U(\lambda) = \sigma_2 U^*(\lambda) \sigma_2, \quad V(\lambda) = \sigma_2 V^*(\lambda) \sigma_2, \quad \varphi_0(\lambda) = \sigma_2 \varphi_0^*(\lambda) \sigma_2,$$

а функции  $\varphi_{\pm}(\lambda)$  и  $\sigma_2 \varphi_{\pm}^*(\lambda) \sigma_2$  являются решениями одних и тех же дифференциальных уравнений (2.3.1), (2.3.2) при одинаковых асимптотических условиях (2.3.3). В силу теоремы единственности решений дифференциальных уравнений, последнее означает, что при вещественных  $\lambda$  функции Йоста подчиняются ограничению:

$$\varphi_{\pm}(\lambda) = \sigma_2 \varphi_{\pm}^*(\lambda) \sigma_2, \quad (2.3.11)$$

которое переносится на ядра в интегральных представлениях (2.3.5), (2.3.6):

$$\Gamma_{\pm} = -\sigma_2 \Gamma_{\pm}^* \sigma_2. \quad (2.3.12)$$

Формулы (2.3.11), (2.3.12) устанавливают связь между столбцами функций Йоста

$$\varphi_{\pm} = \begin{pmatrix} \varphi_{\pm}^{(1)} \\ \varphi_{\pm}^{(2)} \end{pmatrix}$$

при вещественных значениях  $\lambda$ :

$$\varphi_{\pm}^{(1)}(\lambda) = i \sigma_2 \left[ \varphi_{\pm}^{(2)}(\lambda) \right]^*$$

и конкретизируют вид ядер:

$$\Gamma_{\pm} = \begin{pmatrix} \alpha_{\pm} & \beta_{\pm}^* \\ \beta_{\pm} & -\alpha_{\pm}^* \end{pmatrix}. \quad (2.3.13)$$

Поскольку функции Йоста  $\varphi_{\pm}$  связаны алгебраическим соотношением (2.2.17), редукция (2.3.11) переносится на матрицу перехода:

$$T(\lambda) = \sigma_2 T^*(\lambda) \sigma_2. \quad (2.3.14)$$

Соотношения (2.2.18), (2.3.14) конкретизируют алгебраическую структуру матрицы  $T(\lambda)$ :

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & -b^*(\lambda) \\ b(\lambda) & a^*(\lambda) \end{pmatrix}, \quad |a(\lambda)|^2 + |b(\lambda)|^2 = 1 \quad (2.3.15)$$

для вещественных  $\lambda$ .

С целью упростить формулу (2.3.10), определяющую распределение намагниченности, заметим, что матрицы  $I \mp \Gamma_{\pm} \sigma_3$  являются первыми членами разложений функций Йоста  $\varphi_{\pm}$  по обратным степеням  $\lambda$ :

$$\varphi_{\pm} = \left( I \mp \Gamma_{\pm}(x, x) \sigma_3 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) \varphi_0(x, \lambda). \quad (2.3.16)$$

В справедливости асимптотического разложения (2.3.16) легко убедиться посредством интегрирований по частям представлений (2.3.6) с учетом соотношения

$$\varphi_0(y, \lambda) = \left( \frac{\lambda}{2i} \right)^{-1} \sigma_3 \partial_y \varphi_0(y, \lambda).$$

Поскольку матрицы  $\varphi_{\pm}$  унимодулярны, матрицы  $I \mp \Gamma_{\pm} \sigma_3$  тоже должны быть унимодулярными. Используя общую формулу

$$A^{-1} = \sigma_2 A^T \sigma_2, \quad (2.3.17)$$

справедливую для любой унимодулярной  $2 \times 2$ -матрицы  $A$  (индекс «Т» означает транспонирование), а также редукцию (2.3.12), нетрудно проверить, что

$$(I \mp \Gamma_{\pm} \sigma_3)^{-1} = (I \mp \Gamma_{\pm} \sigma_3)^{\dagger}.$$

В результате соотношение (2.3.10), определяющее распределение намагниченности, можно переписать в форме, удобной для вычислений:

$$S(x, t) = [I \mp \Gamma_{\pm}(x, x, t) \sigma_3] \sigma_3 [I \mp \Gamma_{\pm}(x, x, t) \sigma_3]^{\dagger}. \quad (2.3.18)$$

### 2.3.3. Свойства аналитичности функций Йоста и элементов матрицы перехода

Перейдем теперь к изучению аналитических свойств решений Йоста  $\varphi_{\pm}(x, t, \lambda)$  как функций  $\lambda$  при фиксированных  $x$  и  $t$ . Как и ранее, удобно использовать специальные обозначения для первых и вторых столбцов матриц  $\varphi_{\pm}(\lambda)$ :

$$\varphi_{\pm}(\lambda) = \left( \varphi_{\pm}^{(1)}(\lambda), \varphi_{\pm}^{(2)}(\lambda) \right).$$

Из (2.3.6) находим интегральные представления для первого столбца матрицы  $\varphi_-$  и второго столбца матрицы  $\varphi_+$ :

$$\begin{aligned}\varphi_-^{(1)}(\lambda) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp\left(\frac{\lambda}{2i}x\right) + \frac{\lambda}{2i} \int_{-\infty}^x \Gamma_-(x, y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp\left(\frac{\lambda}{2i}y\right) dy; \\ \varphi_+^{(2)}(\lambda) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp\left(-\frac{\lambda}{2i}x\right) + \frac{\lambda}{2i} \int_x^{+\infty} \Gamma_+(x, y) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp\left(-\frac{\lambda}{2i}y\right) dy,\end{aligned}\tag{2.3.19}$$

которые показывают, что функции  $\varphi_-^{(1)}(\lambda)$  и  $\varphi_+^{(2)}(\lambda)$  аналитически продолжаются с вещественной  $\lambda$ -оси в верхнюю полуплоскость комплексной переменной  $\lambda$ . Действительно, при указанных значениях  $\lambda$  множители  $\exp\left(\pm\frac{\lambda}{2i}y\right)$ , присутствующие в подынтегральных выражениях, убывают, когда переменная  $y$  стремится к  $-\infty$  или  $+\infty$  соответственно.

Аналогично можно показать, что векторы-столбцы  $\varphi_-^{(2)}(\lambda)$  и  $\varphi_+^{(1)}(\lambda)$  аналитически продолжаются с вещественной  $\lambda$ -оси в нижнюю полуплоскость переменной  $\lambda$ .

Связь функций Йоста (2.2.17), с учетом формулы (2.3.15), приводит к равенствам:

$$\varphi_-^{(1)}(\lambda) = a(\lambda) \varphi_+^{(1)}(\lambda) + b(\lambda) \varphi_+^{(2)}(\lambda),\tag{2.3.20}$$

$$\varphi_-^{(2)}(\lambda) = -b^*(\lambda) \varphi_+^{(1)}(\lambda) + a^*(\lambda) \varphi_+^{(2)}(\lambda).\tag{2.3.21}$$

Из этих равенств, используя унитарность матричных функций  $\varphi_{\pm}(\lambda)$ , получаем выражения для элементов матрицы перехода:

$$\begin{aligned}a(\lambda) &= \det \left( \varphi_-^{(1)}(\lambda), \varphi_+^{(2)}(\lambda) \right), \\ b(\lambda) &= \det \left( \varphi_+^{(1)}(\lambda), \varphi_-^{(1)}(\lambda) \right), \\ b^*(\lambda) &= \det \left( \varphi_+^{(2)}(\lambda), \varphi_-^{(2)}(\lambda) \right), \\ a^*(\lambda) &= \det \left( \varphi_+^{(1)}(\lambda), \varphi_-^{(2)}(\lambda) \right).\end{aligned}\tag{2.3.22}$$

Из свойств аналитичности столбцов  $\varphi_-^{(1)}(\lambda)$  и  $\varphi_+^{(2)}(\lambda)$  следует, что функция  $a(\lambda)$  аналитически продолжается с вещественной  $\lambda$ -оси в верхнюю полуплоскость  $\text{Im } \lambda \geq 0$ . Коэффициент  $a^*(\lambda)$  аналитически продолжается с вещественной оси в нижнюю полуплоскость. Выражения (2.3.22) для  $b(\lambda)$  и  $b^*(\lambda)$ , вообще говоря, не допускают аналитических продолжений с вещественной  $\lambda$ -оси в комплексную плоскость.

Процедуру интегрирования исходного нелинейного уравнения можно сформулировать, используя любое из равенств (2.3.20), (2.3.21). Дальнейший анализ проведем на примере равенства (2.3.20) и потому

будем обсуждать свойства лишь двух элементов матрицы перехода  $a(\lambda)$  и  $b(\lambda)$ .

Из формул (2.3.6), (2.3.22) заключаем, что

$$\varphi_{\pm}(x, \lambda = 0) = \varphi_0(x, 0) \equiv I; \quad a(\lambda = 0) = 1. \quad (2.3.23)$$

Отсюда, вследствие связи

$$|a(\lambda)|^2 + |b(\lambda)|^2 = 1,$$

имеем

$$|b(\lambda)| < 1, \quad b(\lambda = 0) = 0. \quad (2.3.24)$$

В следующем разделе мы вычислим асимптотику функции  $a(\lambda)$  при  $|\lambda| \rightarrow \infty$  и покажем, что

$$a(\lambda) = \omega_0 + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right), \quad (2.3.25)$$

где  $|\omega_0| = 1$ . Из свойства аналитичности функции  $a(\lambda)$  и ее асимптотического поведения при  $|\lambda| \rightarrow \infty$  следует, что нули функции  $a(\lambda)$  сосредоточены в конечной части полуплоскости  $\text{Im } \lambda \geq 0$  и могут иметь точки сгущения разве только на вещественной оси. Для упрощения дальнейшего исследования предположим, что на вещественной оси функция  $a(\lambda)$  не имеет нулей, а ее нули в области  $\text{Im } \lambda > 0$  простые. При сформулированных условиях общее число нулей функции  $a(\lambda)$  будет конечно.

Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — полный набор нулей функции  $a(\lambda)$  ( $\text{Im } \lambda_j > 0, j = 1, 2, \dots, n$ ). Поскольку  $a(\lambda = \lambda_j) = 0$ , из первого равенства (2.3.22) следует, что при  $\lambda = \lambda_j$  столбцы  $\varphi_-^{(1)}(\lambda_j)$  и  $\varphi_+^{(2)}(\lambda_j)$  пропорциональны:

$$\varphi_-^{(1)}(x, t, \lambda_j) = \gamma_j(t) \varphi_+^{(2)}(x, t, \lambda_j). \quad (2.3.26)$$

Набор комплекснозначных функций от времени  $\gamma_j(t)$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) характеризует вспомогательную линейную задачу и будет играть важную роль в дальнейшем анализе.

Равенство (2.3.26) определяет столбец-решение уравнения (2.3.1) с экспоненциально убывающей асимптотикой как при  $x \rightarrow +\infty$ , так и при  $x \rightarrow -\infty$  (сформулированное утверждение является следствием формул (2.2.14), (2.3.6) и условия  $\text{Im } \lambda_j > 0$ ). Это означает, что нули функции  $a(\lambda)$  соответствуют точкам дискретного спектра спектральной задачи (2.3.1).

На вещественной оси  $\lambda$  решения Йоста  $\varphi_{\pm}(\lambda)$  имеют осциллирующие асимптотики. В частности, из (2.3.3) и (2.3.20) находим:

$$\begin{aligned}\varphi_{-}^{(1)} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp\left(\frac{\lambda}{2i}x\right) \quad \text{при } x \rightarrow -\infty; \\ \varphi_{-}^{(1)} &\rightarrow a(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp\left(\frac{\lambda}{2i}x\right) + \\ &+ b(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp\left(-\frac{\lambda}{2i}x\right) \quad \text{при } x \rightarrow +\infty.\end{aligned}\tag{2.3.27}$$

Поэтому вещественные значения  $\lambda$  образуют непрерывный спектр линейной задачи (2.3.1).

Название «метод задачи рассеяния» пришло из нерелятивистской квантовой механики, где решения уравнения Шредингера с осциллирующими асимптотиками, подобными (2.3.27), описывают процесс рассеяния микрочастицы на пространственно локализованном потенциале, а экспоненциально убывающие при  $|x| \rightarrow \infty$  решения типа (2.3.26) характеризуют связанные состояния частицы в этом потенциале. Оказывается, явный вид рассеивающегося потенциала можно восстановить, если известен набор так называемых данных рассеяния.

В рассматриваемой задаче роль данных рассеяния играют переменные

$$\{\lambda_j, \gamma_j(t), b(\lambda, t)\}, \tag{2.3.28}$$

а роль потенциала — распределение намагниченности  $\mathbf{S}(x, t)$ .

С математической точки зрения, с помощью вспомогательной линейной системы (2.3.1) мы построили отображение

$$\mathbf{S}(x, t) \rightarrow \{\lambda_j, \gamma_j(t), b(\lambda, t)\}. \tag{2.3.29}$$

### 2.3.4. Эволюция данных рассеяния

Покажем, что в переменных  $\lambda_j$ ,  $\gamma_j$ ,  $b$  уравнения Ландау–Лифшица (2.2.2) изотропного ферромагнетика существенно упрощаются.

Уравнение эволюции для матрицы перехода (2.2.23) дает ( $\lambda = \lambda^*$ ):

$$\partial_t a(\lambda, t) = 0, \quad \partial_t b(\lambda, t) = -i\lambda^2 b(\lambda, t). \tag{2.3.30}$$

В частности, отсюда видно, что при  $\text{Im } \lambda = 0$  коэффициент  $a(\lambda)$  не зависит от времени. В силу аналитичности функции  $a(\lambda)$  это верно и при  $\text{Im } \lambda > 0$ , откуда следует, что нули  $\lambda = \lambda_j$  функции  $a(\lambda)$  также не зависят от времени:  $\lambda_j = \text{const}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ).

Определим теперь эволюцию коэффициентов перехода  $\gamma_j(t)$  дискретного спектра. Для этого воспользуемся уравнениями (2.3.2) для столбцов  $\varphi_-^{(1)}$  и  $\varphi_+^{(2)}$ :

$$\begin{aligned}\partial_t \varphi_-^{(1)} &= V(\lambda) \varphi_-^{(1)} + \frac{\lambda^2}{2i} \varphi_-^{(1)}; \\ \partial_t \varphi_+^{(2)} &= V(\lambda) \varphi_+^{(2)} - \frac{\lambda^2}{2i} \varphi_+^{(2)}.\end{aligned}\quad (2.3.31)$$

Уравнения (2.3.31) справедливы и при  $\text{Im } \lambda > 0$ , а в случае  $\lambda = \lambda_j$  совместны с равенством (2.3.26), только когда

$$\partial_t \gamma_j = -i\lambda_j^2 \gamma_j. \quad (2.3.32)$$

Уравнения (2.3.30), (2.3.32) легко интегрируются. Зависимость от времени коэффициентов перехода дается простыми формулами:

$$\begin{aligned}b(\lambda, t) &= b(\lambda, 0) \exp(-i\lambda^2 t); \\ \gamma_j(t) &= \gamma_j(0) \exp(-i\lambda_j^2 t), \quad j = 1, 2, \dots, n.\end{aligned}\quad (2.3.33)$$

Таким образом, в переменных (2.3.28) нелинейные уравнения Ландау–Лифшица (2.2.2) решаются явно. Значения постоянных интегрирования  $\lambda_j$ ,  $\gamma_j(t=0)$ ,  $b(\lambda, t=0)$  можно найти из линейного уравнения (2.3.1) по заданному начальному распределению намагниченности  $\mathbf{S}(x, t=0)$ . Для теоретического описания эволюции намагниченности  $\mathbf{S}(x, t)$  при  $t > 0$  нужно лишь обратить отображение (2.3.29). В этом и состоит содержание метода обратной задачи рассеяния.

Для построения процедуры обращения нам потребуется информация об асимптотическом поведении функции  $a(\lambda)$  при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ . Эта информация полезна также для нахождения бесконечной серии законов сохранения изотропного ферромагнетика.

## 2.4. Асимптотика элементов матрицы перехода при $|\lambda| \rightarrow \infty$ . Производящая функция интегралов движения

*Великая Книга природы написана  
на языке математики.*

*Галилео Галилей*

Ввиду соотношения

$$T(\lambda) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_+^{-1}(x, \lambda) \varphi_-(x, \lambda) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_0^{-1}(x, \lambda) \varphi_-(x, \lambda) \quad (2.4.1)$$

получение асимптотического разложения элементов матрицы перехода при  $|\lambda| \rightarrow \infty$  сводится к построению разложения функции Йоста  $\varphi_-(x, \lambda)$  при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ . Представим  $\varphi_-(x, \lambda)$  в виде [9]

$$\varphi_-(x, \lambda) = (I + W(x, \lambda)) \exp\left(\frac{\lambda}{2i} x \sigma_3 + Z(x, \lambda)\right), \quad (2.4.2)$$

где матрица  $W(x, \lambda)$  антидиагональна, а матрица  $Z(x, \lambda)$  диагональна. Асимптотические условия (2.3.3) предполагают, что

$$W(x, \lambda) \rightarrow 0, \quad Z(x, \lambda) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow -\infty.$$

Для доказательства справедливости формулы (2.4.2) покажем, что функции  $W$  и  $Z$  однозначно определяются дифференциальным уравнением (2.3.1). Подставим разложение (2.4.2) в уравнение (2.3.1) и отделим диагональную и антидиагональную части. В результате получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_x W + W \left( \frac{\lambda}{2i} \sigma_3 + \partial_x Z \right) &= \frac{\lambda}{2i} (S_1 \sigma_1 + S_2 \sigma_2 + S_3 \sigma_3 W); \\ \frac{\lambda}{2i} \sigma_3 + \partial_x Z &= \frac{\lambda}{2i} [S_3 \sigma_3 + (S_1 \sigma_1 + S_2 \sigma_2) W]. \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Покажем, что матрицы  $W$  и  $Z$  допускают при  $|\lambda| \rightarrow \infty$  асимптотические представления:

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{W_n}{\lambda^n} + O(|\lambda|^{-\infty}); \quad Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_n}{\lambda^n} + O(|\lambda|^{-\infty}).$$

Здесь через  $O(|\lambda|^{-\infty})$  мы обозначили функцию, имеющую исчезающий асимптотический ряд по степеням  $\lambda^{-1}$ .

Из второго уравнения системы (2.4.3) находим уравнение для вычисления  $W_0$ :

$$(S_1 \sigma_1 + S_2 \sigma_2) W_0 = \sigma_3 (1 - S_3).$$

Учитывая тождество

$$(S_2 \sigma_1 - S_1 \sigma_2) (S_1 \sigma_1 + S_2 \sigma_2) = (1 - S_3^2) i \sigma_3,$$

находим

$$W_0(x) = \frac{i[S_2(x)\sigma_1 - S_1(x)\sigma_2]}{1 + S_3(x)}. \quad (2.4.4)$$

После этого второе уравнение системы (2.4.3) сводится к соотношениям

$$Z_n(x) = -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^x [S_1(x')\sigma_1 + S_2(x')\sigma_2] W_{n+1}(x') dx', \quad (2.4.5)$$

а первое уравнение после исключения из него  $\partial_x Z$  и преобразования слагаемых, содержащих  $W_0$ , дает рекуррентные соотношения для расчета коэффициентов  $W_{n+1}$  ( $n = 0, 1, \dots$ ):

$$W_{n+1} = i \sigma_3 \partial_x W_n - \frac{i}{2} \sum_{k=1}^n W_k (S_1 \sigma_2 - S_2 \sigma_1) W_{n+1-k}. \quad (2.4.6)$$

При  $n = 0$  последняя сумма в (2.4.6) отсутствует.

Анализ формул (2.4.4), (2.4.6) приводит к заключению, что коэффициенты  $W_n(x)$  являются антиэрмитовыми матрицами вида

$$W_n(x) = \begin{pmatrix} 0 & -w_n^*(x) \\ w_n(x) & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.4.7)$$

В терминах функций  $w_n(x)$  рекуррентное соотношение (2.4.6) есть

$$\begin{aligned} w_{n+1}(x) &= -i \partial_x w_n(x) - \\ &- \frac{1}{2} [S_1(x) - i S_2(x)] \sum_{k=1}^n w_k(x) w_{n+1-k}(x), \quad n = 0, 1, \dots; \quad (2.4.8) \\ w_0 &= \frac{S_1(x) + i S_2(x)}{1 + S_3(x)}. \end{aligned}$$

Из соотношений (2.4.5), (2.4.7) получаем явный вид матриц  $Z_n$ :

$$\begin{aligned} Z_n(x) &= \begin{pmatrix} z_n(x) & 0 \\ 0 & z_n^*(x) \end{pmatrix}, \\ z_n(x) &= -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^x [S_1(x') - i S_2(x')] w_{n+1}(x') dx'. \end{aligned}$$

Асимптотическое разложение матрицы перехода  $T(\lambda)$  при  $\lambda \rightarrow \infty$  получается предельным переходом в соответствии с формулой (2.4.1). Учитывая, что матрица  $W(x)$  исчезает при  $x \rightarrow +\infty$ , получаем представление

$$T(\lambda) = \exp Q(\lambda) + O(|\lambda|^{-\infty}), \quad (2.4.9)$$

где диагональная матрица  $Q(\lambda)$  имеет вид

$$\begin{aligned} Q(\lambda) &= i \begin{pmatrix} q(\lambda) & 0 \\ 0 & -q^*(\lambda) \end{pmatrix}, \quad q(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_n}{\lambda^n}, \\ I_n &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{i} z_n(x) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [S_1(x) - i S_2(x)] w_{n+1}(x) dx. \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

Отметим, что свойство диагональности матрицы  $Q(\lambda)$  в разложении (2.4.9) означает, что элемент  $b(\lambda)$  матрицы перехода дает вклад  $O(|\lambda|^{-\infty})$  при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ .

Из унимодулярности матрицы  $T(\lambda)$  следует, что

$$\text{Sp } Q(\lambda) = i(q(\lambda) - q^*(\lambda)) = 0.$$

Поэтому величины  $q(\lambda)$  в (2.4.10) и, следовательно, коэффициенты  $I_n$  вещественны.



Итак, мы показали, что при  $|\lambda| \rightarrow \infty$  справедливо разложение

$$\frac{1}{i} \ln a(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_n}{\lambda^n}, \quad (2.4.11)$$

где вещественные функционалы  $I_n$  даются формулами (2.4.8), (2.4.10) и, ввиду независимости коэффициента  $a(\lambda)$  от времени, являются интегралами движения для модели изотропного ферромагнетика. В этом смысле функция  $a(\lambda)$  является производящей функцией бесконечной серии локальных законов сохранения.

Первые из законов сохранения после простых преобразований совпадают с полевым импульсом  $P$  и энергией  $E$  изотропного ферромагнетика:

$$\begin{aligned} P &= -2I_0 = \int \left( \frac{S_1 \partial_x S_2 - S_2 \partial_x S_1}{1 + S_3} \right) dx; \\ E &= -2I_1 = \frac{1}{2} \int (\partial_x \mathbf{S})^2 dx. \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

Непосредственно из формы записи уравнения Ландау–Лифшица для изотропного ферромагнетика,

$$\partial_t \mathbf{S} = \partial_x [\mathbf{S} \times \partial_x \mathbf{S}], \quad \mathbf{S}^2 = 1,$$

вытекает, что компоненты полного спина также будут интегралами движения. Однако эти законы сохранения не содержатся в семействе  $\{I_n\}$ . Покажем, что наиболее важный из указанных интегралов, определяющий при квазиклассическом квантовании модели число «спиновых отклонений» [60]:

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - S_3(x)) dx,$$

выражается через производную по  $\lambda$  от функции  $a(\lambda)$ .

Для этого вновь рассмотрим функцию

$$\theta(x, \lambda) = \varphi_0^{-1}(x, \lambda) \varphi_-(x, \lambda),$$

предел которой при  $x \rightarrow +\infty$  дает матрицу перехода  $T(\lambda)$  (см. (2.4.1)). Матричная функция  $\theta(x, \lambda)$  является решением дифференциального уравнения

$$\partial_x \theta = -\frac{\lambda}{2i} \sigma_3 \theta + \varphi_0^{-1} \frac{\lambda}{2i} S \varphi_0 \theta \quad (2.4.13)$$

с асимптотическим условием

$$\theta(x, \lambda) \rightarrow I \quad \text{при} \quad x \rightarrow -\infty.$$

Продифференцируем уравнение (2.4.13) по  $\lambda$  и положим  $\lambda = 0$ . Поскольку

$$\varphi_-(x, \lambda = 0) = \varphi_0(x, \lambda = 0) = I$$

(см. (2.3.23)), для матричной функции  $n(x) = \partial_\lambda \theta(x, \lambda) \big|_{\lambda=0}$  получаем уравнение

$$\partial_x n = \frac{1}{2i} (S - \sigma_3)$$

с асимптотическим поведением  $n(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow -\infty$ , решение которого имеет вид

$$n(x) = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^x [S(x') - \sigma_3] dx'. \quad (2.4.14)$$

Из (2.4.14) предельным переходом  $x \rightarrow +\infty$  в соответствии с формулой (2.4.1) находим:

$$\partial_\lambda T(\lambda) \big|_{\lambda=0} = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} [S(x) - \sigma_3] dx.$$

Отсюда имеем значение искомого интеграла движения:

$$N = -2i \partial_\lambda a(\lambda) \big|_{\lambda=0}. \quad (2.4.15)$$

В следующем параграфе покажем, что явный вид функции  $a(\lambda)$  полностью определяется ее нулями  $\lambda_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) и величиной  $b(\lambda)$ . Это позволит уточнить значения интегралов движения для изотропного ферромагнетика.

## 2.5. Дисперсионные соотношения. Связь результатов квазиклассической модели с квантовыми состояниями изотропной цепочки спинов

*Важнее обнаружить красоту в записываемых уравнениях, чем увидеть, что уравнения согласуются с опытом.*

*П. А. М. Дирак*

Покажем, что аналитичность функции  $a(\lambda)$  и соотношение нормировки  $a(\lambda = 0) = 1$  (2.3.23) позволяют выразить коэффициент  $a(\lambda)$

через его нули, если таковые имеются, и функцию  $b(\lambda)$ . А именно, при  $\text{Im } \lambda > 0$  справедливо соотношение

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= \omega_0 \prod_{j=1}^n \frac{\lambda - \lambda_j}{\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_j^*} \exp \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1 - |b(\mu)|^2)}{\mu - \lambda} d\mu \right), \\ \omega_0(\lambda) &= \prod_{j=1}^n \frac{\lambda_j^*}{\lambda_j} \exp \left( -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1 - |b(\mu)|^2)}{\mu} d\mu \right), \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

которое допускает переход на вещественную  $\lambda$ -ось по правилу (формула Сохоцкого–Племеля)

$$\frac{1}{\mu - \lambda} \rightarrow \frac{1}{\mu - \lambda - i0} = \text{V. p.} \frac{1}{\mu - \lambda} + \pi i \delta(\mu - \lambda). \quad (2.5.2)$$

Буквы «V. p.» в формуле (2.5.2) указывают на то, что интегрирование по переменной  $\mu$  сингулярного слагаемого должно осуществляться в смысле главного значения Коши.

Для доказательства представления (2.5.1) рассмотрим аналитическую в области  $\text{Im } \lambda \geq 0$  функцию

$$\tilde{a}(\lambda) = \omega_0^{-1} a(\lambda) \prod_{j=1}^n \frac{\lambda - \lambda_j^*}{\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_j},$$

где численный множитель  $\omega_0$  ( $|\omega_0| = 1$ ) введен для того, чтобы функция  $\tilde{a}(\lambda)$  имела асимптотическое поведение (см. (2.3.25)):

$$\tilde{a}(\lambda) = 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad \text{при} \quad |\lambda| \rightarrow \infty.$$

В силу своего определения, функция  $\tilde{a}(\lambda)$  уже не имеет нулей в области  $\text{Im } \lambda \geq 0$ . На вещественной оси ее модуль выражается через функцию  $b(\lambda)$ :

$$|\tilde{a}(\lambda)|^2 = |a(\lambda)|^2 = 1 - |b(\lambda)|^2.$$

Рассмотрим функцию  $\eta(\lambda) = \ln \tilde{a}(\lambda)$ , которая также аналитична при  $\text{Im } \lambda > 0$ , исчезает при  $|\lambda| \rightarrow \infty$  и, ввиду предполагаемого отсутствия нулей у функции  $a(\lambda)$  на вещественной  $\lambda$ -оси, непрерывна вплоть до вещественной оси. Пусть  $\lambda$  лежит на вещественной оси, тогда функция  $\eta(\mu)/(\mu - \lambda)$  будет аналитической функцией по переменной  $\mu$  внутри контура  $\Gamma$ , представленного на рис. 2.1. Тогда по теореме Коши

$$\int_{\Gamma} \frac{\eta(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu = 0. \quad (2.5.3)$$

Из-за быстрого убывания функции  $\eta(\mu)$  при  $|\mu| \rightarrow \infty$  интеграл по полуокружности  $C_R$  радиуса  $R$  обращается в нуль в пределе  $R \rightarrow \infty$ . Вследствие этого левая часть формулы (2.5.3) содержит два слагаемых: а) интеграл в смысле главного значения по вещественной  $\mu$ -оси, исключаяющий окрестность точки  $\mu = \lambda$ , б) интеграл по малой полуокружности  $C_\delta$  радиуса  $\delta$ , обходящей точку  $\mu = \lambda$  в верхней полуплоскости  $\text{Im } \mu > 0$ . Вводя при интегрировании по дуге  $C_\delta$  новую переменную

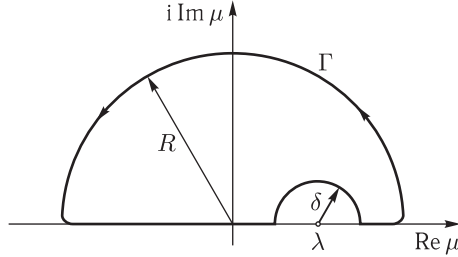


Рис. 2.1. Контур  $\Gamma$ , включающий часть вещественной оси и полуокружности  $C_R$  и  $C_\delta$

$\mu - \lambda = \delta \exp(i\varphi)$  ( $0 \leq \varphi \leq \pi$ ), нетрудно показать, что в пределе  $R \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$  формула (2.5.3) дает

$$\text{V. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu - \pi i \eta(\lambda) = 0. \quad (2.5.4)$$

Равенство (2.5.4) позволяет связать вещественную и мнимую части функции  $\eta(\lambda)$ :

$$\text{Im } \eta(\lambda) = -\frac{1}{\pi} \text{V. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Re } \eta(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu. \quad (2.5.5)$$

Используя формулу Сохоцкого–Племеля (2.5.2), дисперсионное соотношение (2.5.5) можно переписать в форме

$$\eta(\lambda) = \text{Re } \eta(\lambda) + i \text{Im } \eta(\lambda) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Re } \eta(\mu)}{\mu - \lambda - i0} d\mu,$$

которая допускает аналитическое продолжение с вещественной  $\lambda$ -оси в верхнюю полуплоскость:

$$\eta(\lambda) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Re } \eta(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu, \quad \text{Im } \lambda > 0. \quad (2.5.6)$$

Представление (2.5.1) теперь следует из (2.5.6), очевидного соотношения

$$\operatorname{Re} \eta(\mu) = |\ln \tilde{a}(\mu)| = \frac{1}{2} \ln(1 - |b(\mu)|^2)$$

и условия нормировки  $a(\lambda = 0) = 1$ .

Воспользуемся представлением (2.5.1) для более детального анализа основных интегралов движения изотропного ферромагнетика: полевого импульса  $P$ , энергии  $E$  и «числа спиновых отклонений»  $N$ . Явные выражения для них следуют из формул (2.4.11), (2.4.12), (2.4.15), (2.5.1):

$$\begin{aligned} N &= \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\lambda) d\lambda + \sum_{j=1}^n \rho_j; \\ P &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \rho(\lambda) d\lambda - 4 \sum_{j=1}^n \operatorname{arctg} \frac{\rho_j}{s_j}; \\ E &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 \rho(\lambda) d\lambda + 16 \sum_{j=1}^n \frac{\rho_j}{s_j^2 + \rho_j^2}. \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} \rho(\lambda) &= -\frac{1}{\pi \lambda^2} \ln \left( 1 - |b(\lambda)|^2 \right), \\ s_j &= -\frac{4 \operatorname{Re} \lambda_j}{|\lambda_j|^2}, \quad \rho_j = \frac{4 \operatorname{Im} \lambda_j}{|\lambda_j|^2}, \end{aligned}$$

которые, как увидим далее, позволяют полнее вскрыть физический смысл приведенного результата.

Прежде всего отметим, что правые части формул (2.5.7) представляют суммы двух независимых типов коллективных возбуждений системы.

Первые слагаемые в формулах (2.5.7) описывают пакеты мод непрерывного спектра спиновых волн с плотностью  $\rho(\lambda)$ . В силу неравенства  $|b(\lambda)| < 1$  и равенства  $|b(\lambda = 0)| = 0$  (2.3.24), плотность  $\rho(\lambda)$  неотрицательна и несингулярна. Каждому значению  $\lambda$  непрерывного спектра задачи рассеяния соответствует квазичастица («магنون») с импульсом  $p = \lambda$  и частотой (энергией)  $\omega = \lambda^2$ . Таким образом, импульс и энергия магнона удовлетворяют дисперсионному соотношению

$$\omega(p) = p^2.$$

Далее мы покажем, что вторые слагаемые в формулах (2.5.7), связанные с дискретным спектром задачи рассеяния, описывают вклады

от частицеподобных волн намагниченности — солитонов. Импульс отдельного солитона имеет вид

$$P_1 = -4 \operatorname{arctg} \frac{\rho_1}{s_1}$$

и меняется в пределах  $|P_1| \leq 2\pi$ . Его энергия дается формулой

$$E_1 = \frac{16\rho_1}{s_1^2 + \rho_1^2},$$

которую полезно переписать в терминах полного импульса солитона  $P_1$  и числа связанных с ним спиновых отклонений  $N_1 = \rho_1$ :

$$E_1 = \frac{16}{N_1} \sin^2 \frac{P_1}{4}. \quad (2.5.8)$$

Напомним, что задолго до появления теории солитонов Бете развил последовательную квантово-механическую теорию возбуждений изотропной ферромагнитной цепочки спинов  $S = 1/2$  с взаимодействием между ближайшими соседями [45]. Он нашел все состояния системы с одномерным гамильтонианом

$$\hat{H} = -\frac{J}{2} \sum_l (\hat{\sigma}_l \cdot \hat{\sigma}_{l+1}),$$

где  $\hat{\sigma}_l = (\sigma_l^x, \sigma_l^y, \sigma_l^z)$  — операторы Паули, действующие на  $l$ -м узле цепочки спинов,  $J > 0$  — обменная постоянная. Кроме состояний, которые могут быть представлены в виде суперпозиции независимых спиновых волн, Бете предсказал так называемые спиновые комплексы. Их энергия лежит вне непрерывного спектра спиновых волн. Каждый спиновой комплекс перемещается вдоль ферромагнитной цепочки как единое целое с вполне определенной энергией  $E_1$  и полным импульсом  $P_1$ , между которыми существует связь. Замечательно, что квантовый результат Бете с точностью до обозначений совпадает с формулой (2.5.8), где параметр  $N_1$  характеризует полное число магнонов в комплексе (число перевернутых спинов в цепочке с параллельными спинами). Бете установил, что энергия комплекса из  $N_1$  связанных магнонов меньше энергии  $N_1$  свободных магнонов с тем же суммарным импульсом. Таким образом, Бете на квантовом языке описал локализованные спиновые возбуждения, которые в квазиклассическом подходе (при  $N_1 \gg 1$ ) соответствуют магнитным солитонам. Ряд других динамических магнитных солитонов также удается интерпретировать как связанные состояния большого числа магнонов [60].

Дискретные солитонные моды изотропного ферромагнетика при сгущении точек  $\lambda_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ;  $\operatorname{Im} \lambda_j > 0$ ) к вещественной  $\lambda$ -оси переходят в непрерывные (спин-волновые) моды. При этом закон дисперсии магнитных солитонов (2.5.8) переходит в закон дисперсии  $N_1$  невзаимодействующих магнонов с квазиимпульсом  $p$  при естественной линеаризации формулы (2.5.8) и условии  $P_1 = N_1 p$ .

## 2.6. Обратная задача рассеяния

*Из всех услуг, которые могут быть оказаны науке, введение новых идей — самая важная.*

*Дж. Дж. Томпсон*

В этом разделе мы изложим формализм Гельфанда–Левитана–Марченко, который позволяет вернуться от обобщенных координат  $\{\lambda_j, \gamma_j(t), b(\lambda, t)\}$  к распределению намагниченности  $\mathbf{S}(x, t)$  изотропного ферромагнетика. Метод обращения основан на использовании аналитических свойств функций  $\varphi_{\pm}(\lambda)$  и элементов матрицы перехода  $T(\lambda)$ .

Для формулировки метода обратной задачи воспользуемся соотношением (2.3.20), которое запишем в виде

$$\frac{\varphi_{-}^{(1)}(x, \lambda)}{\lambda a(\lambda)} = \frac{\varphi_{+}^{(1)}(x, \lambda)}{\lambda} + \frac{r(\lambda)}{\lambda} \varphi_{+}^{(2)}(x, \lambda), \quad (2.6.1)$$

где  $r(\lambda) = b(\lambda)/a(\lambda)$ .

Умножим равенство (2.6.1) на  $\exp\left(-\frac{\lambda}{2i}y\right)$ , подставим в него вместо функций  $\varphi_{+}^{(1)}$  и  $\varphi_{+}^{(2)}$  их интегральные представления (2.3.6) и перепишем результат в форме, удобной для дальнейшего анализа:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{-}^{(1)}(x, \lambda) \exp(i \lambda y/2)}{\lambda a(\lambda)} - \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp\left(\frac{\lambda i}{2}(y-x)\right) = \\ = \frac{1}{2i} \int_x^{+\infty} \begin{pmatrix} \alpha_{+}(x, z) \\ \beta_{+}(x, z) \end{pmatrix} \exp\left(\frac{\lambda i}{2}(y-z)\right) dz + \\ + \frac{r(\lambda)}{\lambda} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp\left(\frac{\lambda i}{2}(y+x)\right) + \right. \\ \left. + \frac{\lambda}{2i} \int_x^{+\infty} \begin{pmatrix} \beta_{+}^{*}(x, z) \\ -\alpha_{+}^{*}(x, z) \end{pmatrix} \exp\left(\frac{\lambda i}{2}(y+z)\right) dz \right]. \quad (2.6.2) \end{aligned}$$

Пусть  $y > x$ , тогда левая часть формулы (2.6.2) аналитически продолжается с вещественной оси в верхнюю полуплоскость комплексного параметра  $\lambda$ , за исключением точек  $\lambda = \lambda_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), где она имеет простые полюсы ( $a(\lambda_j) = 0$ ). Вследствие формул (2.3.23), (2.3.24), левая и правая части равенства (2.6.2) регулярны в точке  $\lambda = 0$ .

Проинтегрируем равенство (2.6.2) по вещественной  $\lambda$ -оси. Согласно результатам разд. 2.4, левая часть равенства (2.6.2) достаточно быстро

стремится к нулю при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ , поэтому интеграл от нее может быть вычислен с помощью леммы Жордана. Учитывая соотношение (2.3.26):

$$\varphi_-^{(1)}(x, \lambda_j) = \gamma_j \varphi_+^{(2)}(x, \lambda_j)$$

и интегральное представление (2.3.19) для вектора-столбца  $\varphi_+^{(2)}$ , получим

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\varphi_-^{(1)}(x, \lambda) \exp(\lambda i y / 2)}{\lambda a(\lambda)} - \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp\left(\frac{\lambda i}{2}(y-x)\right) \right] d\lambda = \\ & = 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{\lambda=\lambda_j} \left[ \frac{\varphi_-^{(1)}(x, \lambda)}{\lambda a(\lambda)} \exp\left(\frac{\lambda i}{2}y\right) \right] = \\ & = 2\pi i \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\lambda_j} \varphi_+^{(2)}(x, \lambda_j) \exp\left(\frac{i\lambda_j}{2}y\right) = \\ & = 2\pi i \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\lambda_j} \exp\left(\frac{i\lambda_j}{2}y\right) \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp\left(\frac{i\lambda_j}{2}x\right) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\lambda_j}{2i} \int_x^{+\infty} \begin{pmatrix} \beta_+^*(x, z) \\ -\alpha_+^*(x, z) \end{pmatrix} \exp\left(\frac{i\lambda_j}{2}z\right) dz \right], \end{aligned}$$

где

$$m_j = \gamma_j [\partial_\lambda a(\lambda)]^{-1} \Big|_{\lambda=\lambda_j}.$$

При интегрировании по  $\lambda$  правой части равенства (2.6.2) используем формулу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{\lambda i}{2}(y-x)\right) d\lambda = 4\pi \delta(y-x).$$

Объединяя результаты вычислений, находим

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \alpha_+(x, y, t) \\ \beta_+(x, y, t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ k(x+y, t) \end{pmatrix} + \\ & + \int_x^{+\infty} \begin{pmatrix} \beta_+^*(x, z, t) \\ -\alpha_+^*(x, z, t) \end{pmatrix} \partial_y k(z+y, t) dz = 0, \quad (2.6.3) \end{aligned}$$

где функция  $k(x, t)$  есть

$$k(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r(\lambda, t)}{\lambda} \exp\left(\frac{i\lambda}{2}x\right) d\lambda - \sum_{j=1}^n \frac{m_j(t)}{\lambda_j} \exp\left(\frac{i\lambda_j}{2}x\right).$$



Уравнения (2.6.3) и комплексно сопряженные им образуют замкнутую систему интегральных уравнений, определяющую функции  $\alpha_+(x, y, t)$ ,  $\alpha_+^*(x, y, t)$ ,  $\beta_+(x, y, t)$ ,  $\beta_+^*(x, y, t)$ . Учитывая явный вид матрицы  $\Gamma_+(x, y, t)$  (2.3.13),

$$\Gamma_+ = \begin{pmatrix} \alpha_+ & \beta_+^* \\ \beta_+ & -\alpha_+^* \end{pmatrix},$$

представим указанную систему в форме уравнения для матричной функции  $\Gamma_+$ :

$$\Gamma_+(x, y, t) + \sigma_3 K(x + y, t) + \int_x^{+\infty} \Gamma_+(x, z, t) \partial_y K(z + y, t) dz = 0, \quad (2.6.4)$$

где

$$K(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & -k^*(x, t) \\ k(x, t) & 0 \end{pmatrix}.$$

По известному набору обобщенных координат  $\{\lambda_j, \gamma_j(t), b(\lambda, t)\}$  уравнение (2.6.4) позволяет восстановить вид матрицы  $\Gamma_+(x, y, t)$ . Этот результат важен потому, что наличие связи (2.3.18) между функциями  $\mathbf{S}(x, t)$  и  $\Gamma_+(x, x, t)$  открывает возможность подробного теоретического описания нелинейной динамики изотропного ферромагнетика.

Систему (2.6.4) называют уравнениями Гельфанда–Левитана–Марченко для правого конца. Аналогичным образом, с помощью равенства (2.3.21), можно вывести интегральные уравнения, определяющие матрицу  $\Gamma_-(x, y, t)$ . В этих уравнениях интегрирование по переменной  $z$  производится от  $-\infty$  до  $x$ , поэтому их называют уравнениями Гельфанда–Левитана–Марченко для левого конца. Отметим, что при решении обратной задачи по изложенной схеме, вообще говоря, необходимо использовать обе системы интегральных уравнений для левого и правого концов. Первая из них позволяет теоретически описать распределение намагниченности в окрестности  $-\infty$ , а вторая — в окрестности  $+\infty$ . Утверждение о совпадении распределений намагниченности, вычисленных двумя разными способами, требует специального доказательства [9], которое мы приводить не будем.

Изложенный способ решения начальной задачи для уравнения Ландау–Лифшица (2.2.2) можно изобразить в виде диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{S}(x, t = 0) & \xrightarrow{F} & \{\lambda_j, \gamma_j(t = 0), b(\lambda, t = 0)\}; \\ \tau_1 \downarrow & & \downarrow \tau_2 \\ \mathbf{S}(x, t) & \xleftarrow{F^{-1}} & \{\lambda_j, \gamma_j(t), b(\lambda, t)\}. \end{array} \quad (2.6.5)$$

Здесь отображение  $F$  представляет собой нелинейную замену переменных, линеаризующую уравнение Ландау–Лифшица (2.2.2) изотропного

ферромагнетика, отображение  $\tau_1$  дает сдвиг по времени  $t$  согласно исходному нелинейному уравнению (2.2.2), а отображение  $\tau_2$  — сдвиг по  $t$ , задаваемый явными формулами (2.3.33).

Почувительно рассмотреть отображение  $F$  для линеаризованной задачи, когда распределение намагниченности имеет вид

$$\mathbf{S}(x, t) \approx \tilde{\mathbf{S}}(x, t) = (\tilde{S}_1(x, t), \tilde{S}_2(x, t), 1), \quad |\tilde{S}_\alpha| \ll 1, \quad \alpha = 1, 2,$$

а уравнение Ландау–Лифшица упрощается:

$$\partial_t \tilde{\mathbf{S}} = [\mathbf{n} \times \partial_x^2 \tilde{\mathbf{S}}], \quad (2.6.6)$$

где  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ .

Из интегрального уравнения (2.3.4) для решения Йоста  $\varphi_-(x, \lambda)$  в линейном по  $\tilde{S}_\alpha$  приближении имеем:

$$\begin{aligned} \varphi_-(x, \lambda) &\cong \varphi_0(x, \lambda) + \\ &+ \frac{\lambda}{2i} \int_{-\infty}^x \varphi_0(x-y, \lambda) \left[ \tilde{S}_1(y) \sigma_1 + \tilde{S}_2(y) \sigma_2 \right] \varphi_0(y, \lambda) dy = \\ &= \varphi_0(x, \lambda) \left[ I + \frac{\lambda}{2i} \int_{-\infty}^x \left[ \tilde{S}_1(y) \sigma_1 + \tilde{S}_2(y) \sigma_2 \right] \varphi_0(2y, \lambda) dy \right]. \end{aligned} \quad (2.6.7)$$

Здесь мы воспользовались тождеством

$$\exp(\beta \sigma_3) \sigma_\alpha = \sigma_\alpha \exp(-\beta \sigma_3) \quad (\alpha = 1, 2).$$

Формулы (2.4.1), (2.6.7) дают элементы матрицы перехода

$$a(\lambda) \cong 1, \quad b(\lambda, t) \cong \frac{\lambda}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \tilde{S}_1(x, t) + i \tilde{S}_2(x, t) \right] \exp(-i\lambda x) dx.$$

Мы видим, что для линеаризованной задачи (2.6.6) дискретный спектр пропадает, а отображение  $F$  сводится к обычному преобразованию Фурье. Временная динамика коэффициента  $b(\lambda)$ , задаваемая формулой (2.3.33), очевидным образом совпадает с динамикой преобразования Фурье функции  $\tilde{\mathbf{S}}(x, t)$ , удовлетворяющей уравнению (2.6.6).

Приведенные соображения позволяют в общем случае интерпретировать отображение  $F$  как нелинейный аналог преобразования Фурье. При этом схема интегрирования уравнений Ландау–Лифшица изотропного ферромагнетика методом обратной задачи — диаграмма (2.6.5) — представляет собой нелинейный аналог метода Фурье.

## 2.7. Солитонные решения

*Абстрактные представления являются весьма полезными вспомогательными средствами, а иногда без них почти невозможно обойтись. Однако никогда не следует забывать, что они не обладают никакой физической реальностью. Физической реальностью обладают только исключительно перемещения локализованных элементов с течением времени.*

*Луи де Бройль*

Изложенный формализм дает полное решение задачи Коши для уравнения Ландау–Лифшица изотропного ферромагнетика (2.2.2), т. е. позволяет описать эволюцию начального распределения намагниченности. В то же время в его рамках открывается и другая возможность. А именно, широкие классы частных решений уравнения Ландау–Лифшица (2.2.2) можно выделить и полностью изучить путем подходящего выбора начальных значений обобщенных координат  $\{\lambda_j, \gamma_j, b(\lambda)\}$ . Среди множества точных решений интегрируемых моделей особое место занимают солитонные решения, которые в рассматриваемой модели ферромагнетика отвечают случаю

$$b(\lambda, t = 0) = b(\lambda, t) = 0. \quad (2.7.1)$$

Отметим, что отношение коэффициентов перехода  $b(\lambda)/a(\lambda)$  играет роль коэффициента отражения в теории рассеяния для вспомогательной линейной задачи. Такая трактовка следует из вида асимптотик функции  $\varphi_-^{(1)}(x, \lambda)$  (2.3.27). Поэтому случай (2.7.1) и все его характеристики принято называть безотражательными. Важно, что при таких данных рассеяния уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко (2.6.4) сводятся к линейным алгебраическим уравнениям и решаются явно.

В качестве примера рассмотрим односолитонное состояние ( $n = 1$ ). Для него коэффициент  $a(\lambda)$  имеет один нуль  $\lambda = \lambda_1$  ( $\text{Im } \lambda_1 > 0$ ), и потому дискретный спектр вспомогательной линейной задачи (2.3.1) характеризуется одним коэффициентом перехода:

$$\gamma_1(t) = \gamma_1(t = 0) \exp(-i\lambda_1^2 t).$$

При  $b = 0$  ядро интегрального уравнения (2.6.4) оказывается вырожденным:

$$k(z + y, t) = -\frac{m_1(t)}{\lambda_1} \exp\left(\frac{i\lambda_1}{2} z\right) \exp\left(\frac{i\lambda_1}{2} y\right),$$

где

$$m_1(t) = m_0 \exp(-i\lambda_1^2 t), \quad m_0 = \gamma_1(t=0) [\partial_\lambda a(\lambda)]^{-1} \Big|_{\lambda=\lambda_1}.$$

Как известно из теории интегральных уравнений, в этом случае функции  $\alpha_+(x, y, t)$ ,  $\beta_+(x, y, t)$  следует искать в виде

$$\begin{aligned} \alpha_+(x, y, t) &= a(x, t) \exp\left(\frac{i\lambda_1 y}{2}\right), \\ \beta_+(x, y, t) &= b(x, t) \exp\left(\frac{i\lambda_1 y}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.7.2)$$

После подстановки формул (2.7.2) в уравнение (2.6.4) все интегрирования выполняются явно. Матричное интегральное уравнение (2.6.4) сводится к алгебраической системе для величин  $a$ ,  $b$ ,  $a^*$ ,  $b^*$ , которая дает:

$$\begin{aligned} a(x, t) &= \frac{|m_1(t)|^2}{\lambda_1^* (\lambda_1 - \lambda_1^*) \Delta} \exp\left(-\frac{i\lambda_1^* x}{2} + \frac{i}{2}(\lambda_1 - \lambda_1^*)x\right), \\ b(x, t) &= -\frac{m_1(t)}{\lambda_1 \Delta} \exp\left(\frac{i\lambda_1 x}{2}\right), \end{aligned}$$

где

$$\Delta = 1 + \left| \frac{m_1(t)}{\lambda_1 - \lambda_1^*} \right|^2 \exp(i(\lambda_1 - \lambda_1^*)x).$$

Используя этот результат, вычислим матрицу  $I - \Gamma_+(x, \lambda)\sigma_3$ :

$$\begin{aligned} I - \Gamma_+(x, x, t)\sigma_3 &= \begin{pmatrix} A(x, t) & B^*(x, t) \\ -B(x, t) & A^*(x, t) \end{pmatrix}; \\ A(x, t) &= \frac{1}{\Delta} \left[ 1 + \left| \frac{m_1(t)}{\lambda_1 - \lambda_1^*} \right|^2 \frac{\lambda_1}{\lambda_1^*} \exp(i(\lambda_1 - \lambda_1^*)x) \right], \\ B(x, t) &= -\frac{m_1(t)}{\lambda_1 \Delta} \exp(i\lambda_1 x). \end{aligned}$$

После этого из формулы (2.3.18) получим аналитическое выражение для решения уравнения Ландау–Лифшица (2.2.2):

$$\begin{aligned} S_3(x, t) &= |A(x, t)|^2 - |B(x, t)|^2 = 1 - 2|B(x, t)|^2, \\ S_+(x, t) &\equiv S_1(x, t) + i S_2(x, t) = -2A^*(x, t)B(x, t). \end{aligned} \quad (2.7.3)$$

Вводя вещественные параметры  $u$ ,  $v$  и обозначения

$$\lambda_1 = \frac{v}{2} + \frac{i u}{2} \quad (u > 0), \quad x_0 = \frac{2}{u} \ln \left( \frac{|m_0|}{u} \right), \quad \alpha_0 = \arg \frac{m_0}{(v + i u)^2},$$

запишем решение (2.7.3) в явном виде:

$$\begin{aligned}
 S_3(x, t) &= 1 - \frac{2u^2}{(u^2 + v^2) \operatorname{ch}^2[u(x - vt - x_0)/2]}, \\
 S_1(x, t) + i S_2(x, t) &= \frac{2u \exp[i(\alpha_0 + v x/2 + (u^2 - v^2)t/4)]}{(u^2 + v^2) \operatorname{ch}^2[u(x - vt - x_0)/2]} \times \\
 &\times \left[ i u \operatorname{sh}\left(\frac{u}{2}(x - vt - x_0)\right) + v \operatorname{ch}\left(\frac{u}{2}(x - vt - x_0)\right) \right].
 \end{aligned} \quad (2.7.4)$$

Эти формулы показывают, что решение  $\mathbf{S}(x, t)$  представляет собой уединенную волну, локализованную в области с характерным размером  $\sim u^{-1}$  с центром в точке

$$x(t) = x_0 + vt,$$

которая движется с постоянной скоростью  $v$  (см. рис. 2.2). Волна имеет конечную энергию и, более того, значения всех интегралов движения (2.4.11) на решении (2.7.4) конечны. По установившейся традиции волны с такими свойствами называют солитонами в строгом значении этого термина, хотя в физической литературе под солитоном чаще подразумевают любое частицеподобное решение, т. е. локализованное решение с конечной энергией.

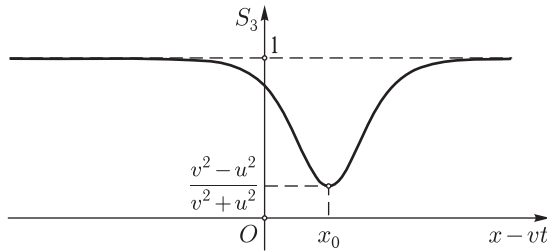


Рис. 2.2. Компонента  $S_3$  прецессионного солитона в ферромагнетике

Магнитное возбуждение (2.7.4) не только движется поступательно, но и осциллирует, так как по области локализации солитона пробегает малоамплитудная волна прецессии вектора  $\mathbf{S}$  вокруг оси  $Ox_3$  с волновым вектором  $k = v/2$  и частотой  $\omega = (u^2 - v^2)/4$  (в лабораторной системе координат). Волна зарождается у одного края солитона и исчезает у противоположного. В системе координат, связанной с солитоном, частота прецессии  $\omega' = \omega + kv = (u^2 + v^2)/4$  всегда положительна. Отсутствие симметрии выражения для частоты  $\omega'$  относительно точки  $\omega' = 0$  связано с выбором вполне определенного основного состояния  $\mathbf{M} = M_0(0, 0, -1)$ , прецессия вектора намагниченности  $\mathbf{M} = -M_0 \mathbf{S}$  вокруг которого в разных направлениях физически не эквивалентна.

Континуальное приближение справедливо, когда в исходных размерных переменных длина малоамплитудной волны и ширина солитона больше постоянной решетки  $a$ . Отсюда получаем ограничение на параметры решения (2.7.4):

$$v^2, u^2 < \alpha/a^2,$$

где  $\alpha$  — постоянная обменного взаимодействия.

Мультисолитонные решения уравнений нелинейной динамики изотропного ферромагнетика (2.2.2) описывают упругие парные столкновения  $n > 1$  солитонов типа (2.7.4). Процессы столкновения солитонов проще всего теоретически описать в рамках метода «одевания» Захарова–Шабата, к изложению которого мы и переходим.

## 2.8. Матричная задача Римана

*Корни всякого открытия лежат далеко в глубине прошлого, и, как волны, бьющие с разбега на берег, много раз плещется человеческая мысль около подготавливаемого открытия, пока не придет девятый вал.*

В. И. Вернадский

В этом разделе мы покажем, что в основе изложенной схемы интегрирования уравнения нелинейной динамики изотропного ферромагнетика лежит классическая матричная задача Римана теории функций комплексной переменной.

Напомним, что исходным пунктом метода обратной задачи рассеяния была связь матричных решений Йоста при вещественных значениях спектрального параметра  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} \varphi_-(x, \lambda) &= \varphi_+(x, \lambda) T(\lambda), \\ T(\lambda) &= \begin{pmatrix} a(\lambda) & -b^*(\lambda) \\ b(\lambda) & a^*(\lambda) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.8.1)$$

и свойства аналитичности по параметру  $\lambda$  функций  $\varphi_{\pm}(\lambda)$  и  $T(\lambda)$ . Для более полного выявления роли аналитических свойств, введем матричные функции

$$\begin{aligned} F_+(x, \lambda) &= \frac{1}{a(\lambda)} \left( \varphi_-^{(1)}(x, \lambda), \varphi_+^{(2)}(x, \lambda) \right), \\ F_-(x, \lambda) &= \left( \varphi_+^{(1)}(x, \lambda), \varphi_-^{(2)}(x, \lambda) \right), \end{aligned}$$

которые являются решениями вспомогательной линейной задачи (2.3.1) и аналитически продолжаются с вещественной  $\lambda$ -оси в верхнюю и нижнюю полуплоскости соответственно.

Матричное соотношение (2.8.1) равносильно связям между векторами-столбцами:

$$\begin{aligned}\varphi_-^{(1)}(x, \lambda) &= a(\lambda) \varphi_+^{(1)}(x, \lambda) + b(\lambda) \varphi_+^{(2)}(x, \lambda), \\ \varphi_-^{(2)}(x, \lambda) &= -b^*(\lambda) \varphi_+^{(1)}(x, \lambda) + a^*(\lambda) \varphi_+^{(2)}(x, \lambda).\end{aligned}\quad (2.8.2)$$

Поскольку матрица, обратная по отношению к  $T(\lambda)$ , имеет вид

$$T^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} a^*(\lambda) & b^*(\lambda) \\ -b(\lambda) & a(\lambda) \end{pmatrix},$$

наряду с (2.8.2) справедливы равенства:

$$\begin{aligned}\varphi_+^{(1)}(x, \lambda) &= a^*(\lambda) \varphi_-^{(1)}(x, \lambda) - b(\lambda) \varphi_-^{(2)}(x, \lambda), \\ \varphi_+^{(2)}(x, \lambda) &= b^*(\lambda) \varphi_-^{(1)}(x, \lambda) + a(\lambda) \varphi_-^{(2)}(x, \lambda).\end{aligned}\quad (2.8.3)$$

С помощью формул (2.8.2), (2.8.3) и связи (2.8.1) матричные функции  $F_{\pm}(x, \lambda)$  при вещественных  $\lambda$  записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}F_+(x, \lambda) &= \frac{1}{a(\lambda)} \varphi_+(x, \lambda) M_{++}(\lambda) = \frac{1}{a(\lambda)} \varphi_-(x, \lambda) M_{-+}(\lambda); \\ F_-(x, \lambda) &= \varphi_+(x, \lambda) M_{+-}(\lambda) = \varphi_-(x, \lambda) M_{--}(\lambda),\end{aligned}\quad (2.8.4)$$

где матрицы  $M_{\pm\pm}(\lambda)$  имеют специальный треугольный вид:

$$\begin{aligned}M_{++}(\lambda) &= \begin{pmatrix} a(\lambda) & 0 \\ b(\lambda) & 1 \end{pmatrix}, & M_{-+}(\lambda) &= \begin{pmatrix} 1 & b^*(\lambda) \\ 0 & a(\lambda) \end{pmatrix}, \\ M_{+-}(\lambda) &= \begin{pmatrix} 1 & -b^*(\lambda) \\ 0 & a^*(\lambda) \end{pmatrix}, & M_{--}(\lambda) &= \begin{pmatrix} a^*(\lambda) & 0 \\ -b(\lambda) & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (2.8.5)$$

Формулы (2.8.4) и (2.8.1) совместны только тогда, когда справедливы две эквивалентные факторизации матрицы перехода:

$$T(\lambda) = M_{+-}(\lambda) M_{-+}^{-1}(\lambda) = M_{++}(\lambda) M_{--}^{-1}(\lambda).$$

Треугольный вид матриц  $M_{\pm\pm}(\lambda)$  позволяет однозначно их восстановить по заданной унитарной матрице  $T(\lambda)$ .

В терминах матриц  $F_{\pm}(x, \lambda)$  соотношение (2.8.1), как следует из равенств (2.8.4), приобретает вид

$$F_-(x, \lambda) = F_+(x, \lambda) G_0(\lambda), \quad (2.8.6)$$

где

$$\begin{aligned}G_0(\lambda) &= a(\lambda) M_{++}^{-1}(\lambda) M_{+-}(\lambda) = \\ &= a(\lambda) M_{-+}^{-1}(\lambda) M_{--}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & -b^*(\lambda) \\ -b(\lambda) & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (2.8.7)$$

При вещественных значениях  $\lambda$  матрица  $G_0(\lambda)$  эрмитова:

$$G_0^\dagger(\lambda) = G_0(\lambda).$$

Учитывая унимодулярность матриц  $\varphi_\pm(x, \lambda)$ , из соотношений (2.8.4) находим при вещественных значениях  $\lambda$ :

$$\det F_+^{-1}(x, \lambda) = a(\lambda), \quad \det F_-(x, \lambda) = a^*(\lambda). \quad (2.8.8)$$

С вещественной оси эти соотношения могут быть продолжены в верхнюю и нижнюю полуплоскости комплексной переменной  $\lambda$ .

Из формул (2.8.8) следует, что матричные функции  $F_+^{-1}(\lambda)$  и  $F_-(\lambda)$  не имеют сингулярностей в областях своей аналитичности. Единственными их особенностями могут быть только нули коэффициентов  $a(\lambda)$  и  $a^*(\lambda^*)$ .

Напомним, что вещественный параметр  $\lambda$  имеет смысл квазиимпульса магнона. При большом квазиимпульсе (при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ ) магнон «не чувствует рассеивающего потенциала  $\mathbf{S}(x, t)$ ». Это подтверждается асимптотическим поведением функций  $F_\pm(x, \lambda)$  при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ ,  $|x| \rightarrow \infty$ . Согласно формулам (2.8.4) и результатам разд. 2.4 по исследованию асимптотического поведения функции  $\varphi_-(x, \lambda)$  при больших значениях  $|\lambda|$ , имеем

$$F_-(x, \lambda) \sim F_+(x, \lambda) \sim \varphi_0(x, \lambda) = \exp\left(\frac{\lambda}{2i} x \sigma_3\right)$$

при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ ,  $|x| \rightarrow \infty$ . Выделим из матриц  $F_+(x, \lambda)$  и  $F_-(x, \lambda)$  эти асимптотики и введем новые матричные функции

$$\begin{aligned} G_-(x, \lambda) &= F_-(x, \lambda) \varphi_0^{-1}(x, \lambda), \\ G_+(x, \lambda) &= \varphi_0(x, \lambda) F_+^{-1}(x, \lambda), \end{aligned} \quad (2.8.9)$$

которые также аналитически продолжаются с вещественной  $\lambda$ -оси в верхнюю и нижнюю полуплоскости комплексной переменной  $\lambda$ .

Из (2.8.6), (2.8.9) получаем равенство, справедливое на вещественной  $\lambda$ -оси:

$$G_+(x, \lambda) G_-(x, \lambda) = G(x, \lambda), \quad (2.8.10)$$

где

$$G(x, \lambda) = \varphi_0(x, \lambda) G_0(\lambda) \varphi_0^{-1}(x, \lambda). \quad (2.8.11)$$

Соотношение (2.8.10) показывает, что центральную роль в формулировке метода интегрирования уравнений Ландау–Лифшица изотропного ферромагнетика (2.2.2) играет одна из классических задач теории функций комплексного переменного, известная как задача Римана. В общем случае она формулируется следующим образом.

Пусть на плоскости комплексного переменного  $\lambda$  задан замкнутый контур  $\Gamma$ , возможно проходящий через бесконечно удаленную точку,



и пусть на нем задана матричная функция  $G(\lambda)$ . Требуется построить матричную функцию  $G_+(\lambda)$ , аналитическую внутри контура  $\Gamma$ , и матричную функцию  $G_-(\lambda)$ , аналитическую вне контура, причем на самом контуре  $G_+(\lambda)$  и  $G_-(\lambda)$  должны задавать факторизацию матрицы  $G(\lambda)$ :

$$G_+(\lambda) G_-(\lambda) = G(\lambda), \quad \lambda \in \Gamma. \quad (2.8.12)$$

Для модели изотропного ферромагнетика в качестве контура выступает вещественная ось:

$$\Gamma = \{\lambda : \operatorname{Im} \lambda = 0, -\infty < \operatorname{Re} \lambda < \infty\}.$$

Переменные  $x, t$  играют роль параметров.

Очевидно, что решение задачи Римана не единственно. Так, если  $G_+(\lambda)$  и  $G_-(\lambda)$  — некоторое решение, а  $g$  — произвольная невырожденная матричная функция, не зависящая от  $\lambda$ , то пара матричных функций  $G_+(\lambda)g$ ,  $g^{-1}G_-(\lambda)$  также будет решением задачи Римана (2.8.12) с той же функцией  $G(\lambda)$ . Неоднозначность можно устранить, задав значение одной из функций  $G_+(\lambda)$ ,  $G_-(\lambda)$  в некоторой точке из области аналитичности. Разным выбором этой точки и разным значениям функции отвечают разные нормировки задачи Римана. Чаще всего используется нормировка на единичную матрицу в бесконечно удаленной точке. Такую нормировку называют канонической. Выбор канонической нормировки не всегда возможен, так как должен быть согласован с видом вспомогательной линейной системы для интегрируемой модели. В частности, для изотропного ферромагнетика, согласно полученным ранее результатам, имеем:

$$\begin{aligned} b(\lambda = 0) &= 0, & a(\lambda = 0) &= 1; \\ \varphi_{\pm}(x, \lambda = 0) &= \varphi_0(x, \lambda = 0) = I. \end{aligned}$$

Поэтому задачу Римана (2.8.10) естественно нормировать не в точке  $\lambda = \infty$ , а в точке  $\lambda = 0$ :

$$G_{\pm}(x, t, \lambda = 0) = G(x, t, \lambda = 0) = I. \quad (2.8.13)$$

Нормировка (2.8.13) согласована как со вспомогательной линейной системой (2.3.1), (2.3.2), так и с равенством (2.8.10).

Отметим, что при рассмотрении конкретных задач на решения  $G_{\pm}(\lambda)$  задачи Римана (2.8.12) могут накладываться дополнительные ограничения — редукции. В случае изотропного ферромагнетика такой редукцией является связь между функциями  $G_+(\lambda)$  и  $G_-(\lambda)$  на вещественной  $\lambda$ -оси:

$$G_+(\lambda) = G_-^{\dagger}(\lambda), \quad (2.8.14)$$

которая продолжается в области аналитичности функций  $G_{\pm}(\lambda)$ :

$$G_+(\lambda) = G_-^{\dagger}(\lambda^*), \quad \operatorname{Im} \lambda > 0. \quad (2.8.15)$$

Редукция (2.8.14) является следствием формул (2.3.11), (2.3.17), (2.8.4), (2.8.9). Однако проще всего ее доказать, заметив, что в силу антиэрмитовости матриц  $U(\lambda)$  и  $V(\lambda)$  (2.2.10) на вещественной  $\lambda$ -оси:

$$V^\dagger(\lambda) = -V(\lambda), \quad U^\dagger(\lambda) = -U(\lambda),$$

дифференциальные уравнения для функций  $\varphi_\pm^{-1}(x, t, \lambda)$  (2.2.21), (2.2.22) совпадают с дифференциальными уравнениями для функций  $\varphi_\pm^\dagger(x, t, \lambda)$  при вещественных значениях  $\lambda$  точно так же, как совпадают соответствующие им асимптотические условия при  $x \rightarrow \pm\infty$ :

$$\varphi_0^\dagger(x, \lambda) = \varphi_0^{-1}(x, \lambda).$$

По теореме единственности решений дифференциальных уравнений для функций  $\varphi_\pm^{-1}(x, t, \lambda)$  и  $\varphi_\pm^\dagger(x, t, \lambda)$  это означает, что на вещественной  $\lambda$ -оси

$$\varphi_\pm^{-1}(x, t, \lambda) = \varphi_\pm^\dagger(x, t, \lambda).$$

С учетом формул (2.8.4), (2.8.9), отсюда сразу следует равенство (2.8.14).

Важно, что многие из обобщенных пар Лакса образованы антиэрмитовыми матрицами  $U(\lambda)$  и  $V(\lambda)$ . Поэтому редукция (2.8.15) оказывается универсальной для многих интегрируемых моделей. Именно редукция (2.8.15) позволяет в формализме Гельфанда–Левитана–Марченко ограничиться построением интегральных уравнений обратной задачи лишь для одного из концов (либо правого, либо левого). Хотя, строго говоря, это утверждение требует специального доказательства.

Кроме редукции (2.8.15), для моделей, отличных от модели изотропного ферромагнетика, возможны и другие ограничения [107]. Все они чрезвычайно важны, так как характеризуют алгебраическую структуру  $U$ - $V$ -пары, обуславливают свойства матриц  $G_\pm(\lambda)$  задачи Римана (2.8.12) и, в конечном счете, определяют явный вид решений исходного нелинейного уравнения.

Отметим еще одну интересную и важную особенность задачи Римана (2.8.10) для изотропного ферромагнетика. Вид матрицы  $G(x, \lambda)$  (2.8.11) определяется функцией  $\varphi_0(x, \lambda)$ , которая связана хотя и с тривиальным, но точным решением уравнений Ландау–Лифшица (2.2.2):

$$\mathbf{S}(x, t) = (0, 0, 1).$$

В итоге это проявляется в том, что построенные с помощью задачи Римана новые решения уравнения Ландау–Лифшица имеют асимптотику:

$$\mathbf{S}(x, t) \rightarrow (0, 0, 1) \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty.$$

В следующем разделе будет изложена общая схема построения новых решений нелинейной интегрируемой модели посредством «оде-

вания» известных частных решений модели с помощью задачи Римана. Процедура сохранит отмеченные закономерности. А именно, выбранное частное решение нелинейного уравнения определит матричное решение  $\varphi_0(x, t, \lambda)$  вспомогательной линейной системы, которое войдет в формулировку задачи Римана. Все вновь построенные солитонные решения исходного нелинейного уравнения в качестве асимптотики при  $|x| \rightarrow \infty$  будут иметь выбранное «затравочное» решение.

## 2.9. Интегрирование нелинейных уравнений с помощью матричной задачи Римана

*В науках же и искусствах... все должно шуметь новыми работами и дальнейшими продвижениями вперед.*

Ф. Бэкон

### 2.9.1. «Одевание» частных решений интегрируемых моделей с использованием регулярной задачи Римана

Изложим прямой метод вычисления точных решений нелинейных уравнений, основанный на использовании матричной задачи Римана [5, 9, 14, 15].

Пусть исходное нелинейное уравнение эквивалентно условию совместности

$$\partial_t U(\lambda) - \partial_x V(\lambda) + [U(\lambda), V(\lambda)] = 0 \quad (2.9.1)$$

некоторой вспомогательной системы линейных дифференциальных уравнений для матричной функции  $\chi(x, t, \lambda)$ :

$$\partial_x \chi = U(\lambda) \chi, \quad \partial_t \chi = V(\lambda) \chi. \quad (2.9.2)$$

В общем случае  $U(\lambda)$ ,  $V(\lambda)$  могут быть мероморфными функциями параметра  $\lambda$  на римановой поверхности рода  $g$ . Случай  $g = 1$  обсудим отдельно в главах 5, 7. В то же время, характерным свойством многих интегрируемых моделей является случай  $g = 0$  с рациональной зависимостью матриц  $U$  и  $V$  от спектрального параметра  $\lambda$ . Такие матрицы можно представить в виде разложений на простые дроби:

$$\begin{aligned} U &= \sum_{i=1}^m \sum_{r=1}^{n_i} \frac{U_{i,r}(x, t)}{(\lambda - a_i)^r} + \sum_{k=0}^{n_\infty} \lambda^k U_k(x, t), \\ V &= \sum_{j=1}^{\tilde{m}} \sum_{s=1}^{\tilde{n}_j} \frac{V_{j,s}(x, t)}{(\lambda - b_j)^s} + \sum_{l=0}^{\tilde{n}_\infty} \lambda^l V_l(x, t). \end{aligned} \quad (2.9.3)$$

Коэффициенты  $U_{i,r}$ ,  $V_{j,s}$ ,  $U_k$ ,  $V_l$  в общем случае являются  $n \times n$ -матрицами в пространстве  $C^n$ . В каждой конкретной задаче коммутационное соотношение (2.9.1) дает свою систему нелинейных дифференциальных уравнений на матричные коэффициенты  $U_{i,r}$ ,  $V_{j,s}$ ,  $U_k$ ,  $V_l$ . Вид системы зависит лишь от дивизоров полюсов матриц  $U(\lambda)$  и  $V(\lambda)$ . Напомним, что, по определению, дивизоры полюсов задают положение, кратность и число полюсов в правых частях равенств (2.9.3). Формально считаем, что выражению  $\lambda^k$  с натуральным показателем степени  $k$  соответствует полюс в точке  $\lambda = \infty$ , кратность которого определяется после отображения  $\lambda \rightarrow 1/\lambda$ , т. е. равна  $k$ .

Дивизоры полюсов матриц  $U(\lambda)$  и  $V(\lambda)$  записывают в виде

$$\begin{aligned} D_U &= \{(a_i, n_i), i = 1, 2, \dots, m; \quad (\lambda = \infty, n_\infty)\}, \\ D_V &= \{(b_i, \tilde{n}_i), i = 1, 2, \dots, \tilde{m}; \quad (\lambda = \infty, \tilde{n}_\infty)\}. \end{aligned}$$

Как правило, для содержательных физических приложений необходимо уменьшить число матричных коэффициентов в разложении (2.9.3). Конкретные нелинейные модели получаются из общей системы вида (2.9.1), (2.9.3) в результате редукций — наложения на матрицы  $U(\lambda)$  и  $V(\lambda)$  связей, совместимых с рассматриваемой задачей.

Для упрощения дальнейшего изложения, предположим, что матрицы  $U(\lambda)$  и  $V(\lambda)$  не имеют полюсов в точке  $\lambda = \infty$  и удовлетворяют дополнительным ограничениям:

$$U^\dagger(\lambda^*) = -U(\lambda), \quad V^\dagger(\lambda^*) = -V(\lambda); \quad (2.9.4)$$

$$U(\lambda = \infty) = V(\lambda = \infty) = 0. \quad (2.9.5)$$

Возможны также другие и (или) дополнительные редукции. Полное их описание представляет важную задачу классификации интегрируемых моделей [107].

При условии (2.9.5) матрицы  $U(\lambda)$  и  $V(\lambda)$  имеют более конкретный вид:

$$U = \sum_{i=1}^m \sum_{r=1}^{n_i} \frac{U_{i,r}(x, t)}{(\lambda - a_i)^r}, \quad V = \sum_{j=1}^{\tilde{m}} \sum_{s=1}^{\tilde{n}_j} \frac{V_{j,s}(x, t)}{(\lambda - b_j)^s}. \quad (2.9.6)$$

Их дивизорами полюсов будут

$$\begin{aligned} D_U &= \{(a_i, n_i), i = 1, 2, \dots, m\}, \\ D_V &= \{(b_i, \tilde{n}_i), i = 1, 2, \dots, \tilde{m}\}. \end{aligned} \quad (2.9.7)$$

Для интегрируемых моделей магнетиков известные формы матриц  $U(\lambda)$  и  $V(\lambda)$  записываются в виде разложений по генераторам группы  $SU(2)$  — группы унитарных унимодулярных  $2 \times 2$ -матриц. Группа  $SU(2)$  является наиболее естественной для описания основных (обменных) взаимодействий в магнетиках. Поэтому далее для упрощения изложения будем предполагать  $U(\lambda)$  и  $V(\lambda)$  матрицами порядка  $2 \times 2$ .

Пусть  $\chi(\lambda)$  — некоторое решение уравнения (2.9.2), тогда, вследствие (2.9.4), функция  $[\chi^\dagger(\lambda^*)]^{-1}$  также будет решением. Положим

$$\chi^{-1}(\lambda) = \chi^\dagger(\lambda^*). \quad (2.9.8)$$

Учитывая (2.9.5), из системы (2.9.2) находим:

$$\chi(\lambda = \infty) = \text{const.}$$

Ввиду линейности уравнений (2.9.2), без ограничения общности можно считать, что

$$\chi(\lambda = \infty) = I. \quad (2.9.9)$$

Покажем, как, имея одно из решений системы (2.9.1), (2.9.2), например  $U_0(\lambda)$ ,  $V_0(\lambda)$ ,  $\chi_0(\lambda)$ , можно строить ее новые решения. Построение новых решений сводится к нахождению  $2 \times 2$ -матричных функций  $G_+(\lambda)$  и  $G_-(\lambda)$ , первая из которых аналитична внутри замкнутого контура  $\Gamma$  в комплексной  $\lambda$ -плоскости, а вторая аналитична вне контура  $\Gamma$ . Далее для определенности в качестве контура используется вещественная ось комплексной  $\lambda$ -плоскости:

$$\Gamma = \{\lambda : \text{Im} \lambda = 0, -\infty < \text{Re} \lambda < \infty\}.$$

Такой контур формально замкнут в бесконечно удаленной точке. Функции  $G_+(\lambda)$  и  $G_-(\lambda)$ , аналитические в верхней и нижней полуплоскостях комплексной  $\lambda$ -плоскости, на контуре  $\Gamma$  удовлетворяют условию

$$G_+(x, t, \lambda) G_-(x, t, \lambda) = G(x, t, \lambda), \quad (2.9.10)$$

где

$$G(x, t, \lambda) = \chi_0(x, t, \lambda) G_0(\lambda) \chi_0^{-1}(x, t, \lambda).$$

В формулировку матричной задачи Римана (2.9.10) переменные  $x$ ,  $t$  входят как параметры. Матрица  $G_0(\lambda)$  не зависит от переменных  $x$  и  $t$ . Необходимые для решения задачи ограничения на матричную функцию  $G_0(\lambda)$  будут сформулированы по ходу изложения.

Избавимся от неоднозначности решения задачи Римана, используя каноническую нормировку:

$$G_+(\lambda = \infty) = G_-(\lambda = \infty) = I. \quad (2.9.11)$$

Тогда матричная функция  $G_0(\lambda)$  должна удовлетворять условию

$$G_0(\lambda = \infty) = I. \quad (2.9.12)$$

Далее мы увидим, что ограничения (2.9.11), (2.9.12) согласованы как с видом  $U$ - $V$ -пары (2.9.6), так и с асимптотическим поведением при  $|\lambda| \rightarrow \infty$  (2.9.5), (2.9.9) новых решений  $U(\lambda)$ ,  $V(\lambda)$ ,  $\chi(\lambda)$  системы (2.9.1), (2.9.2).

Наша ближайшая цель — доказать, что новое решение системы (2.9.1), (2.9.2) при вещественных значениях параметра  $\lambda$  определяется формулами:

$$\begin{aligned} U(\lambda) &= -G_+^{-1}(\lambda) [\partial_x G_+(\lambda) - U_0(\lambda) G_+(\lambda)] = \\ &= [\partial_x G_-(\lambda) + G_-(\lambda) U_0(\lambda)] G_-^{-1}(\lambda), \end{aligned} \quad (2.9.13)$$

$$\begin{aligned} V(\lambda) &= -G_+^{-1}(\lambda) [\partial_x G_+(\lambda) - V_0(\lambda) G_+(\lambda)] = \\ &= [\partial_t G_-(\lambda) + G_-(\lambda) V_0(\lambda)] G_-^{-1}(\lambda); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_+(x, t, \lambda) &= G_+^{-1}(x, t, \lambda) \chi_0(x, t, \lambda), \\ \chi_-(x, t, \lambda) &= G_-(x, t, \lambda) \chi_0(x, t, \lambda). \end{aligned} \quad (2.9.14)$$

Формулы (2.9.13), (2.9.14) замечательны тем, что по известному частному решению  $U_0(\lambda)$ ,  $V_0(\lambda)$ ,  $\chi_0(\lambda)$  системы (2.9.1), (2.9.2) с помощью матриц  $G_{\pm}(x, t, \lambda)$  задачи Римана (2.9.10) генерируют новое решение системы (2.9.1), (2.9.2). Двойная форма записи правых частей равенств (2.9.13) обусловлена соотношениями

$$\begin{aligned} \partial_x G_+(\lambda) G_-(\lambda) + G_+(\lambda) \partial_x G_-(\lambda) &= \\ &= U_0(\lambda) G_+(\lambda) G_-(\lambda) - G_+(\lambda) G_-(\lambda) U_0(\lambda), \\ \partial_t G_+(\lambda) G_-(\lambda) + G_+(\lambda) \partial_t G_-(\lambda) &= \\ &= V_0(\lambda) G_+(\lambda) G_-(\lambda) - G_+(\lambda) G_-(\lambda) V_0(\lambda), \end{aligned}$$

которые получаются дифференцированием по  $x$  и  $t$  условия (2.9.10).

Доказательство начнем с выяснения зависимости от параметра  $\lambda$  матриц  $U(\lambda)$  и  $V(\lambda)$ , определенных выражениями (2.9.13).

В этом разделе обсудим случай регулярной задачи Римана, когда матрицы  $G_+(\lambda)$ ,  $G_-(\lambda)$  не вырождены в областях своей аналитичности:

$$\det G_+(\lambda) \neq 0, \quad \det G_-(\lambda) \neq 0.$$

Тогда из формул (2.9.13) следует, что функции  $U(\lambda)$  и  $V(\lambda)$  допускают аналитическое продолжение с вещественной оси на всю комплексную  $\lambda$ -плоскость, за исключением полюсов «затравочных» функций  $U_0(\lambda)$  и  $V_0(\lambda)$ , которые характеризуются дивизорами  $D_U$  и  $D_V$  (2.9.7).

Примем дополнительное ограничение на матричную функцию  $G_0(\lambda)$ , которая определяет правую часть равенства (2.9.10) задачи Римана. Если точка  $(\lambda_0, n_0)$  дивизора  $D_U$  (или  $D_V$ ) попадает на контур  $\Gamma$ , то будем предполагать, что в малой окрестности такой точки функция  $G_0(\lambda)$  имеет вид

$$G_0(\lambda) = I + O(|\lambda - \lambda_0|^{n_0}). \quad (2.9.15)$$

Покажем, что при условии (2.9.15) матричные функции  $U(x, t, \lambda)$  и  $V(x, t, \lambda)$ , определенные формулами (2.9.13), при любых значениях

переменных  $x$  и  $t$  являются рациональными функциями параметра  $\lambda$  с дивизорами полюсов (2.9.7), т.е. имеют по  $\lambda$  такую же алгебраическую структуру (2.9.6), что и «затравочные» матрицы  $U_0(\lambda)$  и  $V_0(\lambda)$ .

Рассмотрим первую возможность, когда точка  $(\lambda_0, n_0)$  из набора (2.9.7) не лежит на контуре  $\Gamma$ . Тогда матричная функция  $U(x, t, \lambda)$ , определенная формулой (2.9.13), имеет в точке  $\lambda = \lambda_0$  полюс того же порядка  $n_0$ , какой был у матричной функции  $U_0(x, t, \lambda)$ .

Обсудим вторую возможность: точка  $(\lambda_0, n_0)$  дивизора лежит на контуре  $\Gamma$ . Тогда «затравочное» решение  $\chi_0(x, t, \lambda)$  вспомогательной линейной системы (2.9.2) будет иметь существенную особенность на контуре  $\Gamma$ . Тем не менее, условие (2.9.15) гарантирует регулярность в точке  $\lambda = \lambda_0$  как функций  $G(x, t, \lambda)$ ,  $G_{\pm}(x, t, \lambda)$ , так и функций  $\partial_x G_{\pm}(x, t, \lambda)$  (см. (2.9.10)).

Таким образом, в обоих случаях матричная функция  $U(x, t, \lambda)$ , определенная формулами (2.9.13), имеет в точке  $\lambda = \lambda_0$  полюс порядка  $n_0$ .

По теореме Лиувилля матричная функция  $U(x, t, \lambda)$ , аналитическая во всей комплексной  $\lambda$ -плоскости, за исключением полюсов с дивизором  $D_U$ , и имеющая асимптотическое поведение (2.9.5) при  $\lambda \rightarrow \infty$  является рациональной функцией вида (2.9.6).

Аналогичным образом доказывается, что матричная функция  $V(x, t, \lambda)$ , определенная формулами (2.9.13), является рациональной функцией параметра  $\lambda$  типа (2.9.6) с дивизором полюсов  $D_V$  (2.9.7).

Таким образом, при «затравочных» матричных функциях  $U_0(\lambda)$  и  $V_0(\lambda)$  с рациональной зависимостью от параметра  $\lambda$  типа (2.9.6) новые функции  $U(\lambda)$  и  $V(\lambda)$ , построенные по формулам (2.9.13), будут иметь точно такую же зависимость от параметра  $\lambda$ . Изменяются лишь коэффициенты  $U_{i,r}$ ,  $V_{j,s}$  в формулах (2.9.6).

Каноническая нормировка (2.9.11) задачи Римана гарантирует выполнение условий (2.9.5), (2.9.9) для новых матричных функций  $U(\lambda)$ ,  $V(\lambda)$  (2.9.13) и  $\chi(\lambda)$  (2.9.14).

Новые функции  $U(\lambda)$ ,  $V(\lambda)$  (2.9.13) и  $\chi(\lambda)$  (2.9.14) будут удовлетворять редукциям (2.9.4), (2.9.8), если наложить дополнительные ограничения на матрицы  $G_+(\lambda)$ ,  $G_-(\lambda)$ ,  $G_0(\lambda)$  задачи Римана (2.9.10):

$$G_+(\lambda) = G_-^\dagger(\lambda), \quad G_0^\dagger(\lambda) = G_0(\lambda), \quad \det G_0 > 0; \quad (2.9.16)$$

$$\lambda \in \Gamma = \{\lambda : \operatorname{Im} \lambda = 0, -\infty < \operatorname{Re} \lambda < \infty\}.$$

В рассматриваемом случае регулярной задачи Римана, когда матрицы  $G_+(\lambda)$ ,  $G_-(\lambda)$  не вырождены в областях своей аналитичности, прямой проверкой можно убедиться, что матричные функции  $\chi_{\pm}(x, t, \lambda)$ ,  $U(x, t, \lambda)$ ,  $V(x, t, \lambda)$ , построенные по формулам (2.9.13), (2.9.14), дают точное решение системы вспомогательных дифференциальных уравнений (2.9.1), (2.9.2). Изложенную процедуру интегрирования системы (2.9.1), (2.9.2) можно назвать методом «одевания» «затравочных» решений  $U_0(x, t, \lambda)$ ,  $V_0(x, t, \lambda)$ ,  $\chi_0(x, t, \lambda)$  при помощи матричной задачи Римана с контуром  $\Gamma$  и функцией  $G_0(\lambda)$ .

Мы сконструировали матричные функции  $U(x, t, \lambda)$ ,  $V(x, t, \lambda)$ , которые обладают той же алгебраической структурой по параметру  $\lambda$ , что и «затравочные» функции  $U_0(x, t, \lambda)$ ,  $V_0(x, t, \lambda)$  и удовлетворяют дифференциальному уравнению (2.9.1). Напомним, что исходное нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных было эквивалентно коммутационному представлению (2.9.1) при любых значениях параметра  $\lambda$ . Поэтому проблема построения нового решения исходного нелинейного уравнения по известному частному решению свелась к простой алгебраической задаче: нужно вернуться от матричных коэффициентов  $U_{i,r}$ ,  $V_{j,s}$  в формулах (2.9.6) к полевым переменным, в терминах которых записано исходное нелинейное уравнение.

Решения волновых уравнений движения (2.9.1), построенные с помощью регулярной задачи Римана, описывают волны с преобладанием эффекта дисперсии над нелинейностью.

Покажем, что решение регулярной задачи Римана сводится к интегрированию линейной системы сингулярных интегральных уравнений на контуре  $\Gamma$ . Рассмотрим функцию

$$\Phi(\lambda) = \begin{cases} G_+^{-1}(\lambda), & \text{Im}\lambda > 0, \\ G_-(\lambda), & \text{Im}\lambda < 0. \end{cases}$$

По построению функция  $\Phi(\lambda)$  аналитична в верхней и нижней полуплоскостях комплексной переменной  $\lambda$ , а на вещественной оси имеет скачок, который, как следует из (2.9.10), равен

$$G_+^{-1}(\lambda) - G_-(\lambda) = G_+^{-1}(\lambda)[I - G(\lambda)], \quad (2.9.17)$$

где  $G(\lambda) = \chi_0(\lambda)G_0(\lambda)\chi_0^{-1}(\lambda)$ . Согласно (2.9.11), функция  $\Phi(\lambda) \rightarrow I$  при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ . Используя формулу Коши

$$\Phi(\lambda) - I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{[\Phi(\lambda') - I]}{\lambda' - \lambda} d\lambda',$$

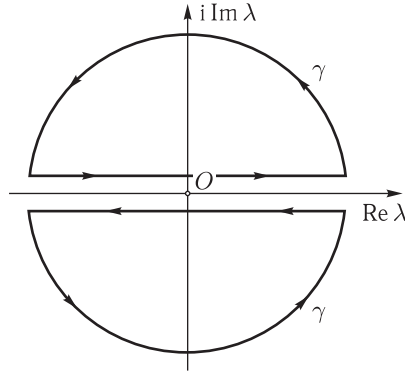
в которой контур интегрирования  $\gamma$  выбран так, как показано на рис. 2.3, и, учитывая, что величина скачка функции  $\Phi(\lambda)$  на вещественной оси определяется выражением (2.9.17), получаем представление функции  $\Phi(\lambda)$  в виде

$$\Phi(\lambda) = I + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_+^{-1}(\lambda') [I - G(\lambda')]}{\lambda' - \lambda} d\lambda'.$$

По определению  $\Phi(\lambda) = G_-(\lambda)$  при  $\text{Im}\lambda < 0$ . Это равенство выполняется, в частности, когда  $\lambda$  стремится к вещественной оси из нижней полуплоскости:

$$G_-(\lambda) = I + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_+^{-1}(\lambda') [I - G(\lambda')]}{\lambda' - \lambda + i0} d\lambda'. \quad (2.9.18)$$



Рис. 2.3. Выбор контура  $\gamma$  в комплексной  $\lambda$ -плоскости

В соотношении (2.9.18) переменная  $\lambda$  вещественна, интеграл вычисляется в соответствии с формулами Сохоцкого–Племеля:

$$\frac{1}{\lambda' - \lambda \pm i0} = \text{V. p.} \frac{1}{\lambda' - \lambda} \mp \pi i \delta(\lambda' - \lambda), \quad (2.9.19)$$

где V. p. — символ главного значения Коши.

Для произвольной невырожденной  $2 \times 2$ -матрицы  $G_+$  справедливо тождество

$$G_+^{-1}(\lambda) = \frac{\sigma_2 G_+^T(\lambda) \sigma_2}{\det G_+(\lambda)}, \quad (2.9.20)$$

где верхний индекс «Т» означает транспонирование. Используя редукцию (2.9.16), преобразуем равенство (2.9.20) к виду

$$G_+^{-1}(\lambda) = \frac{\sigma_2 G_-^*(\lambda) \sigma_2}{\det G_+(\lambda)}, \quad \lambda \in \Gamma.$$

Значения  $|\det G_+(\lambda)|$  и  $\det G_0$  связаны между собой. Действительно, из (2.9.10), (2.9.16) находим

$$|\det G_+| = [\det G_0]^{1/2}.$$

Аргумент функции  $\det G_+(\lambda)$  восстанавливается по ее модулю с помощью дисперсионного соотношения для функции  $\ln \det G_+(\lambda)$ :

$$\arg \det G_+(\lambda) = -\frac{1}{\pi} \text{V. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln |\det G_+(\lambda')| d\lambda'}{\lambda' - \lambda}, \quad \lambda \in \Gamma. \quad (2.9.21)$$

В случае изотропного ферромагнетика формула (2.9.21) совпадает с соотношением (2.5.5), которое связывает вещественную и мнимую части функции  $\ln a(\lambda)$ . Обозначим по аналогии:

$$a(\lambda) \equiv \det G_+(x, t, \lambda) = [\det G_0]^{1/2} \exp \left( \frac{1}{2\pi i} \text{V. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln \det G_0(\lambda')}{\lambda' - \lambda} d\lambda' \right), \quad \lambda \in \Gamma. \quad (2.9.22)$$

В результате для расчета матричной функции  $G_-(\lambda)$  получаем замкнутое сингулярное интегральное уравнение:

$$G_-(x, t, \lambda) = I + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_2 G_-^*(x, t, \lambda') \sigma_2 [I - G(x, t, \lambda')]}{(\lambda' - \lambda + i0) a(\lambda')} d\lambda', \quad \lambda \in \Gamma. \quad (2.9.23)$$

Из уравнения (2.9.23) находим  $G_-(\lambda)$  при вещественных значениях  $\lambda$ , а затем аналитически продолжаем результат в область  $\text{Im} \lambda < 0$ . Функцию  $G_+(\lambda)$  восстанавливаем по функции  $G_-(\lambda)$  с помощью редукции (2.9.16).

Приведенные формулы (2.9.22), (2.9.23) показывают, что необходимым условием разрешимости регулярной задачи Римана является сходимость интегралов, в частности отсутствие нулей и полюсов у функции  $\det G_0(\lambda)$ . В то же время отметим, что требование сходимости всех интегралов может оказаться недостаточным для разрешимости системы (2.9.23). Достаточным условием является, например, требование, что матрица  $G(x, t, \lambda) + G^\dagger(x, t, \lambda)$  положительно определена при вещественных значениях  $\lambda$  [7, 9]. Далее будем всюду предполагать, что регулярная задача Римана разрешима. Более того, при наложении нормировки она разрешима однозначно.

При рассмотрении конкретных задач изложенная схема решения регулярной задачи Римана может видоизмениться. В качестве примера, обсудим модель изотропного ферромагнетика. Поскольку задача Римана (2.8.10) в этом случае нормирована на единичную матрицу в точке  $\lambda = 0$  (2.8.13), будем искать матрицы  $G_+^{-1}(\lambda)$  и  $G_-(\lambda)$  в виде

$$G_+^{-1}(\lambda) = I + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu, \quad \text{Im} \lambda > 0;$$

$$G_-(\lambda) = I + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu, \quad \text{Im} \lambda < 0.$$

На вещественной  $\lambda$ -оси по формулам (2.9.19) Сохоцкого–Племеля имеем

$$\begin{aligned} G_+^{-1}(\lambda) &= I + \lambda \left[ \text{V. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu + \pi i \varphi(\lambda) \right], \\ G_-(\lambda) &= I + \lambda \left[ \text{V. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu - \pi i \varphi(\lambda) \right]. \end{aligned} \quad (2.9.24)$$

Подставляя (2.9.24) в (2.9.17), находим:

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{2\pi i \lambda} G_+^{-1}(\lambda) [I - G(\lambda)].$$

Используя второе из уравнений (2.9.24) и повторяя уже приведенные вычисления, получаем замкнутую систему сингулярных интегральных уравнений для расчета матричной функции  $G_-(\lambda)$ :

$$G_-(\lambda) = I + \frac{\lambda}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_2 G_-^*(\mu) \sigma_2 [I - G(\mu)]}{a(\mu) \mu (\mu - \lambda + i0)} d\mu, \quad (2.9.25)$$

где матричная функция  $G(\mu)$  задана формулами (2.8.7), (2.8.11). Хотя уравнение (2.9.25) по форме записи отличается от уравнений Гельфанда–Левитана–Марченко, например от уравнения (2.6.4) «для правого конца», оно им полностью эквивалентно при условии, что функции  $a(\lambda)$  и  $a^*(\lambda)$  не имеют нулей в областях своей аналитичности. В справедливости утверждения можно убедиться простой проверкой с помощью формул (2.3.6), (2.8.4), (2.8.5), (2.8.9).

### 2.9.2. Задача Римана с нулями

В рамках излагаемого формализма решениями солитонного типа будем называть решения системы (2.9.1), (2.9.2), построенные при помощи задачи Римана (2.9.10) с функцией

$$G_0(\lambda) = I.$$

Когда  $G_0(\lambda) = I$ , задача Римана приобретает вид

$$G_+(\lambda) G_-(\lambda) = I, \quad \lambda \in \Gamma. \quad (2.9.26)$$

Вследствие редукции (2.9.16), при вещественных значениях  $\lambda$  имеем:

$$G_-(\lambda) = G_+^{-1}(\lambda) = G_+^\dagger(\lambda).$$

Нетривиальное решение задачи Римана (2.9.26) возможно лишь при условии, что матрицы  $G_+(\lambda)$  и  $G_-(\lambda)$  вырождены в областях своей аналитичности соответственно в точках  $\lambda_i$  и  $\mu_j$ :

$$\det G_+(\lambda_i) = 0, \quad \det G_-(\mu_j) = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

В противном случае матричные функции  $G_{\pm}(\lambda)$  аналитически продолжаютсся с контура  $\Gamma$  на всю комплексную плоскость и, следовательно, по теореме Лиувилля являются постоянными ( $G_+(\lambda) = G_-(\lambda) = I$  из условия нормировки). В дальнейшем для определенности нули функций  $\det G_+(\lambda)$  и  $\det G_-(\lambda)$  будем считать простыми.

Изложим процедуру вычисления матриц  $G_{\pm}(\lambda)$ , удовлетворяющих условию (2.9.26) и ограничениям

$$G_-^{\dagger}(\lambda^*) = G_+(\lambda), \quad \text{Im} \lambda > 0; \quad G_-(\lambda = \infty) = I. \quad (2.9.27)$$

Заметим, что поскольку

$$G_-(\lambda) = G_+^{-1}(\lambda), \quad G_+(\lambda) = G_-^{-1}(\lambda),$$

нули функции  $G_+(\lambda)$  совпадают с полюсами  $G_-(\lambda)$ , а нули  $G_-(\lambda)$  с полюсами  $G_+(\lambda)$ . Поэтому разложения матричных функций  $G_-(\lambda)$  и  $G_+(\lambda)$  на простейшие дроби имеют вид

$$G_+(\lambda) = I + \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{\lambda - \mu_k}, \quad G_-(\lambda) = I + \sum_{k=1}^n \frac{B_k}{\lambda - \lambda_k}. \quad (2.9.28)$$

Первый член в правых частях формул (2.9.28) равен единичной матрице, так как согласно (2.9.27)

$$G_+(\lambda = \infty) = G_-(\lambda = \infty) = I.$$

Условие  $G_-^{\dagger}(\lambda^*) = G_+(\lambda)$  предполагает, что полюсы  $\lambda_i$  и  $\mu_i$  матриц  $G_+(\lambda)$  и  $G_-(\lambda)$  комплексно сопряжены друг другу:

$$\lambda_i = \mu_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.9.29)$$

а вычеты в соответствующих полюсах эрмитово сопряжены:

$$B_i = A_i^{\dagger}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.9.30)$$

Равенство (2.9.26) означает, что матрицы  $G_+(\lambda)$  и  $G_-(\lambda)$  являются взаимно обратными, и потому вместо (2.9.26) можно написать:

$$G_-(\lambda) G_+(\lambda) = I. \quad (2.9.31)$$

Соотношение (2.9.31) более удобно для дальнейшего анализа.

Требование обращения в нуль вычетов в произведении  $G_-(\lambda)G_+(\lambda)$  приводит к системе  $n$  независимых матричных уравнений:

$$A_k^\dagger G_+(\lambda_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.9.32)$$

Нетривиальное решение уравнений (2.9.32) возможно лишь при условии

$$\det A_k = 0.$$

Известно, что любую двумерную вырожденную матрицу  $A_k$  можно записать в виде

$$(A_k)_{\alpha\beta} = (m^k)_\alpha (X^k)_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2), \quad (2.9.33)$$

где  $\mathbf{X}^k, \mathbf{m}^k$  — двумерные комплексные векторы. После подстановки (2.9.33) в (2.9.32) получаем линейную систему алгебраических уравнений для определения векторов  $\mathbf{X}^k$ :

$$(m^k)_\alpha + \sum_{s=1}^n \frac{1}{\lambda_k - \lambda_s^*} (\mathbf{m}^{k*} \cdot \mathbf{m}^s) (X^s)_\alpha = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (2.9.34)$$

где  $(\mathbf{m}^{k*} \cdot \mathbf{m}^s) = \sum_{\alpha=1,2} (m^k)_\alpha^* (m^s)_\alpha$  — скалярное произведение двумерных векторов  $\mathbf{m}^{k*}$  и  $\mathbf{m}^s$ . Решение системы (2.9.34) запишем в виде

$$(X^s)_\alpha = - \sum_{p=1}^n \frac{\partial \ln \det A}{\partial A_{ps}} (m^p)_\alpha^*.$$

Здесь мы ввели матрицу  $A$  с элементами

$$A_{ij} = \frac{(\mathbf{m}^{i*} \cdot \mathbf{m}^j)}{\lambda_i - \lambda_j^*}$$

и воспользовались тождеством

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{\partial \ln \det A}{\partial A_{ji}}.$$

Таким образом, общее решение задачи Римана (2.9.26), (2.9.27) есть

$$[G_+(\lambda)]_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \sum_{i,j}^n \frac{1}{\lambda - \lambda_i^*} (m^i)_\alpha (m^j)_\beta^* \frac{\partial \ln \det A}{\partial A_{ji}}. \quad (2.9.35)$$

При интегрировании системы (2.9.1), (2.9.2) с помощью функции (2.9.35) в правых частях равенств (2.9.13), определяющих новые решения  $U(\lambda)$  и  $V(\lambda)$ , появятся лишние полюсы в точках  $\lambda = \lambda_i$

и  $\lambda = \lambda_i^*$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), связанные с нулями задачи Римана. Необходимо потребовать, чтобы вычеты в этих полюсах были равны нулю. Только тогда зависимость от параметра  $\lambda$  новых матричных функций  $U(\lambda)$  и  $V(\lambda)$  (2.9.13) будет иметь вид (2.9.6). С учетом редукций (2.9.27), (2.9.29), (2.9.30), сформулированное требование приводит к следующей системе независимых уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_x A_k - U_0(\lambda_k^*) A_k &= -A_k U(\lambda_k^*), \\ \partial_t A_k - V_0(\lambda_k^*) A_k &= -A_k V(\lambda_k^*), \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.9.36)$$

В такой записи — это условие равенства вычетов в полюсах  $\lambda = \lambda_k^*$  формул, определяющих  $G_+(\lambda) U(\lambda)$  и  $G_+(\lambda) V(\lambda)$  (см. (2.9.13)). Отметим, что при дифференцировании матричной функции  $A_k$  с элементами

$$(A_k)_{\alpha\beta} = (m^k)_\alpha (X^k)_\beta$$

по координатам  $x, t$  появляются два слагаемых. Например:

$$\partial_x (A_k)_{\alpha\beta} = [\partial_x (m^k)_\alpha] (X^k)_\beta + (m^k)_\alpha \partial_x (X^k)_\beta.$$

Умножим уравнения (2.9.36) слева на невырожденную матрицу  $G_-(\lambda_k^*)$ . В силу выбора векторов  $\mathbf{m}^k$ , справедливы равенства (по индексу  $k$  нет суммирования)

$$G_-(\lambda_k^*) \mathbf{m}^k = 0$$

(см. (2.9.27), (2.9.32)). Поэтому ряд слагаемых в (2.9.36) обращается в нуль. Оставшиеся слагаемые содержат множители

$$G_-(\lambda_k^*) (\partial_x \mathbf{m}^k - U_0(\lambda_k^*) \mathbf{m}^k), \quad G_-(\lambda_k^*) (\partial_t \mathbf{m}^k - V_0(\lambda_k^*) \mathbf{m}^k)$$

и равны нулю лишь тогда, когда векторы  $\mathbf{m}^k$  удовлетворяют уравнениям

$$\partial_t \mathbf{m}^k = V_0(x, t, \lambda_k^*) \mathbf{m}^k, \quad \partial_x \mathbf{m}^k = U_0(x, t, \lambda_k^*) \mathbf{m}^k,$$

решение которых имеет вид:

$$\mathbf{m}^k = \chi_0(x, t, \lambda_k^*) \mathbf{c}^k. \quad (2.9.37)$$

Здесь  $\mathbf{c}^k$  — произвольные постоянные двумерные комплексные векторы. С учетом этой зависимости из (2.9.36) сразу следуют совместные уравнения для векторов  $\mathbf{X}^k$ :

$$\partial_t \mathbf{X}^k = -\mathbf{X}^k V(x, t, \lambda_k^*), \quad \partial_x \mathbf{X}^k = -\mathbf{X}^k U(x, t, \lambda_k^*). \quad (2.9.38)$$

На этом завершается процедура построения многосолитонных решений уравнений (2.9.1), (2.9.2). По выбранному частному решению системы (2.9.1), (2.9.2)  $U_0, V_0, \chi_0$  формулы (2.9.13), (2.9.14), (2.9.35), (2.9.37) генерируют серию новых решений.

Интересно, что формулы (2.9.28), (2.9.33), (2.9.37), (2.9.38) оказываются эффективными и в процедуре «размножения» интегрируемых нелинейных моделей, позволяющей по заданному интегрируемому уравнению получать новые интегрируемые уравнения [108–111].

С математической точки зрения, матрицы  $A_k$  с элементами  $(m^k)_\alpha (X^k)_\beta$  связаны с операторами проектирования. Для выявления этой связи удобно использовать язык линейной алгебры в пространстве двумерных комплексных векторов  $C^2$ . Пусть в пространстве  $C^2$  задан некоторый линейный оператор  $U$ . Напомним, что ядро  $\text{Ker } U$  оператора  $U$  — это совокупность тех векторов из  $C^2$ , которые оператор  $U$  переводит в нуль. Обозначим через  $\text{Im } U$  образ оператора  $U$ , т. е. результат применения оператора  $U$  ко всему пространству  $C^2$ . Очевидно,  $\text{Ker } U$  и  $\text{Im } U$  — линейные пространства, а их прямая сумма составляет все пространство  $C^2$ :

$$\text{Ker } U \oplus \text{Im } U = C^2.$$

Вернемся к оператору  $A_k$ . Условие отсутствия вычета в точке  $\lambda = \lambda_k^*$  в произведении  $G_+(\lambda)G_-(\lambda)$  дает равенство

$$A_k G_-(\lambda_k^*) = 0,$$

т. е.  $\text{Ker } A_k = \text{Im } G_-(\lambda_k^*)$ , или, учитывая формулу (2.9.14),  $\text{Ker } A_k = \text{Im } \chi_-(\lambda_k^*)$ .

В то же время, из структуры матрицы  $A_k$  (2.9.33) видно, что результат применения оператора  $A_k$  ко всему пространству  $C^2$  дает пространство, натянутое на векторы  $\mathbf{m}^k$  вида (2.9.37), т. е.  $\text{Im } A_k = \text{Im } \chi_0(\lambda_k^*)$ .

Изложенное построение показывает, что матрица  $A_k$  полностью определяется своими ядром и образом (это специфика проекционных матриц). Любопытно, что  $\text{Im } A_k$  связан с «затравочным» решением  $\chi_0(x, t, \lambda)$  вспомогательной линейной системы (2.9.2), а  $\text{Ker } A_k$  — с ее новым решением  $\chi_-(x, t, \lambda)$ , построенным «одеванием»  $\chi_0(x, t, \lambda)$  с помощью задачи Римана.

Матричную функцию (2.9.35) иногда полезно представить в форме произведения матриц. В такой записи зависимость от операторов проектирования выделена более явно [7]:

$$G_+(\lambda) = \prod_{k=1}^n \left( I - \frac{\lambda_k - \lambda_k^*}{\lambda - \lambda_k^*} P_k \right). \quad (2.9.39)$$

Здесь  $P_k$  — матрица проекционного оператора:

$$\det P_k = 0, \quad \text{Sp } P_k = 1, \quad P_k^2 = P_k, \quad P_k^\dagger = P_k. \quad (2.9.40)$$

Прямой проверкой можно убедиться, что матричная функция (2.9.39) удовлетворяет условиям (2.9.26), (2.9.27). Представления функции  $G_+(\lambda)$  (2.9.35) и (2.9.39) эквивалентны, поскольку решение задачи Римана с заданными нулями, редукциями и нормировкой единственно.

Используя выражения (2.9.39), (2.9.40), нетрудно показать, что

$$\det G_+(\lambda) = \prod_{k=1}^n \frac{\lambda - \lambda_k}{\lambda - \lambda_k^*}.$$

Факторизацию матрицы  $G_+(\lambda)$  в произведение (2.9.39) удобно использовать при рекуррентном построении многосолитонных решений. При этом  $n$ -солитонное решение вычисляется по тем же формулам, что и односолитонное, но в качестве «затравочного» решения выступает  $(n-1)$ -солитонное решение ( $n > 1$ ). Далее на конкретных примерах мы покажем, что с помощью рекуррентной процедуры удастся сравнительно легко анализировать асимптотику мультисолитонных решений при  $t \rightarrow +\infty$ .

### 2.9.3. Схема «одевания» в общем случае

Обсудим теперь, как находятся решения системы (2.9.1), (2.9.2) в наиболее общем случае, когда в формулировке задачи Римана:

$$G_+(x, t, \lambda) G_-(x, t, \lambda) = G(x, t, \lambda); \quad (2.9.41)$$

$$G(x, t, \lambda) = \chi_0(x, t, \lambda) G_0(\lambda) \chi_0^{-1}(x, t, \lambda), \quad \lambda \in \Gamma$$

матрица  $G_0(\lambda) \neq I$ , а матричные функции  $G_+(\lambda)$  и  $G_-(\lambda)$  имеют нули в точках  $\lambda_i$  и  $\lambda_i^*$  комплексной  $\lambda$ -плоскости:

$$\det G_+(\lambda = \lambda_i) = 0, \quad \det G_-(\lambda = \lambda_i^*) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.9.42)$$

Для решения этой задачи одним из указанных способов построим решение  $G_{\pm}^0(\lambda)$  задачи Римана (2.9.26), (2.9.27) с нулями (2.9.42). Представим искомые матрицы  $G_{\pm}(\lambda)$  в виде

$$G_+(\lambda) = G_+^0(\lambda) \tilde{G}_+(\lambda), \quad G_-(\lambda) = \tilde{G}_-(\lambda) G_-^0(\lambda). \quad (2.9.43)$$

Очевидно, что  $\tilde{G}_{\pm}(\lambda)$  являются аналитическими и неособенными матрицами соответственно в верхней и нижней полуплоскостях комплексной переменной  $\lambda$ .

Таким образом, задача определения функций  $\tilde{G}_{\pm}(\lambda)$  свелась к уже рассмотренной регулярной задаче Римана:

$$\tilde{G}_+(\lambda) \tilde{G}_-(\lambda) = \tilde{G}(\lambda), \quad \lambda \in \Gamma \quad (2.9.44)$$

с редукциями

$$\tilde{G}_-^{\dagger}(\lambda) = \tilde{G}_+(\lambda), \quad \tilde{G}(\lambda = \infty) = I, \quad \lambda \in \Gamma.$$

В формулировке регулярной задачи Римана (2.9.44) используется матричная функция  $\tilde{G}(\lambda) \neq G(\lambda)$ :

$$\tilde{G}(\lambda) = [G_+^0(\lambda)]^{-1} G(\lambda) G_+^0(\lambda), \quad [G_+^0(\lambda)]^{-1} = G_+^0(\lambda)^{\dagger}, \quad \text{Im} \lambda = 0.$$



Решения уравнений движения (2.9.1), построенные с помощью общей задачи Римана (2.9.41), описывают совокупность солитонов, сохраняющих свою форму с течением времени, и нелинейные волны, которые расплываются со временем, уменьшаясь по амплитуде.

При сведении общей задачи Римана (2.9.41) к регулярному случаю можно, конечно, поменять порядок сомножителей в формуле (2.9.43):

$$G_+(\lambda) = \tilde{G}_+(\lambda) G_+^0(\lambda), \quad G_-(\lambda) = G_-^0(\lambda) \tilde{G}_-(\lambda),$$

тогда факторизуемая матрица  $G(\lambda)$  не меняется. Соотношение (2.9.10) сводится к регулярной задаче Римана, которая отличается от (2.9.44):

$$\tilde{G}_+(\lambda) \tilde{G}_-(\lambda) = G(\lambda), \quad \lambda \in \Gamma.$$

В то же время, при таком подходе зависимость от переменных  $x, t$  матриц  $G_\pm^0(x, t, \lambda)$  задачи Римана с нулями будет определяться не только видом «затравочной» функции  $\chi_0(x, t, \lambda)$ , но и решением  $\tilde{G}_+(x, t, \lambda)$  регулярной задачи Римана. Векторы  $\mathbf{m}^k$  задачи Римана с нулями будут иметь вид

$$\mathbf{m}^k = \tilde{G}_-(x, t, \lambda_k^*) \chi_0(x, t, \lambda_k^*) \mathbf{c}^k,$$

где  $\mathbf{c}^k$  — произвольные постоянные двумерные комплексные векторы.

Можно и непосредственно свести общую задачу Римана (2.9.41) к решению системы алгебраических и интегральных уравнений. Для этого представим функции  $G_+^{-1}(\lambda)$  и  $G_-(\lambda)$  в виде [7]

$$\begin{aligned} G_+^{-1}(\lambda) &= I + \sum_{k=1}^n \frac{A_k^\dagger}{\lambda - \lambda_k} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu \quad (\text{Im} \lambda > 0), \\ G_-(\lambda) &= I + \sum_{k=1}^n \frac{A_k^\dagger}{\lambda - \lambda_k} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu \quad (\text{Im} \lambda < 0). \end{aligned} \quad (2.9.45)$$

Здесь, как и ранее, элементы вырожденной матрицы  $A_k$  записываются в форме

$$(A_k)_{\alpha\beta} = (m^k)_\alpha (X^k)_\beta.$$

На вещественной  $\lambda$ -оси, в силу редукции (2.9.16), имеем

$$G_-(\lambda) = G_+^\dagger(\lambda) = I + \sum_{k=1}^n \frac{A_k^\dagger}{\lambda - \lambda_k} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\mu)}{\mu - \lambda + i0} d\mu. \quad (2.9.46)$$

Это соотношение продолжается с вещественной оси в верхнюю полуплоскость и дает следующее представление для функции  $G_+(\lambda)$ :

$$G_+(\lambda) = I + \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{\lambda - \lambda_k^*} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi^\dagger(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu \quad (\text{Im} \lambda > 0). \quad (2.9.47)$$

Требование отсутствия полюсов в произведении  $G_+^{-1}(\lambda) G_+(\lambda)$ , как следует из формул (2.9.45), (2.9.47), дает следующую систему независимых алгебраических уравнений на компоненты  $(X^k)_\beta$ :

$$\sum_{\alpha=1,2} (m^k)_\alpha^* \left( \delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_{\beta\alpha}^*(\mu)}{\mu - \lambda_k} d\mu \right) + \sum_{q=1}^n \frac{(\mathbf{m}^{k*} \cdot \mathbf{m}^q)}{\lambda_k - \lambda_q^*} (X^q)_\beta = 0, \quad (2.9.48)$$

где

$$(\mathbf{m}^{k*} \cdot \mathbf{m}^q) = \sum_{\alpha=1,2} (m^k)_\alpha^* (m^q)_\alpha.$$

Далее, подставляя (2.9.45) в соотношение (2.9.17) и повторяя уже приведенные рассуждения, находим:

$$\varphi(\lambda) = G_+^{-1}(\lambda) [I - G(\lambda)] = \frac{1}{a(\lambda)} \sigma_2 G_-^*(\lambda) \sigma_2 [I - G(\lambda)]. \quad (2.9.49)$$

После этого, из (2.9.46) получаем интегральное уравнение для матричной функции  $G_-(\lambda)$  при вещественных значениях  $\lambda$ :

$$[G_-(\lambda)]_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \sum_{k=1}^n \frac{(X^k)_\alpha (m^k)_\beta^*}{\lambda - \lambda_k} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_{\alpha\beta}(\mu)}{\mu - \lambda + i0} d\mu. \quad (2.9.50)$$

Равенства (2.9.46)–(2.9.50) образуют замкнутую систему уравнений, решающих задачу Римана в общем виде.

Требование отсутствия лишних полюсов в «одевающих» соотношениях (2.9.13), как и ранее, приводит к зависимости (2.9.37) векторов  $\mathbf{m}^k$  от координат и времени.

Обратим внимание, что изложенная процедура интегрирования нелинейных уравнений не использует никаких специальных свойств матричной функции  $G(x, t, \lambda)$ , кроме условия однозначной разрешимости задачи Римана (2.9.41), редукций и явной зависимости «затравочного» решения  $\chi_0$  от переменных  $x, t, \lambda$ .

Важно, что связь задачи Римана с коммутационным представлением (2.9.1) является не только весьма общей, но и локальной (в подходе Гельфанда–Левитана–Марченко эта локальность теряется). Последнее обстоятельство открывает возможность построения в рамках изложенного формализма широкого класса новых, в том числе пространственно нелокализованных решений, которые чрезвычайно сложно теоретически описать в рамках метода Гельфанда–Левитана–Марченко. Преимущества процедуры «одевания» частных решений интегрируемых моделей будут проиллюстрированы далее на конкретных примерах.

Задача Римана оказывается также эффективной при вычислении асимптотик точных решений интегрируемых моделей при  $t \rightarrow +\infty$  [9, 112–116].

В то же время отметим, что, даже при наличии  $U$ – $V$ -пары с рациональной зависимостью от спектрального параметра  $\lambda$ , аналитические свойства «затравочных» функций  $\chi_0(\lambda)$  вспомогательной линейной системы (2.9.2) могут формулироваться на многолистных римановых поверхностях. В таких ситуациях отбор новых («одетых») решений исходной нелинейной модели (2.9.1) с необходимыми по физическому смыслу задачи свойствами не всегда очевиден. Тем более что в этом случае данные непрерывного и дискретного спектров вспомогательной линейной системы (2.9.2) оказываются взаимосвязанными. Наличие краев у непрерывного спектра дополнительно усложняет аналитические свойства коэффициентов матрицы перехода [9]. Поэтому полное исследование задачи Римана будет весьма громоздким и малоэффективным. Кроме того, могут оказаться нетривиальными условия нормировки задачи Римана. Для преодоления подобных трудностей иногда проще вернуться к универсальному формализму Гельфанда–Левитана–Марченко.

Двулистная риманова поверхность функции  $\chi_0(\lambda)$  появляется в главах 3 и 9 при анализе квазиодномерных солитонов на фоне периодических волн и доменных структур, а также при теоретическом описании двумерных магнитных дислокаций в несоизмеримых магнитных и кристаллических структурах [117, 118]. Оказывается, магнитные дислокации (вихри) с минимальным топологическим зарядом не являются солитоноподобными объектами.

## 2.10. Анализ солитонных состояний изотропного ферромагнетика методом «одевания»

*В моих нынешних представлениях я пришел к мысли, что для учета дуализма «волна–частица» необходимо развивать волновую механику, основанную на нелинейных уравнениях, по отношению к которым линейные уравнения были всего лишь приближенными формами, имеющими силу в определенных условиях.*

*Луи де Бройль*

В данном разделе проиллюстрирована эффективность техники «одевания» на примере построения солитонных решений модели Ландау–Лифшица (2.2.2) изотропного ферромагнетика, которые ранее были найдены в рамках формализма Гельфанда–Левитана–Марченко. Метод «одевания» позволит легко показать, что в ситуации общего положения

$n$ -солитонное решение при  $t \rightarrow \pm\infty$  распадается в сумму  $n$  пространственно разделенных одиночных солитонов.

Напомним, что техника «одевания», изложенная в предыдущем разделе, была развита для нелинейных дифференциальных уравнений, которые можно представить в форме условия совместности

$$\partial_t U(\lambda) - \partial_x V(\lambda) + [U(\lambda), V(\lambda)] = 0 \quad (2.10.1)$$

вспомогательной линейной системы

$$\partial_x \chi = U(\lambda) \chi, \quad \partial_t \chi = V(\lambda) \chi,$$

где матрицы  $U(\lambda)$  и  $V(\lambda)$  являются рациональными функциями параметра  $\lambda$ .

В то же время, при изложении метода Гельфанда–Левитана–Марченко, хотя уравнения (2.2.2) нелинейной динамики изотропного ферромагнетика и были представлены в форме (2.10.1), вспомогательная линейная система была записана в другом виде:

$$\partial_x \varphi = U(\lambda) \varphi, \quad \partial_t \varphi = V(\lambda) \varphi + \frac{\lambda^2}{2i} \varphi \sigma_3. \quad (2.10.2)$$

Причина выбора вспомогательных уравнений в форме (2.10.2) состояла в том, что в формализме Гельфанда–Левитана–Марченко используются функции Йоста  $\varphi_{\pm}(x, t, \lambda)$ , асимптотики которых при  $x \rightarrow \pm\infty$  должны оставаться неизменными во времени.

Нетрудно проверить, что матричные функции  $\chi(x, t, \lambda)$  и  $\varphi(x, t, \lambda)$  связаны простым соотношением:

$$\chi(x, t, \lambda) = \varphi(x, t, \lambda) \exp\left(\frac{i\lambda^2}{2} \sigma_3 t\right).$$

Поэтому тривиальному «затравочному» решению уравнений Ландау–Лифшица

$$\mathbf{S}^{(0)} = (0, 0, 1) \quad (2.10.3)$$

в методе «одевания» соответствует матричная функция (см. (2.2.10))

$$\chi^{(0)}(x, t, \lambda) = \exp\left(\frac{\lambda}{2i} x \sigma_3 - \frac{\lambda^2}{2i} t \sigma_3\right).$$

Напомним также, что в формализме Гельфанда–Левитана–Марченко коэффициент  $b(\lambda)$  матрицы перехода зависел от времени (2.3.33):

$$b(x, t) = b(x, t = 0) \exp(-i\lambda^2 t).$$

Поэтому задачу Римана (2.8.10) для изотропного ферромагнетика можно переписать в форме, которая совпадает с (2.9.10):

$$G_+(x, t, \lambda) G_-(x, t, \lambda) = G(x, t, \lambda),$$

где

$$G(x, t, \lambda) = \chi_0(x, t, \lambda) G_0(\lambda) \chi_0^{-1}(x, t, \lambda),$$

$$G_0(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & -b^*(\lambda, 0) \\ -b(\lambda, 0) & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, два метода интегрирования уравнений изотропного ферромагнетика (метод Гельфанда–Левитана–Марченко и метод «одевания») самосогласованны на уровне определяющих соотношений.

В изложенной в разд. 2.9 общей схеме интегрирования нелинейных уравнений использована редукция на решения задачи Римана, которая при вещественных значениях параметра  $\lambda$  имела вид

$$G_+(\lambda) = G_-^\dagger(\lambda), \quad G_0^\dagger(\lambda) = G_0(\lambda). \quad (2.10.4)$$

Такая же редукция справедлива для изотропного ферромагнетика (см. (2.8.14)).

Отличие состоит в выборе точки нормировки задачи Римана. Задачу Римана изотропного ферромагнетика следует нормировать на единичную матрицу не в точке  $\lambda = \infty$ , а в точке  $\lambda = 0$  (см. (2.8.13)):

$$G_\pm(x, t, \lambda = 0) = I, \quad G_0(\lambda = 0) = I. \quad (2.10.5)$$

Это обстоятельство немного изменит способ построения матриц  $G_\pm(x, t, \lambda)$ . В остальном схема интегрирования уравнений изотропного ферромагнетика не отличается от рассмотренной в разд. 2.9.

В качестве примера построим методом «одевания» уже известное нам односолитонное решение (2.7.4) уравнений Ландау–Лифшица. Для односолитонного состояния матричные функции  $G_+(\lambda)$  и  $G_-(\lambda)$  задачи Римана имеют по одной точке вырождения в областях своей аналитичности:  $\lambda = \lambda_1$  и  $\lambda = \lambda_1^*$  соответственно ( $\text{Im} \lambda_1 > 0$ ). Принимая во внимание редукцию (2.10.4) и нормировку (2.10.5), односолитонные матрицы  $G_\pm^{(1)}$  будем искать в виде

$$G_+^{(1)}(\lambda) = I + \frac{\lambda}{\lambda - \lambda_1^*} A, \quad G_-^{(1)}(\lambda) = I + \frac{\lambda}{\lambda - \lambda_1} A^\dagger.$$

Повторяя рассуждения разд. 2.9, приходим к выводу, что элементы матрицы  $A$  могут быть записаны в форме

$$A_{\alpha\beta} = m_\alpha X_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2),$$

где компоненты двумерного вектора  $\mathbf{X}$  определяются алгебраическими уравнениями

$$m_\beta^* + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_1^*} |\mathbf{m}|^2 X_\beta = 0.$$

Отсюда находим

$$X_\beta = -\frac{(\lambda_1 - \lambda_1^*)}{\lambda_1} \frac{m_\beta^*}{|\mathbf{m}|^2}$$

и, следовательно,

$$[G_+^{(1)}(\lambda)]_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \frac{(\lambda_1 - \lambda_1^*)}{\lambda_1} \frac{\lambda}{(\lambda - \lambda_1^*)} \frac{m_\alpha m_\beta^*}{|\mathbf{m}|^2}. \quad (2.10.6)$$

Матрица  $P$  с элементами

$$P_{\alpha\beta} = \frac{m_\alpha m_\beta^*}{|\mathbf{m}|^2}$$

является эрмитовой и проекционной:

$$P^\dagger = P, \quad P^2 = P, \quad \text{Sp } P = 1, \quad \det P = 0.$$

После отображения  $\lambda \rightarrow \lambda^{-1}$ , которое переводит точку  $\lambda = 0$  в точку  $\lambda = \infty$ , формула (2.10.6) совпадает с приведенной ранее более общей формулой (2.9.39) ( $n = 1$ ):

$$G_+^{(1)}(\lambda) = I - \frac{\lambda_1^{-1} - \lambda_1^{*-1}}{\lambda^{-1} - \lambda_1^{*-1}} P.$$

Согласно результатам раздела 2.9, зависимость вектора  $\mathbf{m}$  от переменных  $x, t$  имеет вид

$$\mathbf{m} = \chi^{(0)}(x, t, \lambda_1^*) \mathbf{c}, \quad (2.10.7)$$

где  $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$  — произвольный постоянный комплексный вектор.

«Затравочному» решению (2.10.3) соответствуют матрицы (см. (2.2.10))

$$U^{(0)} = \frac{\lambda}{2i} \sigma_3, \quad V^{(0)} = -\frac{1}{2i} \lambda^2 \sigma_3.$$

Матричные функции  $U^{(1)}(\lambda)$  и  $V^{(1)}(\lambda)$ , задающие новое решение  $\mathbf{S}^{(1)}(x, t)$  уравнения Ландау–Лифшица (2.2.2), вычисляются по формулам (2.9.13). В частности, с учетом редукции (2.10.4) имеем

$$\begin{aligned} U^{(1)}(x, t, \lambda) &= \frac{\lambda}{2i} S_k^{(1)} \sigma_k = \\ &= -[G_+^{(1)}]^\dagger(x, t, \lambda) \left[ \partial_x G_+^{(1)}(x, t, \lambda) - \frac{\lambda}{2i} \sigma_3 G_+^{(1)}(x, t, \lambda) \right]. \end{aligned}$$

Отсюда находим общую формулу, генерирующую новое решение уравнений Ландау–Лифшица (2.2.2) по выбранному «затравочному»:

$$S_k^{(1)} \sigma_k = [G_+^{(1)}]^\dagger(x, t, \lambda = \infty) \sigma_3 G_+^{(1)}(x, t, \lambda = \infty). \quad (2.10.8)$$

Нетрудно проверить, что решение  $\mathbf{S}^{(1)}(x, t)$ , построенное по формуле (2.10.8) с использованием матричной функции  $G_+^{(1)}(x, t, \lambda)$  (2.10.6),

(2.10.7), совпадает с односолитонным решением уравнений Ландау–Лифшица, которое ранее было получено более утомительной процедурой Гельфанда–Левитана–Марченко:

$$S_3^{(1)}(x, t) = 1 - \frac{2u_1^2}{(u_1^2 + v_1^2) \operatorname{ch}^2[u_1(x - v_1 t - x_{01})/2]},$$

$$S_1^{(1)}(x, t) + i S_2^{(1)}(x, t) = \frac{2u_1 \exp(i[\varphi_{01} + v_1 x/2 + (u_1^2 - v_1^2)t/4])}{(u_1^2 + v_1^2) \operatorname{ch}^2[u_1(x - v_1 t - x_{01})/2]} \times$$

$$\times \left( -u_1 \operatorname{sh} \left[ \frac{u_1}{2}(x - v_1 t - x_{01}) \right] + i v_1 \operatorname{ch} \left[ \frac{u_1}{2}(x - v_1 t - x_{01}) \right] \right). \quad (2.10.9)$$

Здесь использованы обозначения

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(v_1 + i u_1) \quad (u_1 > 0), \quad x_{01} = \frac{2}{u_1} \ln \left| \frac{c_1}{c_2} \right|, \quad \varphi_{01} = \arg \frac{c_1^*}{c_2}.$$

Солитон (2.10.9) характеризуется четырьмя вещественными параметрами: скоростью  $v_1$ , координатой  $x_{01}$  его «центра тяжести» при  $t = 0$ , начальной фазой  $\varphi_{01}$ , значением проекции  $S_3^{(1)}(x, t)$  в центре тяжести солитона:

$$A_1 = \frac{v_1^2 - u_1^2}{v_1^2 + u_1^2}. \quad (2.10.10)$$

Процедура «одевания» дает алгоритм «размножения» точных решений уравнения изотропного ферромагнетика. В частности, метод позволяет рекуррентно строить мультисолитонные решения. Используя это обстоятельство, покажем, что  $n$ -солитонные решения описывают упругие парные столкновения в системе  $n$  самолокализованных волн намагниченности типа (2.10.9).

Для простоты ограничимся анализом двухсолитонного решения уравнений изотропного ферромагнетика. Двухсолитонное решение в схеме «одевания» можно построить, выбрав в качестве новых «затравочных» функций матричные функции односолитонного возбуждения:

$$U^{(1)}(\lambda) = - \left[ G_+^{(1)}(\lambda) \right]^{-1} \left( \partial_x G_+^{(1)}(\lambda) - U^{(0)} G_+^{(1)}(\lambda) \right) =$$

$$= \left( \partial_x G_-^{(1)}(\lambda) + G_-^{(1)} U^{(0)}(\lambda) \right) \left[ G_-^{(1)}(\lambda) \right]^{-1},$$

$$V^{(1)}(\lambda) = - \left[ G_+^{(1)}(\lambda) \right]^{-1} \left( \partial_t G_+^{(1)}(\lambda) - V^{(0)} G_+^{(1)}(\lambda) \right) =$$

$$= \left( \partial_t G_-^{(1)}(\lambda) + G_-^{(1)} V^{(0)}(\lambda) \right) \left[ G_-^{(1)}(\lambda) \right]^{-1}; \quad (2.10.11)$$

$$\chi_+^{(1)}(x, t, \lambda) = \left[ G_+^{(1)}(x, t, \lambda) \right]^{-1} \chi^{(0)}(x, t, \lambda),$$

$$\chi_-^{(1)}(x, t, \lambda) = G_-^{(1)}(x, t, \lambda) \chi^{(0)}(x, t, \lambda).$$

С другой стороны, в силу факторизации (2.9.39), двухсолитонное возбуждение определяется формулами, получающимися из соотношений (2.10.11) после формальной замены:

$$G_{\pm}^{(1)}(\lambda) \rightarrow \tilde{G}_{\pm}^{(2)}(\lambda); \quad \{\chi_{\pm}^{(0)}, U^{(0)}, V^{(0)}\} \rightarrow \{\chi_{\pm}^{(1)}, U^{(1)}, V^{(1)}\}.$$

При этом матрицы  $\tilde{G}_{+}^{(2)}(\lambda)$  и  $\tilde{G}_{-}^{(2)}(\lambda)$ , как и ранее, имеют вид (2.10.6), только их нули расположены в других точках:  $\lambda = \lambda_2$  и  $\lambda = \lambda_2^*$  соответственно ( $\text{Im}\lambda_2 > 0$ ). Кроме того, при вычислении  $\tilde{G}_{+}^{(2)}(\lambda)$  вместо прежних векторов  $\mathbf{m}$  следует использовать векторы  $\tilde{\mathbf{m}}$ , построенные с помощью матричных функций односолитонного состояния:

$$\tilde{\mathbf{m}} = \chi_{-}^{(1)}(x, t, \lambda_2^*) \tilde{\mathbf{c}} = \left( I + \frac{(\lambda_1 - \lambda_1^*) \lambda_2^*}{\lambda_1^* (\lambda_2^* - \lambda_1)} P \right) \chi^{(0)}(x, t, \lambda_2^*) \tilde{\mathbf{c}}, \quad (2.10.12)$$

где  $\tilde{\mathbf{c}} = (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2)$  — произвольный постоянный комплексный вектор. В частности, матрица  $\tilde{G}_{+}^{(2)}(\lambda)$  имеет вид

$$\tilde{G}_{+}^{(2)}(\lambda) = I - \frac{(\lambda_2 - \lambda_2^*) \lambda}{\lambda_2 (\lambda - \lambda_2^*)} \tilde{P}. \quad (2.10.13)$$

В формулах (2.10.12), (2.10.13)  $P$  и  $\tilde{P}$  — проекционные матрицы с элементами

$$P_{\alpha\beta} = \frac{m_{\alpha} m_{\beta}^*}{|\mathbf{m}|^2}, \quad \tilde{P}_{\alpha\beta} = \frac{\tilde{m}_{\alpha} \tilde{m}_{\beta}^*}{|\tilde{\mathbf{m}}|^2}.$$

Распределение намагниченности, соответствующее двухсолитонному состоянию, рассчитывается по формуле

$$\begin{aligned} S_k^{(2)}(x, t) \sigma_k &= \left[ \tilde{G}_{+}^{(2)}(x, t, \lambda = \infty) \right]^{\dagger} S_k^{(1)}(x, t) \sigma_k \tilde{G}_{+}^{(2)}(x, t, \lambda = \infty) = \\ &= \left[ \tilde{G}_{+}^{(2)}(x, t, \lambda = \infty) \right]^{\dagger} \left[ G_{+}^{(1)}(x, t, \lambda = \infty) \right]^{\dagger} \sigma_3 \times \\ &\quad \times G_{+}^{(1)}(x, t, \lambda = \infty) \tilde{G}_{+}^{(2)}(x, t, \lambda = \infty). \end{aligned} \quad (2.10.14)$$

Мы не будем приводить явный вид решения  $\mathbf{S}^{(2)}(x, t)$ . Покажем лишь, что на траекториях второго солитона, когда

$$x - v_2 t = \text{const} \quad (\lambda_2 = (v_2 + i u_2)/2, \quad u_2 > 0),$$

двухсолитонное распределение намагниченности (2.10.14) при  $t \rightarrow \pm\infty$  стремится к односолитонному и экспоненциально убывает для всех других направлений  $(x, t)$ -плоскости. Для этого заметим, что в пределе

$$x - v_2 t = \text{const}, \quad t \rightarrow \pm\infty \quad (2.10.15)$$

компоненты вектора  $\mathbf{m}$  имеют вид

$$\mathbf{m} = \left( A(t) \exp \left[ \frac{u_1}{4} (v_1 - v_2) t \right], B(t) \exp \left[ \frac{u_1}{4} (v_2 - v_1) t \right] \right),$$



где  $u_1 > 0$ ,  $A(t)$  и  $B(t)$  — ограниченные функции от переменной  $t$ . Пусть для определенности  $v_1 > v_2$ , тогда в пределе (2.10.15) имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} G_+^{(1)}(\lambda) &= \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^*(\lambda - \lambda_1)}{\lambda_1(\lambda - \lambda_1^*)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = d_+(\lambda), \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} G_+^{(1)}(\lambda) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_1^*(\lambda - \lambda_1)}{\lambda_1(\lambda - \lambda_1^*)} \end{pmatrix} = d_-(\lambda); \\ \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \tilde{\mathbf{m}} &= \chi^{(0)}(x, t, \lambda_2^*) d_{\pm}^*(\lambda_2) \tilde{\mathbf{c}}. \end{aligned} \quad (2.10.16)$$

Из формул (2.10.14), (2.10.16) следует, что в пределе (2.10.15) двухсолитонное решение уравнения Ландау–Лифшица сводится к односолитонному. Иными словами, в системе координат, движущейся со скоростью  $v_2$  второго солитона, двухсолитонное распределение намагниченности (2.10.14) в асимптотике при  $t \rightarrow \pm\infty$  определяется формулами (2.10.9), где следует формально заменить

$$v_1 \rightarrow v_2, \quad u_1 \rightarrow u_2$$

и поменять параметры  $x_{01}$  и  $\varphi_{01}$ . Интересно, что различие асимптотик при  $t \rightarrow +\infty$  и  $t \rightarrow -\infty$  состоит лишь в сдвиге координаты центра тяжести второго солитона и изменении начальной фазы его прецессии:

$$\begin{aligned} \Delta x_{02} &= -\frac{2}{\operatorname{Im} \lambda_2} \ln \left| \frac{\lambda_2 - \lambda_1^*}{\lambda_2 - \lambda_1} \right|, \\ \Delta \varphi_{02} &= -2 \left( \arg \frac{\lambda_2 - \lambda_1^*}{\lambda_2 - \lambda_1} + 2 \arg \lambda_1 \right). \end{aligned} \quad (2.10.17)$$

Аналогичное рассмотрение можно провести, стартуя с односолитонного решения, связанного с задачей Римана с нулем функции  $G_+^{(1)}(\lambda)$  в точке  $\lambda = \lambda_2$  ( $\operatorname{Im} \lambda_2 > 0$ ), и добавляя по изложенной рекуррентной схеме еще один нуль в точке  $\lambda = \lambda_1$  ( $\operatorname{Im} \lambda_1 > 0$ ). В силу однозначной разрешимости задачи Римана, мы получим, конечно, то же самое двухсолитонное возбуждение изотропного ферромагнетика. Его новая форма записи полезна для исследования асимптотик двухсолитонного состояния в другом предельном случае:

$$x - v_1 t = \text{const}, \quad t \rightarrow \pm\infty. \quad (2.10.18)$$

Повторяя уже изложенное вычисление, нетрудно показать, что при  $v_1 > v_2$  в пределе (2.10.18) двухсолитонное решение сводится к односолитонному (2.10.9). Асимптотические состояния при  $t \rightarrow +\infty$  и  $t \rightarrow -\infty$  отличаются только сдвигом координаты центра тяжести

первого солитона и изменением начальной фазы его внутренней прецессии вокруг направления  $(0, 0, 1)$ :

$$\begin{aligned}\Delta x_{01} &= \frac{2}{\operatorname{Im} \lambda_1} \ln \left| \frac{\lambda_1 - \lambda_2^*}{\lambda_1 - \lambda_2} \right|, \\ \Delta \varphi_{01} &= 2 \left( \arg \frac{\lambda_1 - \lambda_2^*}{\lambda_1 - \lambda_2} + 2 \arg \lambda_2 \right).\end{aligned}\tag{2.10.19}$$

Полученные результаты допускают наглядное толкование в терминах общей теории рассеяния. Напомним, что, в отличие от линейной теории, односолитонному решению (2.10.9) сопоставляется частицеподобное образование, а не волновой пакет. Солитон характеризуется скоростью  $v_j$ , координатой его центра тяжести  $x_j(t) = v_j t + x_{0j}$ , значением проекции  $A_j$  (2.10.10) в центре тяжести солитона и начальной фазой  $\varphi_{0j}$ . При  $t \rightarrow \pm\infty$  двухсолитонное решение  $\mathbf{S}^{(2)}(x, t)$  описывает свободное движение двух солитонов с параметрами  $(v_j, x_{0j}^{(\pm)}, A_j, \varphi_{0j}^{(\pm)})$ ,  $j = 1, 2$ ,  $v_1 > v_2$ . При  $t \rightarrow -\infty$  их центры тяжести разделены большим расстоянием порядка  $(v_2 - v_1)t$ , причем самый быстрый первый солитон находится левее второго.

Таким образом, асимптотическое состояние, описываемое двухсолитонным решением при  $t \rightarrow -\infty$ , изображает движение двух пространственно разделенных солитонов, которые с течением времени сближаются. При конечных временах картина пространственного разделения солитонов теряется и двухсолитонное решение описывает нетривиальное взаимодействие солитонов. Однако с течением времени расстояние между солитонами увеличивается так, что при  $t \rightarrow +\infty$  вновь возникают пространственно разделенные солитоны. При этом самый быстрый из них первый солитон «обгоняет» второй и оказывается правее его. Описанная картина типична для теории рассеяния, в которой мы имеем дело с асимптотическими состояниями, характеризуемыми в терминах свободных частиц. В процессе рассеяния меняются лишь характеристики частиц и в общем случае их число.

В данной задаче мы имеем дело с процессом рассеяния весьма специального вида. Именно, число частиц, их амплитуды и скорости при рассеянии не меняются. Процесс рассеяния состоит лишь в изменении параметров центров тяжести солитонов и фаз их внутреннего движения.

В общем случае, для  $n$ -солитонного возбуждения приращения координат и фаз солитонов после каждого их парного столкновения представляются аддитивным образом через двухчастичные сдвиги. Двухчастичные сдвиги рассчитываются по формулам (2.10.17), (2.10.19) для случая  $v_1 > v_2$  или же с заменой  $1 \leftrightarrow 2$  для случая  $v_2 > v_1$ . При этом сумма приращений координаты  $x_{0j}$  и фазы  $\varphi_{0j}$  для солитона с номером  $j$  берется по всем его последовательным столкновениям с остальными солитонами [9]. Результат столкновения индивидуально-го солитона с остальными не зависит от порядка столкновений. Это специфическое свойство рассеяния, сводящее  $n$ -частичное рассеяние

к двухчастичному, принято называть факторизацией. Когда о солитонах говорят в узком смысле этого слова, факторизацию включают в определение понятия «солитон».

Ситуация общего положения, при которой все скорости солитонов  $v_j$  различны, существенна для интерпретации  $n$ -солитонного решения с точки зрения теории рассеяния. Однако само решение не теряет смысл и при совпадении двух или более скоростей. При этом солитоны с разными скоростями не расходятся, а образуют связанные состояния.

Сделанное замечание относится и к ограничениям на исходные параметры  $\lambda_j$ ,  $c_k$  мультисолитонного состояния. Мы можем в общей формуле для  $n$ -солитонного решения переходить к пределам, при которых некоторые из комплексных чисел  $\lambda_j$  становятся совпадающими и даже выходящими на вещественную ось, а числа  $c_k$  оказываются стремящимися к нулю. Полученные при таком вырождении решения  $S(x, t)$  будут полиномиальными или экспоненциально-полиномиальными [59, 119, 120].

В силу алгебраического характера исходной формулы, определяющей  $S(x, t)$ , все вырожденные решения будут удовлетворять уравнениям Ландау–Лифшица.

Отметим, что задача Римана удобна при анализе асимптотик при  $t \rightarrow \pm\infty$  любых, а не только солитонных решений интегрируемых моделей. Оказывается, что при  $t \rightarrow +\infty$  на прямых  $x - vt = \text{const}$ , где  $v$  — групповая скорость нелинейной волны, общая задача Римана существенно упрощается. В частности, сводится к задаче, где факторизуемая матрица  $G_0(\lambda)$  не зависит от параметра  $\lambda$ . При этом возникают интересные связи с так называемыми изомонодромными решениями, автомодельными решениями и уравнениями типа Пенлеве [10, 121]. С прикладной точки зрения интересным фактом является то, что решения уравнений Пенлеве могут использоваться в качестве сшивающих функций при описании различных переходных режимов в нелинейной физике конденсированных сред. Эта обширная тематика не разбирается в этой книге, мы можем лишь отослать читателя к оригинальной литературе [10, 112–116, 122–132].

## 2.11. Радиальные волны в изотропном ферромагнетике

*Бросая в воду камешки, смотри на круги, ими образуемые; иначе такое бросание будет пустою забавою.*

*Козьма Прутков*

Широкий класс интегрируемых нелинейных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами можно получить из известных интегрируемых уравнений с постоянными коэффициентами.

Каждое интегрируемое уравнение с постоянными коэффициентами описывается  $U$ - $V$ -парой с постоянным спектральным параметром. Интегрируемые модели с переменными коэффициентами получаются регулярной процедурой [105, 106], которая связана с переходом от известных  $U$ - $V$ -пар с постоянным спектральным параметром к  $U$ - $V$ -парам с движущимся спектральным параметром. Идею метода поясним на примере.

Квазиодномерное уравнение изотропного ферромагнетика:

$$\partial_t \mathbf{S} = [\mathbf{S} \times \partial_r^2 \mathbf{S}], \quad \mathbf{S}^2 = 1 \quad (2.11.1)$$

эквивалентно условию совместности следующей вспомогательной линейной системы с постоянным спектральным параметром  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} \partial_r \chi &= \frac{\lambda}{2i} S_p \sigma_p \chi, \\ \partial_t \chi &= \frac{1}{2i} (-\lambda^2 S_p + \lambda [\mathbf{S} \times \partial_r \mathbf{S}]_p) \sigma_p \chi. \end{aligned} \quad (2.11.2)$$

Для получения нового интегрируемого уравнения с переменными коэффициентами, будем считать, что в представлении (2.11.2) спектральный параметр  $\lambda$  является функцией от переменных  $r, t$ . Тогда условие совместности системы (2.11.2) приведет к равенству

$$\lambda \partial_t \mathbf{S} + \partial_t \lambda \mathbf{S} + (\partial_r \lambda^2) \mathbf{S} - \partial_r \lambda [\mathbf{S} \times \partial_r \mathbf{S}] - \lambda [\mathbf{S} \times \partial_r^2 \mathbf{S}] = 0. \quad (2.11.3)$$

Потребуем, чтобы функция  $\lambda(r, t)$  удовлетворяла следующей совместной системе дифференциальных уравнений:

$$\partial_r \lambda = \frac{\lambda}{r}, \quad \partial_t \lambda = -\frac{2\lambda^2}{r}, \quad (2.11.4)$$

тогда

$$\partial_r \lambda^2 = \frac{2\lambda^2}{r}. \quad (2.11.5)$$

Система (2.11.4) может быть проинтегрирована:

$$\lambda = -\alpha(t) r, \quad \alpha(t) = -\frac{1}{2(t + \kappa)}.$$

Здесь  $\kappa$  — постоянная интегрирования, которая в дальнейшем анализе играет роль нового спектрального параметра.

С учетом формул (2.11.4), (2.11.5) равенство (2.11.3) приводит к новому дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами [86]:

$$\partial_t \mathbf{S} = [\mathbf{S} \times \partial_r^2 \mathbf{S}] + \frac{1}{r} [\mathbf{S} \times \partial_r \mathbf{S}], \quad \mathbf{S}^2 = 1. \quad (2.11.6)$$

Новая интегрируемая модель (2.11.6) найдена и исследована в работах [72, 86]. Она описывает распределения намагниченности в изотропном ферромагнетике, которые зависят только от времени  $t$  и расстояния  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  от начала декартовой системы координат.

Для дальнейшего анализа удобно перейти от радиальной переменной  $r$  к новой координате:

$$\xi = \frac{r^2}{4} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{4}.$$

Тогда вспомогательная линейная система (2.11.2) примет вид

$$\begin{aligned} \partial_\xi \chi &= i \alpha(t) S_p \sigma_p \chi, \\ \partial_t \chi &= i \xi (2 \alpha^2(t) S_p + \alpha(t) [\mathbf{S} \times \partial_r \mathbf{S}]_p) \sigma_p \chi. \end{aligned} \quad (2.11.7)$$

Ввиду специфики системы (2.11.7), можно считать, что матричная функция  $\chi$  удовлетворяет условию канонической нормировки при  $\kappa = \infty$  ( $\alpha(t) = 0$ ):

$$\chi(\xi, t, \kappa = \infty) = I.$$

Проанализируем характер аксиально-симметричных возбуждений изотропного ферромагнетика с однородной асимптотикой на пространственной бесконечности:

$$\mathbf{S} = (0, 0, 1) \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \infty.$$

Из второго уравнения (2.11.7) при  $\xi = 0$  имеем

$$\partial_t \chi(\xi = 0, t, \kappa) = 0. \quad (2.11.8)$$

Следовательно, матричная функция  $\chi(\xi = 0, t, \kappa)$  является производящей функцией законов сохранения.

Используя первое уравнение (2.11.7), найдем асимптотическое разложение матричного решения  $\chi(\xi, t, \kappa)$  в ряд по параметру  $|\kappa| \ll 1$ :

$$\chi = \left( I + \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(\xi, t) \kappa^{-n} \right) \exp(i \alpha \xi \sigma_3).$$

Первые члены разложения имеют вид

$$\begin{aligned} \chi_1(\xi, t) &= \frac{i}{2} \int_{\xi}^{+\infty} [S_p(\xi', t) \sigma_p - \sigma_3] d\xi', \\ \chi_2(\xi, t) &= \frac{it}{2} \int_{\xi}^{+\infty} [\sigma_3 - S_p(\xi', t) \sigma_p] d\xi' - \\ &\quad - \frac{1}{4} \int_{\xi}^{+\infty} \int_{\xi'}^{+\infty} (S_k(\xi', t) S_p(\xi'', t) \sigma_k \sigma_p - \\ &\quad - [S_p(\xi'', t) + S_p(\xi', t)] \sigma_p \sigma_3 + I) d\xi' d\xi''. \end{aligned}$$

Согласно соотношению (2.11.8), значения коэффициентов  $\chi_n(\xi, t)$  при  $\xi = 0$  не зависят от времени. Отсюда находим первые два интеграла движения:

$$I_1 = 2i \chi_1(\xi = 0, t) = \int_0^{+\infty} [\sigma_3 - S_p(\xi', t) \sigma_p] d\xi',$$

$$I_2 = -2i \chi_2(\xi = 0, t) = t I_1 + \frac{i}{2} \int_0^{+\infty} \int_{\xi'}^{+\infty} (S_k(\xi', t) S_p(\xi'', t) \sigma_k \sigma_p -$$

$$- [S_p(\xi', t) + S_p(\xi'', t)] \sigma_p \sigma_3 + I) d\xi'' d\xi'.$$

Интеграл  $I_1$  характеризует полный магнитный момент системы.

Рассмотрим закон сохранения

$$J = \frac{1}{2} \text{Sp} [I_2 \sigma_3] = t \int_0^{+\infty} [1 - S_3(\xi, t)] d\xi -$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \int_{\xi'}^{+\infty} [\mathbf{S}(\xi', t) \times \mathbf{S}(\xi'', t)]_3 d\xi'' d\xi'. \quad (2.11.9)$$

Первое слагаемое в формуле (2.11.9) положительно определено и линейно растет со временем. Отсюда следует, что радиус локализации решения также должен расти со временем. В противном случае второе слагаемое в формуле (2.11.9) оставалось бы ограниченным, что означало бы неограниченный рост величины  $J$  при  $t \rightarrow \infty$ . Иными словами, не существует решений типа «магнитных капель». Любая локализованная в начальный момент времени флуктуация намагниченности, зависящая только от расстояния до начала координат, расплывается [86]. Разумеется, приведенное доказательство справедливо лишь тогда, когда интегралы  $I_1$ ,  $J$  остаются конечными при  $t \rightarrow \infty$ .

Нетрудно проверить, что метод «одевания» позволяет строить солитонные решения модели (2.11.6), (2.11.7) с переменным спектральным параметром  $\alpha(t)$  почти по тем же формулам, что и для модели (2.11.1), (2.11.2) с постоянным спектральным параметром  $\lambda$ . А именно, по известному частному решению  $\mathbf{S} = (0, 0, 1)$  новые решения модели (2.11.6) вычисляются по формуле

$$S_k \sigma_k = G_+^\dagger(\alpha = \infty) \sigma_3 G_+(\alpha = \infty).$$

Для мультисолитонных состояний матрица задачи Римана  $G_+(\alpha) -$  это мероморфная функция спектрального параметра  $\alpha = \alpha(t)$ , нормированная на единичную матрицу в точке  $\alpha = 0$ , удовлетворяющая условию

$$G_+^\dagger(\alpha^*) G_+(\alpha) = I.$$

Формально матричная функция  $G_+(\alpha)$  имеет такой же вид, что и для модели (2.11.1). Так, для односолитонного возбуждения имеем:

$$G_+(\alpha) = I - \frac{\alpha_1^{-1} - (\alpha_1^*)^{-1}}{\alpha^{-1} - \alpha_1^*} P,$$

где  $P$  — проекционная матрица с элементами

$$P_{\alpha\beta} = \frac{m_\alpha m_\beta^*}{|\mathbf{m}|^2}.$$

Особенность рассматриваемой задачи только в том, спектральный параметр  $\alpha$  и нуль  $\alpha = \alpha_1$  ( $\text{Im} \alpha_1 > 0$ ) матрицы  $G_+(\alpha)$  зависят от времени:

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2(t + \kappa_1)}, \quad \text{Im} \kappa_1 > 0.$$

Как и ранее, вектор  $\mathbf{m}$  выражается через «затравочное» решение  $\chi_0(\alpha) = \exp(i\alpha \xi \sigma_3)$  вспомогательной линейной системы (2.11.7):

$$\mathbf{m} = \chi_0(\alpha_1^*) \mathbf{c} = \exp(i\alpha_1^* \xi \sigma_3) \mathbf{c},$$

где  $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$  — произвольный постоянный комплексный вектор.

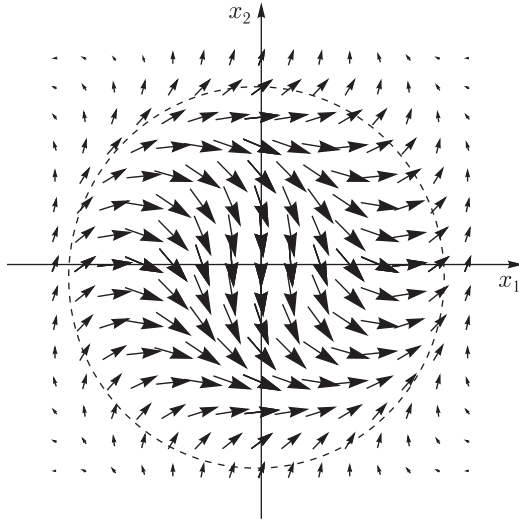


Рис. 2.4. Распределение намагниченности в плоскости  $Ox_1x_2$  для кольцевого солитона (2.11.10)

Распределение намагниченности, соответствующее односолитонному решению модели (2.11.6), имеет вид

$$\begin{aligned}
 S_3 &= 1 - \frac{2a^2}{[a^2 + (t+b)^2] \operatorname{ch}^2 \varphi}, & \varphi &= \frac{a\xi}{a^2 + (t+b)^2} + \ln \left| \frac{c_1}{c_2} \right|, \\
 S_1 + iS_2 &= \frac{2a \exp(iX)}{[a^2 + (t+b)^2] \operatorname{ch} \varphi} (-i(t+b) + a \operatorname{th} \varphi), & (2.11.10) \\
 X &= \frac{\xi(t+b)}{a^2 + (t+b)^2} + \arg \frac{c_1^*}{c_2^*}.
 \end{aligned}$$

При получении формулы (2.11.10) мы перешли от комплексного числа  $\kappa_1$  к двум вещественным параметрам  $a$  и  $b$ :  $\kappa_1 = b + ia$ .

Выражение (2.11.10) подтверждает вывод о расплывании локализованных начальных распределений намагниченности (см. рис. 2.4). На штриховой окружности на рис. 2.4 все векторы сонаправлены и имеют одинаковую длину. Солитон (2.11.10) представляет собой кольцевую волну, радиус и толщина которой увеличиваются со временем по линейному (при больших  $t$ ) закону, а амплитуда при фиксированном  $\xi$  спадает как  $t^{-1}$  [86].



## Глава 3

# НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ФЕРРОМАГНЕТИКА С АНИЗОТРОПИЕЙ ТИПА «ЛЕГКАЯ ОСЬ»

### 3.1. Квазиодномерная динамика ферромагнетика при учете размагничивающих полей и энергии магнитной анизотропии

*Расчлените каждую изучаемую вами задачу на столько частей, на сколько сможете, и насколько это потребуется вам, чтобы их было легко решить.*

*Р. Декарт*

#### 3.1.1. Основные интегрируемые модели

В данном разделе мы покажем, что рассмотренная ранее модель ферромагнетика, включающая только основные обменные взаимодействия, может быть обобщена при учете более слабых магнитоанизотропных (релятивистских) и магнитостатических взаимодействий. Важно, что при наличии перечисленных взаимодействий физически содержательные квазиодномерные модели ферромагнетика также оказываются полностью интегрируемыми методом обратной задачи рассеяния (или же его модификациями). Обсудим это подробнее.

В общем случае динамика одноподрешеточного ферромагнетика описывается уравнениями Ландау–Лифшица:

$$\partial_t \mathbf{M} = -\gamma [\mathbf{M} \times \mathbf{H}^{\text{eff}}], \quad \mathbf{H}^{\text{eff}} = -\frac{\delta W}{\delta \mathbf{M}}, \quad \mathbf{M}^2 = M_0^2 = \text{const}, \quad (3.1.1)$$

где  $\mathbf{M}$  — вектор плотности магнитного момента среды,  $\gamma$  — магнито-механическое отношение,  $W$  — свободная энергия ферромагнетика:

$$W = \int \left[ \frac{1}{2} \alpha_{ik} (\partial_i \mathbf{M} \cdot \partial_k \mathbf{M}) + w^{(a)} + w^{(m)} - (\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_0) \right] d^3 \mathbf{x},$$

$\alpha_{ik}$  — постоянные обменного взаимодействия,  $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_0(t)$  — внешнее магнитное поле, которое далее будем считать медленно зависящим от времени,  $w^{(a)}$  — плотность энергии магнитной анизотропии кристалла,  $w^{(m)}$  — плотность магнитостатической энергии:

$$w^{(m)} = -\frac{1}{2} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}^{(m)}). \quad (3.1.2)$$

Внутреннее магнитное поле кристалла  $\mathbf{H}^{(m)}$ , обусловленное распределением намагниченности  $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ , определяется из уравнений магнитостатики:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^{(m)} = 0, \quad \operatorname{div}(\mathbf{H}^{(m)} + 4\pi\mathbf{M}) = 0. \quad (3.1.3)$$

Уравнения (3.1.1)–(3.1.3) вместе с подходящими граничными условиями дают полное описание динамики ферромагнетика. В общем случае решение системы (3.1.1)–(3.1.3) связано с серьезными аналитическими трудностями. Ситуация существенно упрощается при исследовании квазиодномерных задач. Например, при рассмотрении магнитной динамики образцов в форме сильно вытянутых ферромагнитных эллипсоидов или же нелинейных возбуждений в магнитных структурах, представляющих параллельные цепочки из магнитных атомов, когда взаимодействием между разными магнитными цепочками можно пренебречь, а постоянные обменного взаимодействия считать отличными от нуля только для одного направления — вдоль цепочек.

Для одномерных волн намагниченности, распространяющихся вдоль оси, заданной единичным вектором  $\mathbf{e}$ , уравнения магнитостатики (3.1.3) имеют явное решение:

$$\mathbf{H}^{(m)} = -4\pi(\mathbf{M} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e}. \quad (3.1.4)$$

В простейшем случае плотность энергии анизотропии  $w^{(a)}$  является квадратичной формой по компонентам вектора  $\mathbf{M}$ . С учетом (3.1.4) энергия  $w^{(m)}$  также оказывается квадратичной формой по компонентам вектора  $\mathbf{M}$ . Подходящим выбором осей системы координат выражение  $w^{(a)} + w^{(m)}$  можно привести в виду

$$w^{(a)} + w^{(m)} = -\frac{1}{2}(J_1 M_1^2 + J_2 M_2^2 + J_3 M_3^2). \quad (3.1.5)$$

Постоянные  $J_1, J_2, J_3$  в формуле (3.1.5) теперь характеризуют не только энергию магнитной анизотропии, но и вклад размагничивающих полей.

Перейдем к безразмерным переменным:

$$\mathbf{M} = -M_0 \mathbf{S}, \quad \mathbf{H}_0 = -M_0 \mathbf{H}, \quad \xi' = \alpha^{-1/2} \xi, \quad t' = \gamma M_0 t. \quad (3.1.6)$$

Здесь  $\xi$  — координата вдоль направления распространения волны намагниченности:

$$\xi = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}),$$

$M_0$  — номинальная намагниченность ферромагнетика,  $\alpha$  — обменная постоянная.

С учетом (3.1.5), (3.1.6) уравнения (3.1.1) примут вид:

$$\partial_{t'} \mathbf{S} = [\mathbf{S} \times \partial_{\xi'}^2 \mathbf{S}] + [\mathbf{S} \times J \mathbf{S}] + [\mathbf{S} \times \mathbf{H}], \quad \mathbf{S}^2 = 1, \quad (3.1.7)$$

где  $J = \operatorname{diag}(J_1, J_2, J_3)$ .

В безразмерных переменных свободная энергия ферромагнетика переписывается в форме

$$W = M_0^2 \alpha^{1/2} \int \left[ \frac{1}{2} (\partial_{\xi'} \mathbf{S})^2 - \frac{1}{2} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{J} \mathbf{S}) - (\mathbf{S} \cdot \mathbf{H}) \right] d\xi'. \quad (3.1.8)$$

Далее всюду, где это не вызовет недоразумений, будем опускать «штрих» у переменных  $\xi'$ ,  $t'$ .

Перечислим специфические частные случаи квадратичной магнитной анизотропии.

При  $J_1 = J_2 = J_3$  уравнения (3.1.7) сводятся к модели изотропного ферромагнетика во внешнем магнитном поле  $\mathbf{H} = \mathbf{H}(t)$ :

$$\partial_t \mathbf{S} = [\mathbf{S} \times \partial_{\xi}^2 \mathbf{S}] + [\mathbf{S} \times \mathbf{H}], \quad \mathbf{S}^2 = 1.$$

Когда  $J_1 = J_2 \neq J_3$ , имеем ферромагнетик с выделенной осью  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$  эффективной анизотропии:

$$\partial_t \mathbf{S} = [\mathbf{S} \times \partial_{\xi}^2 \mathbf{S}] + \tilde{\beta}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})[\mathbf{S} \times \mathbf{n}] + [\mathbf{S} \times \mathbf{H}], \quad \mathbf{S}^2 = 1. \quad (3.1.9)$$

Здесь  $\tilde{\beta} = J_3 - J_2$ . Нетрудно проверить, что полные уравнения Ландау–Лифшица (3.1.7) могут быть редуцированы к модели (3.1.9) лишь тогда, когда направление распространения волн намагниченности совпадает с направлением оси одноосной кристаллографической анизотропии среды (при  $\mathbf{e} = \mathbf{n}$ ), см. (3.5.12). Далее мы построим точные решения упрощенной модели (3.1.9), не налагая условия  $\mathbf{e} = \mathbf{n}$ . При  $\mathbf{e} \neq \mathbf{n}$  такими решениями можно пользоваться лишь при условии, что энергия магнитостатических взаимодействий (3.1.2) мала по сравнению с энергией одноосной кристаллографической анизотропии среды.

Интересно, что в случае, когда направление внешнего магнитного поля совпадает с направлением оси эффективной анизотропии, т. е. при  $\mathbf{H} = H(t) \mathbf{n}$ , возможно преобразование векторного поля  $\mathbf{S}(\xi, t)$ :

$$\begin{aligned} S_1(\xi, t) + i S_2(\xi, t) &= [S'_1(\xi, t) + i S'_2(\xi, t)] e^{-i \int^t H(t') dt'}, \\ S_3(\xi, t) &= S'_3(\xi, t), \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

после которого из системы (3.1.9) исключается внешнее магнитное поле:

$$\partial_t \mathbf{S}' = [\mathbf{S}' \times \partial_{\xi}^2 \mathbf{S}'] + \tilde{\beta}(\mathbf{S}' \cdot \mathbf{n})[\mathbf{S}' \times \mathbf{n}], \quad \mathbf{S}'^2 = 1. \quad (3.1.11)$$

В отсутствии внешнего магнитного поля однородному распределению намагниченности ферромагнетика соответствует плотность энергии

$$w = -\frac{1}{2} \tilde{\beta} M_3^2 + \text{const} = -\frac{1}{2} \tilde{\beta} M_0^2 S_3^2 + \text{const}. \quad (3.1.12)$$

При  $\tilde{\beta} > 0$  энергия (3.1.12) минимальна, если вектор  $\mathbf{S}$  сонаправлен или антипараллелен оси анизотропии:

$$\mathbf{S} = (0, 0, \pm 1). \quad (3.1.13)$$

При  $\tilde{\beta} < 0$  минимум энергии (3.1.12) реализуется, когда вектор  $\mathbf{S}$  лежит в плоскости, перпендикулярной оси анизотропии  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ .

Таким образом, наличие одноосной магнитной анизотропии предполагает две физически различные ситуации. Принято называть ферромагнетик с  $\tilde{\beta} > 0$  ( $\tilde{\beta} < 0$ ) ферромагнетиком с анизотропией типа «легкая ось» («легкая плоскость»). Методы интегрирования уравнений (3.1.11) в каждом из двух случаев одноосной анизотропии различны. Различными будут и свойства частных решений уравнений Ландау–Лифшица. Более того, в одноосных ферромагнетиках появляются новые нелинейные магнитные образования — топологические солитоны типа доменных стенок, которые отсутствовали у изотропного ферромагнетика. В ферромагнетике с анизотропией типа «легкая ось» доменные стенки разделяют области с двумя разными направлениями спонтанной намагниченности (3.1.13). Можно сказать иначе: доменные стенки разделяют два неэквивалентных основных состояния магнитной среды с одинаковой плотностью энергии. Поскольку уравнениям ферромагнетика с анизотропиями типа «легкая ось» и «легкая плоскость» соответствуют  $U$ – $V$ -пары с рациональными зависимостями от спектрального параметра  $\lambda$ , методы их интегрирования представляют естественное обобщение схемы интегрирования уравнений изотропного ферромагнетика, изложенной в предыдущем разделе.

Квазиодномерная модель ферромагнетика с двухосной магнитной анизотропией (3.1.7), когда  $J_1 < J_2 < J_3$ ,  $\mathbf{H} = 0$ , также является полностью интегрируемой. Однако она принципиально отличается от моделей изотропного ферромагнетика и ферромагнетика с одноосной магнитной анизотропией. Дело в том, что при условии  $J_1 < J_2 < J_3$ ,  $\mathbf{H} = 0$  обобщенная пара Лакса для уравнений (3.1.8) оказывается мероморфной не в комплексной плоскости спектрального параметра  $\lambda$ , а на римановой поверхности, топологически эквивалентной тору. Метод обратной задачи рассеяния и процедура «одевания» в такой ситуации требуют специального обсуждения.

В рассматриваемых далее задачах направление распространения волны намагниченности будет предполагаться совпадающим либо с осью  $Ox_1$  декартовой системы координат:  $\xi = x$  (общий случай двухосной анизотропии и ферромагнетик с анизотропией типа «легкая ось»), либо с направлением оси анизотропии:  $\xi = z$  (ферромагнетик с анизотропией типа «легкая плоскость»).

### 3.1.2. Представления нулевой кривизны

Представления нулевой кривизны для квазиодномерных моделей Ландау–Лифшица с квадратичной магнитной анизотропией впервые

были найдены Боровиком и Робуком [1] и Складным [2]. В работе последнего показано, что уравнения Ландау–Лифшица при наличии двухосной магнитной анизотропии,

$$\partial_t \mathbf{S} = [\mathbf{S} \times \partial_\xi^2 \mathbf{S}] + [\mathbf{S} \times \mathbf{J} \mathbf{S}], \quad \mathbf{S}^2 = 1, \quad \mathbf{J} = \text{diag}(J_1, J_2, J_3), \quad (3.1.14)$$

эквивалентны коммутационному соотношению:

$$\begin{aligned} \partial_t U - \partial_\xi V + [U, V] &= 0; \\ U(\xi, t, \lambda) &= -i \sum_{\alpha=1}^3 w_\alpha(\lambda) S_\alpha \sigma_\alpha, \\ V(\xi, t, \lambda) &= -i \sum_{\alpha=1}^3 \{w_\alpha(\lambda) [\mathbf{S} \times \partial_\xi \mathbf{S}]_\alpha + 2 a_\alpha(\lambda) S_\alpha\} \sigma_\alpha, \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

где  $\sigma_\alpha$  — матрицы Паули,  $a_1(\lambda) = -w_2(\lambda) w_3(\lambda)$  (и циклическая перестановка индексов 1, 2, 3 для других коэффициентов  $a_\alpha(\lambda)$ ). Функции  $w_\alpha(\lambda)$  удовлетворяют квадратичным соотношениям

$$w_\alpha^2(\lambda) - w_\beta^2(\lambda) = -\frac{1}{4}(J_\alpha - J_\beta), \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \quad (3.1.16)$$

Комплексный спектральный параметр  $\lambda$  следует выбрать так, чтобы равенства (3.1.16) были униформизированы мероморфными функциями  $w_\alpha(\lambda)$ . Представление (3.1.15) является в определенном смысле универсальным. Все приведенные ранее модели квазиодномерной динамики ферромагнетика получаются из него различными предельными переходами.

При  $J_1 = J_2 = J_3$  формулы (3.1.14) сводятся к коммутационному представлению уравнений изотропного ферромагнетика ( $w_1 = w_2 = w_3 = \lambda/2$ ).

В случае анизотропии типа «легкая ось», полагая

$$J_1 = J_2, \quad J_3 - J_1 = \beta^2 > 0,$$

уравнения Ландау–Лифшица (3.1.14) запишем в виде ( $\xi = x$ ):

$$\partial_t \mathbf{S} = [\mathbf{S} \times \partial_x^2 \mathbf{S}] + \beta^2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}) [\mathbf{S} \times \mathbf{n}], \quad \mathbf{S}^2 = 1, \quad (3.1.17)$$

где  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ . При этом возможную параметризацию соотношений (3.1.16) дают формулы

$$w_1 = w_2 = \frac{\beta}{4}(\lambda + \lambda^{-1}), \quad w_3 = \frac{\beta}{4}(\lambda - \lambda^{-1}). \quad (3.1.18)$$

Для ферромагнетика с анизотропией типа «легкая плоскость» имеем  $J_1 = J_2$ ,  $J_1 - J_3 = \rho^2 > 0$ , и уравнения Ландау–Лифшица (3.1.14) также упрощаются ( $\xi = z$ ):

$$\partial_t \mathbf{S} = [\mathbf{S} \times \partial_z^2 \mathbf{S}] - \rho^2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}) [\mathbf{S} \times \mathbf{n}], \quad \mathbf{S}^2 = 1. \quad (3.1.19)$$

Возможная параметризация функций  $w_\alpha(\lambda)$  есть

$$w_1 = w_2 = \frac{\rho \lambda}{\lambda^2 - 1}, \quad w_3(\lambda) = \frac{\rho(\lambda^2 + 1)}{2(\lambda^2 - 1)}. \quad (3.1.20)$$

В общем случае квадратичные соотношения (3.1.16) задают в пространстве с координатами  $(w_1, w_2, w_3)$  комплексную эллиптическую кривую:  $w_\alpha = w_\alpha(\lambda)$ . В предположении  $J_3 > J_2 > J_1$  функции  $w_\alpha(\lambda)$  допускают униформизацию:

$$w_1(\lambda) = \frac{\rho}{\operatorname{sn}(\lambda, k)}, \quad w_2(\lambda) = \rho \frac{\operatorname{dn}(\lambda, k)}{\operatorname{sn}(\lambda, k)}, \quad w_3(\lambda) = \rho \frac{\operatorname{cn}(\lambda, k)}{\operatorname{sn}(\lambda, k)}. \quad (3.1.21)$$

Здесь  $\operatorname{sn}(\lambda, k)$ ,  $\operatorname{cn}(\lambda, k)$ ,  $\operatorname{dn}(\lambda, k)$  — эллиптические функции Якоби с модулем  $k = [(J_2 - J_1)/(J_3 - J_1)]^{1/2}$ ,  $2\rho = (J_3 - J_1)^{1/2}$ .

В отличие от предыдущих случаев, функции  $w_\alpha(\lambda)$  оказываются двоякопериодическими по комплексному параметру  $\lambda$ . В фундаментальном параллелограмме своей периодичности на  $\lambda$ -плоскости они являются аналитическими функциями от параметра  $\lambda$  всюду, за исключением конечного числа полюсов.

Все рассмотренные модели нелинейной динамики ферромагнетика допускают представления нулевой кривизны с  $2 \times 2$  матрицами  $U(\xi, t, \lambda)$  и  $V(\xi, t, \lambda)$ . Разложение матриц  $U$  и  $V$  по матрицам Паули  $\sigma_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) естественно при теоретическом описании симметрии основных обменных взаимодействий. В то же время, учет магнитной анизотропии привел к тому, что, в отличие от  $U$ - $V$ -пары для изотропного ферромагнетика, представление (3.1.15) содержит не равноправно разные компоненты вектора  $\mathbf{S}$ .

### 3.2. Решения Йоста, редукции для ферромагнетика с анизотропией типа «легкая ось» и равновесными значениями намагниченности на бесконечности

*Ne quid nimis...*

(Ничего лишнего — лат.)

Процедура интегрирования уравнений нелинейной динамики ферромагнетика с анизотропией типа «легкая ось», основанная на методе обратной задачи рассеяния, была впервые предложена в работах [3, 4]. Однако в этих работах использована  $U$ - $V$ -пара, которая сложнее представления (3.1.15), (3.1.18). Кроме того, в работах [3, 4] не обсуждалась динамика ферромагнетика при наличии доменной стенки. В данном разделе изложена процедура интегрирования уравнений ферромагнетика с анизотропией типа «легкая ось», основанная на методе обратной задачи рассеяния и представлении нулевой кривизны (3.1.15), (3.1.18).

Будем предполагать, что параметр порядка  $\mathbf{S}(x, t)$  при  $|x| \rightarrow \infty$  достаточно быстро стремится к равновесным значениям:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(x, t) &\rightarrow (0, 0, 1) \quad \text{при } x \rightarrow +\infty; \\ \mathbf{S}(x, t) &\rightarrow (0, 0, \varepsilon) \quad \text{при } x \rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

где  $\varepsilon = \pm 1$ . Величина  $\varepsilon$  равна минус единице лишь при наличии в среде одной нескомпенсированной доменной границы.

Обсудим спектральную задачу для вспомогательной линейной системы

$$\partial_x \varphi = U(\lambda) \varphi, \quad (3.2.2)$$

где матрица  $U(\lambda)$  определена формулами (3.1.15), (3.1.18).

Вследствие условий (3.2.1), система (3.2.2) имеет два типа асимптотических решений:

$$\begin{aligned} \chi_0(x, \lambda) &= \exp \left[ \frac{\varepsilon}{i} w_3(\lambda) \sigma_3 x \right] \quad \text{при } x \rightarrow -\infty; \\ \varphi_0(x, \lambda) &= \exp \left[ \frac{1}{i} w_3(\lambda) \sigma_3 x \right] \quad \text{при } x \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Фиксируем два набора базисных решений  $\varphi_{\pm}(x, t, \lambda)$  системы (3.2.2) (решений Йоста) посредством следующего выбора асимптотических условий при  $|x| \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} \varphi_-(x, t, \lambda) &\rightarrow \chi_0(x, \lambda) \quad \text{при } x \rightarrow -\infty; \\ \varphi_+(x, t, \lambda) &\rightarrow \varphi_0(x, \lambda) \quad \text{при } x \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Эволюция функций  $\varphi_{\pm}$  описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \partial_t \varphi_+ &= V(\lambda) \varphi_+ - \varphi_+ 2i w_1^2(\lambda) \sigma_3; \\ \partial_t \varphi_- &= V(\lambda) \varphi_- - \varphi_- 2i w_1^2(\lambda) \varepsilon \sigma_3, \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

где матрица  $V(\lambda)$  определена в (3.1.15), (3.1.18).

Условие совместности

$$\partial_t U - \partial_x V + [U, V] = 0 \quad (3.2.6)$$

системы (3.2.2), (3.2.5) эквивалентно уравнениям Ландау–Лифшица для ферромагнетика с анизотропией типа «легкая ось»:

$$\partial_t \mathbf{S} = [\mathbf{S} \times \partial_x^2 \mathbf{S}] + \beta^2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}) [\mathbf{S} \times \mathbf{n}], \quad \mathbf{S}^2 = 1, \quad (3.2.7)$$

где  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ ,  $\beta^2 > 0$ . Последние слагаемые в правых частях уравнений (3.2.5) не нарушают условия совместности (3.2.6) и введены для того, чтобы сохранить неизменность во времени асимптотик (3.2.4).

Поскольку  $\text{Sp } U(\lambda) = 0$ , из уравнений (3.2.2) следует, что  $\det \varphi_{\pm}$  не зависит от координаты  $x$ . В пределе  $x \rightarrow \pm\infty$ , находим

$$\det \varphi_+ = \det \varphi_0 = 1, \quad \det \varphi_- = \det \chi_0 = 1. \quad (3.2.8)$$

Нетрудно проверить, что система (3.2.2), (3.2.5) и выбор условий (3.2.4) предполагают ограничения на решения Йоста, которые для определенности сформулируем лишь при вещественных значениях  $\lambda$ :

$$\varphi_{\pm}(-\lambda^{-1}) = \sigma_3 \varphi_{\pm}(\lambda) \sigma_3; \quad (3.2.9)$$

$$\varphi_{\pm}^*(\lambda) = \sigma_2 \varphi_{\pm}(\lambda) \sigma_2. \quad (3.2.10)$$

Далее мы увидим, что разные столбцы матриц Йоста  $\varphi_{\pm}$  оказываются аналитическими функциями по параметру  $\lambda$  в разных полуплоскостях комплексной  $\lambda$ -плоскости. Редукция (3.2.9) не меняет местами столбцов, поэтому сохранится при аналитическом продолжении столбцов-решений с вещественной оси в соответствующие полуплоскости. В отличие от условия (3.2.9), редукция (3.2.10) связывает на вещественной  $\lambda$ -оси столбцы-решения, которые аналитически продолжаются по параметру  $\lambda$  с вещественной оси в разные полуплоскости комплексной переменной  $\lambda$ .

При вещественных значениях  $\lambda$  решения одного из базисов представляют собой линейную комбинацию решений другого базиса, поэтому

$$\varphi_{-}(x, t, \lambda) = \varphi_{+}(x, t, \lambda) T(\lambda, t), \quad (3.2.11)$$

где матрица перехода  $T$  может зависеть только от переменных  $\lambda$  и  $t$ .

Редукция (3.2.10) переносится на матрицу перехода и конкретизирует ее алгебраическую структуру:

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & -b^*(\lambda) \\ b(\lambda) & a^*(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Вследствие редукции (3.2.9), имеем

$$a(\lambda) = a(-\lambda^{-1}), \quad b(\lambda) = -b(-\lambda^{-1}). \quad (3.2.12)$$

Из формул (3.2.8), (3.2.11) следует, что матрица перехода унимодулярна:

$$\det T(\lambda) = |a(\lambda)|^2 + |b(\lambda)|^2 = 1.$$

Элементы матрицы  $T(\lambda, t)$  являются частью новых переменных, в которых исходное нелинейное уравнение (3.2.7) легко интегрируется. Используя (3.2.5), получаем уравнение, определяющее зависимость матрицы  $T$  от времени:

$$\partial_t T = -2i w_1^2(\lambda) (\varepsilon T \sigma_3 - \sigma_3 T). \quad (3.2.13)$$

Из (3.2.13) находим

$$a(\lambda, t) = a(\lambda) = \text{const}, \quad b(\lambda, t) = b(\lambda, t=0) \exp[-4i w_1^2(\lambda) t] \quad (3.2.14)$$

при  $\varepsilon = 1$  и

$$a(\lambda, t) = a(\lambda, t=0) \exp[4i w_1^2(\lambda) t], \quad b(\lambda, t) = b(\lambda) = \text{const} \quad (3.2.15)$$

при  $\varepsilon = -1$ .



Как и в случае изотропного ферромагнетика, не зависящие от времени  $t$  элементы матрицы перехода могут быть использованы для построения бесконечной серии интегралов движения в модели ферромагнетика с анизотропией типа «легкая ось».

Для выявления полного набора новых динамических переменных, в которых исходная нелинейная модель (3.2.7) может быть проинтегрирована, потребуется исследование аналитических свойств функций Йоста  $\varphi_{\pm}(\lambda)$ .

### 3.3. Прямая задача рассеяния

*Никогда не ставьте задачу, решение которой вам неизвестно.*

*Правило Берке*

Важный шаг в изучении прямой задачи рассеяния состоит в построении интегральных операторов, которые преобразуют асимптотические решения  $\varphi_0(x, \lambda)$ ,  $\chi_0(x, \lambda)$  (3.2.3) системы (3.2.2) при  $|x| \rightarrow \infty$  в ее решения для произвольных  $x$ .

Специфика спектральной задачи (3.2.2) для одноосного ферромагнетика состоит в том, что интегральные представления функций Йоста  $\varphi_{\pm}(x, t, \lambda)$  имеют более сложную форму:

$$\begin{aligned}\varphi_+(x, t, \lambda) &= R(x, t) \varphi_0(x, t) + \\ &+ \int_x^{+\infty} \left[ \Gamma_+^{(1)}(x, y, t) + w_1(\lambda) \Gamma_+^{(2)}(x, y, t) \right] \varphi_0(y, \lambda) dy; \\ \varphi_-(x, t, \lambda) &= K(x, t) \chi_0(x, t) + \\ &+ \int_{-\infty}^x \left[ \Gamma_-^{(1)}(x, y, t) + w_1(\lambda) \Gamma_-^{(2)}(x, y, t) \right] \chi_0(y, \lambda) dy\end{aligned}\quad (3.3.1)$$

по сравнению с той, что встречалась в модели изотропного ферромагнетика. Далее, где это не вызовет недоразумений, будем опускать зависимость функций от параметра  $t$ .

Поясним на примере функции  $\varphi_+$  простой алгоритм нахождения подобных интегральных представлений. Дифференциальное уравнение (3.2.2) для функции  $\varphi_+$  и асимптотическое условие (3.2.4) эквивалентны интегральному уравнению

$$\begin{aligned}\varphi_+(x, \lambda) &= \varphi_0(x, \lambda) + \\ &+ i \int_x^{+\infty} \varphi_0(x - y, \lambda) [w_1(\lambda)(S_1(y)\sigma_1 + S_2(y)\sigma_2) + \\ &+ w_3(\lambda)(S_3(y) - 1)\sigma_3] \varphi_+(y, \lambda) dy.\end{aligned}\quad (3.3.2)$$

Предполагая, что поле  $\mathbf{S}(x)$  мало отличается от своего равновесного значения  $\mathbf{S} = (0, 0, 1)$ , будем решать уравнение (3.3.2) методом последовательных приближений. Для унификации вычислений полезно ввести параметр  $\delta$  посредством замены

$$S_{1,2} \rightarrow \delta S_{1,2}, \quad S_3 \rightarrow \sqrt{1 - \delta^2(S_1^2 + S_2^2)} = 1 - \frac{\delta^2}{2}(S_1^2 + S_2^2) + \dots, \\ \varphi_+ = \varphi_0 + \delta\varphi_1 + \delta^2\varphi_2 + \dots$$

Параметр  $\delta$  служит для наглядной группировки слагаемых одного порядка малости в уравнениях (3.3.2). В конце вычислений полагают  $\delta = 1$ . Область применимости ряда по степеням  $\delta$  определяется требованием: при  $\delta = 1$  каждый последующий член разложения должен быть меньше предыдущего. При построении разложения все зависящие от параметра  $\lambda$  множители типа  $w_1^n(\lambda)$  со степенью  $n$  выше первой, благодаря связи  $w_1^2 = w_3^2 + \beta^2/4$ , могут быть сведены к коэффициентам  $1, w_3^{2k}, w_1 w_3^{2k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). После замены

$$w_3(\lambda) \varphi_0(y, \lambda) = i\sigma_3 \partial_y \varphi_0(y, \lambda)$$

с последующим интегрированием по частям множители  $w_3(\lambda)$  могут быть устранены из слагаемых, содержащих интегралы по переменной  $y$  от функции  $\varphi_0(y, \lambda)$ . В результате такие слагаемые преобразуются к виду

$$\int_x^{+\infty} [\Gamma_n^{(1)}(x, y) + w_1(\lambda) \Gamma_n^{(2)}(x, y)] \varphi_0(y, \lambda) dy,$$

где  $n = 1, 2, \dots$  — порядок теории возмущений. При этом оказывается, что в любом конечном порядке теории возмущений внеинтегральные члены записываются в форме

$$R_n(x) \varphi_0(x, \lambda),$$

где матрицы  $R_n$  не зависят от параметра  $\lambda$ .

Подобные вычисления позволяют выявить общую структуру интегральных представлений (3.3.1) для решений Йоста  $\varphi_{\pm}(x, \lambda)$ . В силу редукций (3.2.9), (3.2.10), матрицы  $R(x)$ ,  $K(x)$ ,  $\Gamma_{\pm}^{(1,2)}(x, y)$  в формулах (3.3.1) должны иметь вид

$$R = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^* \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k^* \end{pmatrix}, \\ \Gamma_{\pm}^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha_{\pm} & 0 \\ 0 & \alpha_{\pm}^* \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{\pm}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta_{\pm}^* \\ \beta_{\pm} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3.3)$$

Асимптотическое поведение (3.2.4) будет справедливо, если

$$R(x) \rightarrow I \quad \text{при} \quad x \rightarrow +\infty; \\ K(x) \rightarrow I \quad \text{при} \quad x \rightarrow -\infty.$$

Для более строгого обоснования справедливости представлений (3.3.1) подставим их в систему (3.2.2). В полученных равенствах интегралы по переменной  $y$ , содержащие функции  $\varphi_0(y, \lambda)$ ,  $\chi_0(y, \lambda)$  с коэффициентами  $w_1^2$ ,  $w_1 w_3$ ,  $w_3$ , преобразуем в соответствии с уже сформированными правилами. После чего, приравнявая к нулю коэффициенты при линейно-независимых функциях  $1$ ,  $w_1(\lambda)$ ,  $w_3(\lambda)$  в неинтегральных членах и учитывая условия полноты для функций  $\exp[iw_3(\lambda)x]$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[iw_3(\lambda)x] d\lambda &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^2} \exp[iw_3(\lambda)x] d\lambda = \frac{8\pi}{\beta} \delta(x); \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda} \exp[iw_3(\lambda)x] d\lambda &= 0; \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda} w_1(\lambda) \exp[iw_3(\lambda)x] d\lambda &= 4\pi \delta(x), \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

при рассмотрении слагаемых, содержащих интегралы от функций  $\varphi_0(y, \lambda)$ ,  $\chi_0(y, \lambda)$ , найдем дифференциальные уравнения, которые определяют величины  $R(x)$ ,  $K(x)$ ,  $\Gamma_{\pm}^{(1,2)}(x, y)$ . Из этих уравнений в результате простых вычислений находим явный вид матричных элементов  $r(x)$  и  $k(x)$ :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\frac{1+S_3(x)}{2}} \exp \left( \frac{i}{2} \int_x^{+\infty} [1-S_3(y)] \partial_y \varphi(y) dy \right); \\ k &= \sqrt{\frac{1+\varepsilon S_3(x)}{2}} \exp \left( -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^x [1-\varepsilon S_3(y)] \partial_y \varphi(y) dy \right). \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Здесь и далее

$$\varphi(x) = \arctg \frac{S_2(x)}{S_1(x)}.$$

Ядра  $\Gamma_{\pm}^{(1)}(x, y)$  интегральных операторов определяются в терминах  $\Gamma_{\pm}^{(2)}(x, y)$ . Так, для ядра  $\Gamma_{-}^{(1)}(x, y)$  имеем

$$\begin{aligned} \Gamma_{-}^{(1)}(x, y) &= \frac{i(S_1(x)\sigma_1 + S_2(x)\sigma_2)}{1 - S_3^2(x)} \times \\ &\times \left( \partial_x \Gamma_{-}^{(2)}(x, y) - \varepsilon S_3(x) \partial_y \Gamma_{-}^{(2)}(x, y) \right). \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Выражение для функции  $\Gamma_{+}^{(1)}(x, y)$  может быть получено из равенства (3.3.6) формальной заменой

$$\varepsilon = 1, \quad \Gamma_{-}^{(1,2)} \rightarrow \Gamma_{+}^{(1,2)}. \quad (3.3.7)$$

Ядро  $\Gamma_-^{(2)}(x, y)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению гиперболического типа:

$$\begin{aligned} \partial_x^2 \Gamma_-^{(2)}(x, y) - \partial_y^2 \Gamma_-^{(2)}(x, y) + \\ + \left( \frac{S_3(x) \partial_x S_3(x)}{1 - S_3^2(x)} + \partial_x \varphi(x) i \sigma_3 \right) \partial_x \Gamma_-^{(2)}(x, y) - \\ - \varepsilon \left( \frac{\partial_x S_3(x)}{1 - S_3^2(x)} + S_3(x) \partial_x \varphi(x) i \sigma_3 \right) \partial_y \Gamma_-^{(2)}(x, y) + \\ + \frac{\beta^2}{4} (1 - S_3^2(x)) \Gamma_-^{(2)}(x, y) = 0 \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

с граничным условием

$$\Gamma_-^{(2)}(x, x) = -\frac{i(S_1 \sigma_1 + S_2 \sigma_2)}{1 + \varepsilon S_3} K. \quad (3.3.9)$$

Дифференциальное уравнение на функцию  $\Gamma_+^{(2)}(x, y)$  отличается от уравнения (3.3.8) формальной заменой (3.3.7). При этом граничное условие имеет вид

$$\Gamma_+^{(2)}(x, x) = \frac{i(S_1 \sigma_1 + S_2 \sigma_2)}{1 + S_3} R. \quad (3.3.10)$$

Связь между интегральными представлениями (3.3.1) и дифференциальными уравнениями (3.3.6)–(3.3.10) взаимно однозначна. Используя теорию характеристик, дифференциальные уравнения и граничные условия к ним (3.3.6)–(3.3.10) легко заменить вольтеровскими интегральными уравнениями, которые однозначно разрешимы. Таким образом, справедливость интегральных представлений (3.3.1) может быть полностью обоснована.

Из формул (3.3.9), (3.3.10) следует, что динамика намагниченности ферромагнетика с анизотропией типа «легкая ось» будет теоретически описана, если удастся вычислить функции  $\Gamma_{\pm}^{(2)}(x, y, t)$ .

Для дальнейшего анализа потребуются асимптотики решений Йоста  $\varphi_{\pm}(x, \lambda)$  вблизи особых точек  $\lambda = 0$  и  $\lambda = \infty$  уравнений (3.2.2). Эти асимптотики можно найти непосредственно из системы (3.2.2). Однако в данном случае конечный результат проще получить с помощью замен

$$\varphi_0(y, \lambda) = \frac{i \sigma_3}{w_3(\lambda)} \partial_y \varphi_0(y, \lambda), \quad \chi_0(y, \lambda) = \frac{i \varepsilon \sigma_3}{w_3(\lambda)} \partial_y \chi_0(y, \lambda)$$

и интегрирований по частям в представлениях (3.3.1).

Асимптотическое поведение функций Йоста при  $|\lambda| \rightarrow \infty$  имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_+ &= \left[ \left( I + \frac{S_1 \sigma_1 + S_2 \sigma_2}{1 + S_3} \sigma_3 \right) R + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right] \varphi_0(x, \lambda); \\ \varphi_- &= \left[ \left( I + \frac{S_1 \sigma_1 + S_2 \sigma_2}{1 + \varepsilon S_3} \varepsilon \sigma_3 \right) K + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right] \chi_0(x, \lambda). \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Асимптотики решений Йоста при  $\lambda \rightarrow 0$  следуют из формул (3.3.11) и редукции (3.2.9):

$$\begin{aligned}\varphi_+ &= \left[ \left( I - \frac{S_1\sigma_1 + S_2\sigma_2}{1 + S_3} \sigma_3 \right) R + O(\lambda) \right] \varphi_0(x, \lambda); \\ \varphi_- &= \left[ \left( I - \frac{S_1\sigma_1 + S_2\sigma_2}{1 + \varepsilon S_3} \varepsilon \sigma_3 \right) K + O(\lambda) \right] \chi_0(x, \lambda).\end{aligned}\quad (3.3.12)$$

Так же как в модели изотропного ферромагнетика, для элементов матрицы перехода получаем представления

$$a(\lambda) = \det[\varphi_-^{(1)}(\lambda), \varphi_+^{(2)}(\lambda)], \quad b(\lambda) = \det[\varphi_+^{(1)}(\lambda), \varphi_-^{(1)}(\lambda)], \quad (3.3.13)$$

которые далее используем для исследования аналитических свойств функций  $a(\lambda)$  и  $b(\lambda)$ , а также их асимптотического поведения в окрестности особых точек  $\lambda = 0, \infty$  интегральных представлений (3.3.1).

Аналитические свойства решений Йоста и элементов матрицы перехода различны в зависимости от значения параметра  $\varepsilon = \pm 1$ .

Обсудим вначале случай  $\varepsilon = 1$ . Интегральные представления (3.3.1) показывают, что при  $\varepsilon = 1$  функции  $\varphi_-^{(1)}(x, \lambda)$ ,  $\varphi_+^{(2)}(x, \lambda)$  аналитически продолжаются с вещественной  $\lambda$ -оси в верхнюю полуплоскость комплексной переменной  $\lambda$ , а функции  $\varphi_-^{(2)}(x, \lambda)$ ,  $\varphi_+^{(1)}(x, \lambda)$  — в нижнюю полуплоскость. Согласно формулам (3.3.13) это означает, что функция  $a(\lambda)$  может быть аналитически продолжена в верхнюю полуплоскость переменной  $\lambda$ , а функция  $b(\lambda)$ , вообще говоря, не имеет каких-либо определенных свойств аналитичности.

При вещественных значениях параметра  $\lambda$  решения Йоста  $\varphi_{\pm}(x, \lambda)$  имеют осциллирующее поведение на бесконечности (см. (3.2.3), (3.2.11)). Поэтому вещественная  $\lambda$ -ось соответствует непрерывному спектру задачи (3.2.2), (3.2.4).

Нули функции  $a(\lambda)$ , лежащие в области  $\text{Im} \lambda > 0$ , совпадают с дискретным спектром задачи (3.2.2), (3.2.4), т. е. с теми значениями  $\lambda = \lambda_k$  ( $\text{Im} \lambda_k > 0$ ), для которых решения системы (3.2.2) стремятся к нулю при  $|x| \rightarrow \infty$ . В самом деле, при  $a(\lambda = \lambda_k) = \det [\varphi_-^{(1)}(x, \lambda_k), \varphi_+^{(2)}(x, \lambda_k)] = 0$  столбцы-решения становятся линейно зависимыми:

$$\varphi_-^{(1)}(x, \lambda_k) = c_k \varphi_+^{(2)}(x, \lambda_k) \quad (3.3.14)$$

и, вследствие их определения (3.2.4), экспоненциально исчезающими при  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Далее для простоты будем считать, что функция  $a(\lambda)$  не имеет нулей на вещественной оси, а ее нули в области  $\text{Im} \lambda > 0$  — простые. При сформулированных условиях общее число нулей функции  $a(\lambda)$  будет конечным.

В отличие от модели изотропного ферромагнетика, содержащаяся в данной задаче дополнительная редукция (3.2.12):  $a(\lambda) = a(-\lambda^{-1})$

приводит к тому, что нули функции  $a(\lambda)$  входят парами. Если  $\lambda = \lambda_\alpha \neq i$  — нуль функции  $a(\lambda)$ , то и  $\lambda = -\lambda_\alpha^{-1}$  также будет ее нулем ( $\text{Im}\lambda_\alpha > 0$ ). Особый случай  $\lambda = i$  исключается. Далее мы увидим, что наличие единственного простого нуля  $\lambda = i$  у функции  $a(\lambda)$  противоречит дисперсионному соотношению. Появление кратных нулей, в том числе нуля четной кратности в точке  $\lambda = i$ , в принципе, возможно. Солитонные решения уравнений Ландау–Лифшица с анизотропией типа «легкая ось», ассоциированные с кратными нулями коэффициента  $a(\lambda)$ , обсуждались в работах [3, 4]. Такие решения будут не экспоненциальными, а экспоненциально-полиномиальными. Им соответствуют слабо связанные солитонные состояния.

Таким образом, при  $\varepsilon = 1$  функция  $a(\lambda)$  имеет четное число простых нулей  $\lambda = \lambda_n$  ( $\lambda_n \neq i$ ,  $\text{Im}\lambda_n > 0$ ,  $n = 1, 2, \dots, 2N$ ), которые, когда это потребуется, будем детализовывать в соответствии с равенством

$$\{\lambda_n, n = 1, 2, \dots, 2N\} \equiv \{\lambda_\alpha, \lambda_{\alpha+N} = -\lambda_\alpha^{-1}, \alpha = 1, 2, \dots, N\}. \quad (3.3.15)$$

Коэффициент  $c_n$  в формуле (3.3.14) может зависеть только от времени. Уравнение его эволюции следует из (3.2.5), (3.3.14):

$$\partial_t c_n = -4i w_1^2(\lambda_n) c_n.$$

Отсюда находим

$$c_n(t) = c_n(t=0) \exp[-4i w_1^2(\lambda_n) t]. \quad (3.3.16)$$

Ввиду редукции (3.2.9), коэффициенты  $c_n(t)$  входят парами:

$$\{c_n(t), n = 1, 2, \dots, 2N\} \equiv \{c_\alpha(t), c_{\alpha+N}(t) = -c_\alpha(t), \alpha = 1, 2, \dots, N\}.$$

Асимптотику функции  $a(\lambda)$  при  $\lambda \rightarrow \infty$  находим с помощью формул (3.3.11), (3.3.13):

$$a(\lambda) = \exp(-i\beta_0) + O(1/|\lambda|), \quad \beta_0 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - S_3(y)) \partial_y \varphi dy. \quad (3.3.17)$$

Асимптотика коэффициента  $a(\lambda)$  при  $\lambda \rightarrow 0$  следует из редукции  $a(-\lambda^{-1}) = a(\lambda)$ :

$$a(\lambda) = \exp(-i\beta_0) + O(\lambda). \quad (3.3.18)$$

Поскольку  $|a(\lambda)|^2 + |b(\lambda)|^2 = 1$ , коэффициент  $b(\lambda)$  в точках  $\lambda = 0$  и  $\lambda = \infty$  обращается в нуль (при  $\lambda = 0$  функция  $b(\lambda)$  исчезает вместе со всеми своими производными).

Как и в изотропном ферромагнетике, аналитичность функции  $a(\lambda)$  и соотношение (3.3.17) позволяют выразить коэффициент  $a(\lambda)$  через

его нули (если таковые есть) и функцию  $b(\lambda)$ . А именно, при  $\text{Im}\lambda \geq 0$  имеет место дисперсионное соотношение

$$a(\lambda) = \exp(-i\beta_0) \prod_{\alpha=1}^N \frac{(\lambda - \lambda_\alpha)(\lambda + \lambda_\alpha^{-1})}{(\lambda - \lambda_\alpha^*)(\lambda + \lambda_\alpha^{*-1})} \times \\ \times \exp\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1 - |b(\mu)|^2)}{\mu - \lambda} d\mu\right). \quad (3.3.19)$$

Прямой проверкой легко убедиться, что дисперсионное соотношение (3.3.19) удовлетворяет асимптотическому поведению (3.3.18) при  $\lambda \rightarrow 0$  и редукции  $a(\lambda) = a(-\lambda^{-1})$ . Для этого достаточно воспользоваться равенствами

$$b(\lambda = 0) = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda} \ln(1 - |b(\lambda)|^2) d\lambda = 0.$$

Второе из них является следствием симметрии:  $|b(\lambda)|^2 = |b(-\lambda^{-1})|^2$ .

Заметим также, что, в отличие от модели изотропного ферромагнетика, в данной задаче для коэффициента  $a(\lambda)$  нет условия нормировки в точке  $\lambda = 0$  или какой-либо другой точке  $\lambda$ -плоскости. Поэтому в дисперсионном соотношении остался не определенным фазовый множитель  $\exp(-i\beta_0)$ .

Подводя предварительный итог, можно сказать, что мы перешли от поля  $\mathbf{S}(x, t)$  к новому набору переменных:

$$\mathbf{S}(x, t) \rightarrow \{\lambda_n, c_n(t), b(\lambda, t)\} \equiv \{g\}_{\varepsilon=1}. \quad (3.3.20)$$

В терминах обобщенных переменных (3.3.20) легко интегрируется модель ферромагнетика с анизотропией типа «легкая ось» при одинаковых равновесных значениях поля  $\mathbf{S}(x, t)$  на пространственной бесконечности. Дальнейшая задача состоит в том, чтобы вернуться от переменных (3.3.20) к решению  $\mathbf{S}(x, t)$  уравнений Ландау–Лифшица.

Обсудим теперь аналитические свойства функций Йоста при  $\varepsilon = -1$ . В этом случае с вещественной  $\lambda$ -оси в область  $\text{Im}\lambda < 0$  аналитически продолжают функции  $\varphi_-^{(1)}(\lambda)$ ,  $\varphi_+^{(1)}(\lambda)$ , а функции  $\varphi_-^{(2)}(\lambda)$ ,  $\varphi_+^{(2)}(\lambda)$  могут быть продолжены в область  $\text{Im}\lambda > 0$ . Поэтому при  $\varepsilon = -1$ , в отличие от задачи с  $\varepsilon = 1$ , функция  $b(\lambda)$  может быть аналитически продолжена с вещественной  $\lambda$ -оси в нижнюю полуплоскость, в то время как  $a(\lambda)$  не имеет каких-либо определенных свойств аналитичности.

Для распределений поля  $\mathbf{S}(x, t)$  с разными равновесными состояниями при  $x \rightarrow -\infty$  и  $x \rightarrow +\infty$  дискретному спектру задачи (3.2.2), (3.2.4) соответствуют нули  $\lambda = \mu_n$  ( $\text{Im}\mu_n < 0$ ) функции  $b(\lambda)$ . В точках

$\lambda = \mu_n$  столбцы-решения  $\varphi_-^{(1)}(x, \mu_n)$  и  $\varphi_+^{(1)}(x, \mu_n)$  оказываются связанными:

$$\varphi_-^{(1)}(x, t, \mu_n) = \gamma_n(t) \varphi_+^{(1)}(x, t, \mu_n).$$

Зависимость коэффициента  $\gamma_n(t)$  от времени имеет вид

$$\gamma_n(t) = \gamma_n(t=0) \exp [4i w_1^2(\mu_n) t]. \quad (3.3.21)$$

Наличие редукции  $b(\lambda) = -b(-\lambda^{-1})$  означает, что, если  $\lambda = \mu_\alpha \neq -i$  — нуль функции  $b(\lambda)$ , то  $\lambda = -\mu_\alpha^{-1}$  также будет нулем ( $\text{Im} \mu_\alpha < 0$ ). Далее для простоты считаем, что все нули коэффициента  $b(\lambda)$  — простые и среди них нет лежащих на вещественной оси. В отличие от случая с  $\varepsilon = 1$ , при  $\varepsilon = -1$  возможно существование единственного простого нуля в точке  $\lambda = -i$ . Более того, этот нуль необходим. Именно он приводит к солитонному решению типа доменной границы.

Таким образом, при  $\varepsilon = -1$  коэффициент  $b(\lambda)$  имеет нечетное число простых нулей, которые удобно упорядочить следующим образом:

$$\{\mu_n, n = 0, 1, \dots, 2N\} \equiv \{\mu_0 = -i, \mu_\alpha, \mu_{\alpha+N} = -\mu_\alpha^{-1}, \alpha = 1, 2, \dots, N\},$$

где  $\mu_\alpha \neq -i$ .

Благодаря наличию редукции (3.2.9), соответствующие этим нулям коэффициенты  $\gamma_n(t)$  оказываются связанными:

$$\begin{aligned} \{\gamma_n(t), n = 0, 1, 2, \dots, N\} \equiv \\ \equiv \{\gamma_0(t), \gamma_\alpha(t), \gamma_{\alpha+N}(t) = \gamma_\alpha(t), \alpha = 1, 2, \dots, N\}. \end{aligned}$$

Функция  $b(\lambda)$  имеет асимптотики:

$$b(\lambda) = -\exp(i\alpha_0) + O(1/|\alpha|) \quad \text{при} \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (3.3.22)$$

и

$$b(\lambda) = \exp(i\alpha_0) + O(\lambda) \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow 0,$$

где

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}[\varphi(x=\infty) + \varphi(x=-\infty)] - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} S_3(y) \partial_y \varphi(y) dy.$$

В точках  $\lambda = 0$  и  $\lambda = \infty$  коэффициент  $a(\lambda)$  обращается в нуль (в точке  $\lambda = 0$  функция  $a(\lambda)$  равна нулю вместе со всеми своими производными).



Коэффициент  $b(\lambda)$  может быть выражен через  $a(\lambda)$  и нули  $\mu_n$  ( $\text{Im}\mu_n < 0$ ). Соответствующее дисперсионное соотношение имеет вид

$$b(\lambda) = -\exp(i\alpha_0) \left( \frac{\lambda+i}{\lambda-i} \right) \prod_{\alpha=1}^N \frac{(\lambda-\mu_\alpha)(\lambda+\mu_\alpha^{-1})}{(\lambda-\mu_\alpha^*)(\lambda+\mu_\alpha^{*-1})} \times \\ \times \exp \left( -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1-|a(\mu)|^2)}{\mu-\lambda} d\mu \right), \quad \text{Im}\lambda \leq 0.$$

Итак, мы описали отображение

$$\mathbf{S}(x, t) \rightarrow \{\mu_n, \gamma_n(t), a(\lambda, t)\} \equiv \{g\}_{\varepsilon=-1}, \quad (3.3.23)$$

задающее переход от поля  $\mathbf{S}(x, t)$  к новым динамическим переменным  $\{g\}_{\varepsilon=-1}$ , в которых может быть проинтегрирована модель ферромагнетика с анизотропией типа «легкая ось» и разными равновесными значениями намагниченности при  $x \rightarrow +\infty$  и  $x \rightarrow -\infty$ .

В следующих разделах мы покажем, что отображения (3.3.20), (3.3.23) являются обратимыми.

### 3.4. Обратная задача рассеяния в случае начальных распределений намагниченности с асимптотикой $\mathbf{S} \rightarrow (0, 0, 1)$ при $|x| \rightarrow \infty$ . Прецессирующие солитоны

*Нужно обращать острие ума на самые незначительные и простые вещи и долго останавливаться на них, пока не привыкнем отчетливо и ясно прозревать в них истину.*

*Р. Декарт*

Получим уравнения типа Гельфанда–Левитана–Марченко, которые позволят восстановить поле  $\mathbf{S}(x, t)$  по данным рассеяния  $\{g\}_{\varepsilon=1}$  (3.3.20). Приведем вывод уравнений Гельфанда–Левитана–Марченко только для «правого конца», предположив, что уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко для «левого конца» дают эквивалентные результаты. Тогда нам потребуется лишь первый столбец матричного равенства (3.2.11):

$$\varphi_-^{(1)} = a \varphi_+^{(1)} + b \varphi_+^{(2)}, \quad (3.4.1)$$

а также интегральные представления для столбцов-решений  $\varphi_+^{(1)}(x, \lambda)$  и  $\varphi_+^{(2)}(x, \lambda)$ :

$$\begin{aligned} \varphi_+^{(1)} = r(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp \left[ \frac{1}{i} w_3(\lambda) x \right] + \\ + \int_x^{+\infty} \begin{pmatrix} \alpha_+(x, y) \\ w_1(\lambda) \beta_+(x, y) \end{pmatrix} \exp \left[ \frac{1}{i} w_3(\lambda) y \right] dy; \quad (3.4.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_+^{(2)} = r^*(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp \left[ -\frac{1}{i} w_3(\lambda) x \right] + \\ + \int_x^{+\infty} dy \begin{pmatrix} -w_1(\lambda) \beta_+^*(x, y) \\ \alpha_+^*(x, y) \end{pmatrix} \exp \left[ -\frac{1}{i} w_3(\lambda) y \right] dy. \quad (3.4.3) \end{aligned}$$

Для построения одного из уравнений обратной задачи рассеяния умножим первую компоненту векторного равенства (3.4.1) на функцию

$$a^{-1}(\lambda) \exp \left[ -\frac{1}{i} w_3(\lambda) z \right] \quad (z > x)$$

и перепишем полученный результат в виде

$$\begin{aligned} \exp \left[ -\frac{1}{i} w_3(\lambda) (z - x) \right] \left( \frac{(\varphi_-^{(1)}(x, \lambda))_1}{a(\lambda)} \exp \left[ -\frac{1}{i} w_3(\lambda) x \right] - r(x) \right) = \\ = \int_x^{+\infty} \alpha_+(x, y) \exp \left[ \frac{1}{i} w_3(\lambda) (y - z) \right] dy - \\ - \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} w_1(\lambda) \int_x^{+\infty} \beta_+^*(x, y) \exp \left[ -\frac{1}{i} w_3(\lambda) (y + z) \right] dy. \quad (3.4.4) \end{aligned}$$

Левая часть формулы (3.4.4) является аналитической функцией в области  $\text{Im} \lambda \geq 0$  всюду, за исключением простых полюсов в точках  $\lambda = \lambda_n$  ( $\text{Im} \lambda_n > 0$ ,  $n = 1, 2, \dots, 2N$ ). В силу соотношений (3.3.14), (3.4.3), имеем

$$\begin{aligned} \text{res}_{\lambda=\lambda_n} \frac{1}{a(\lambda)} [\varphi_-^{(1)}(x, \lambda)]_1 \exp \left[ -\frac{1}{i} w_3(\lambda) z \right] = \\ = \frac{c_n}{a'(\lambda_n)} [\varphi_+^{(2)}(x, \lambda_n)]_1 \exp \left[ -\frac{1}{i} w_3(\lambda_n) z \right] = \\ = -\frac{c_n w_1(\lambda_n)}{a'(\lambda_n)} \int_x^{+\infty} \beta_+^*(x, y) \exp \left[ -\frac{1}{i} w_3(\lambda_n) (y + z) \right] dy, \quad (3.4.5) \end{aligned}$$

где  $a'(\lambda_n) = \partial_\lambda a(\lambda)|_{\lambda=\lambda_n}$ .

Используя асимптотики функций  $[\varphi_-^{(1)}(x, \lambda)]_1$  (3.3.11) и  $a(\lambda)$  (3.3.17), нетрудно проверить, что

$$\frac{[\varphi_-^{(1)}(x, \lambda)]_1}{a(\lambda)} \exp \left[ -\frac{1}{i} w_3(\lambda) x \right] - r(x) = O \left( \frac{1}{|\lambda|} \right) \quad (3.4.6)$$

при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ .

Проинтегрируем равенство (3.4.4) по параметру  $\lambda$  вдоль вещественной оси. Интеграл от левой части равенства сходится при  $|\lambda| \rightarrow \infty$  (см. (3.4.6)) и может быть вычислен с помощью леммы Жордана и формулы (3.4.5). При интегрировании правой части учитываем соотношение полноты для функций  $\exp[iw_3(\lambda)x]$  (3.3.4):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ \frac{1}{i} w_3(\lambda)(y - z) \right] d\lambda = \frac{8\pi}{\beta} \delta(y - z).$$

В результате получаем одно из интегральных уравнений обратной задачи рассеяния:

$$\alpha_+(x, z, t) - \int_x^{+\infty} \beta_+^*(x, y, t) f_1(y + z, t) dy = 0, \quad (3.4.7)$$

где

$$f_1(y, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b(\lambda, t)}{a(\lambda)} w_1^2(\lambda) \exp[iw_3(\lambda)y] d\lambda - \\ - i \sum_{\alpha=1}^N \frac{c_\alpha(t)}{a'(\lambda_\alpha) \lambda_\alpha} w_1^2(\lambda_\alpha) \exp[iw_3(\lambda_\alpha)y]. \quad (3.4.8)$$

Выражение для  $f_1(y, t)$  (3.4.8) упрощено с использованием равенств

$$\frac{c_\alpha}{a'(\lambda_\alpha) \lambda_\alpha} = \frac{c_{\alpha+N}}{a'(\lambda_{\alpha+N}) \lambda_{\alpha+N}}, \\ w_1(\lambda_{\alpha+N}) = -w_1(\lambda_\alpha), \quad w_3(\lambda_{\alpha+N}) = w_3(\lambda_\alpha)$$

и свойств симметрии (3.2.12) коэффициентов  $a(\lambda)$  и  $b(\lambda)$ .

Процедура построения другого интегрального уравнения обратной задачи рассеяния несколько отличается от уже рассмотренной и состоит в следующем. Вторую компоненту векторного равенства (3.4.1) умножаем на функцию

$$\frac{1}{\lambda a(\lambda)} \exp \left[ -\frac{1}{i} w_3(\lambda) z \right] \quad (z > x)$$

и полученный результат преобразуем к виду ( $S_+ = S_1 + iS_2$ )

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda} \exp \left[ -\frac{1}{i} w_3(\lambda)(z-x) \right] \times \\ & \times \left( \frac{(\varphi_-^{(1)}(x, \lambda))_2}{a(\lambda)} \exp \left[ -\frac{1}{i} w_3(\lambda)x \right] - \frac{S_+(x)r(x)}{(1+S_3(x))} \frac{w_1(\lambda)}{w_3(\lambda)} \right) = \\ & = -\frac{S_+(x)r(x)}{(1+S_3(x))} \frac{w_1(\lambda)}{\lambda w_3(\lambda)} \exp \left[ -\frac{1}{i} w_3(\lambda)(z-x) \right] + \\ & + \frac{w_1(\lambda)}{\lambda} \int_x^{+\infty} \beta_+(x, y) \exp \left[ -\frac{1}{i} w_3(\lambda)(z-y) \right] dy + \\ & + \frac{b(\lambda)}{\lambda a(\lambda)} \left( r^*(x) \exp \left[ -\frac{1}{i} w_3(\lambda)(x+z) \right] + \right. \\ & \left. + \int_x^{+\infty} \alpha_+^*(x, y) \exp \left[ -\frac{1}{i} w_3(\lambda)(y+z) \right] dy \right). \quad (3.4.9) \end{aligned}$$

Отметим, что в левую и правую части равенства мы ввели одинаковое слагаемое

$$-\frac{S_+r}{(1+S_3)} \frac{w_1(\lambda)}{\lambda w_3(\lambda)} \exp \left[ -\frac{1}{i} w_3(\lambda)(z-x) \right], \quad (3.4.10)$$

которое, на первый взгляд, ухудшает равенство, так как приводит к появлению дополнительных особенностей в точках  $\lambda = 0, \pm 1$ . Цель операции состоит в регуляризации расходящихся интегралов и полностью прояснится в ходе дальнейших вычислений.

Проинтегрируем соотношение (3.4.9) по переменной  $\lambda$  вдоль вещественной оси. Из-за особенностей в точках  $\lambda = 0, \pm 1$  интегралы следует понимать в смысле главного значения Коши.

Левая часть равенства (3.4.9) является аналитической функцией в области  $\text{Im} \lambda \geq 0$ , за исключением простых полюсов в точках  $\lambda = \lambda_n$  ( $\text{Im} \lambda_n > 0$ ,  $n = 1, 2, \dots, 2N$ ) и  $\lambda = \pm 1$ . В точке  $\lambda = 0$  она является регулярной, поскольку

$$\left( \frac{(\varphi_-^{(1)}(x, \lambda))_2}{a(\lambda)} \exp \left[ -\frac{1}{i} w_3(\lambda)x \right] - \frac{S_+(x)r(x)}{(1+S_3(x))} \frac{w_1(\lambda)}{w_3(\lambda)} \right) \Big|_{\lambda=0} = 0.$$

Это следствие формул (3.3.12), (3.3.18). Кроме того, учитывая асимптотики (3.3.11) и (3.3.17), нетрудно показать, что

$$\frac{(\varphi_-^{(1)}(\lambda))_2}{a(\lambda)} \exp \left[ -\frac{1}{i} w_3(\lambda)x \right] - \frac{S_+r}{(1+S_3)} \frac{w_1(\lambda)}{w_3(\lambda)} = O \left( \frac{1}{|\lambda|} \right)$$

при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ .

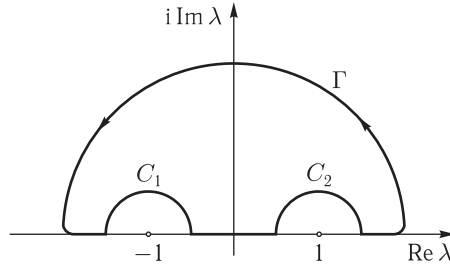


Рис. 3.1. Выбор контура интегрирования

Поэтому интеграл от левой части равенства (3.4.9) хорошо определен. Представим его в виде интеграла по контуру  $\Gamma$ , изображенному на рис. 3.1, минус интегралы по малым полуокружностям  $C_1$  и  $C_2$ , обходящим в верхней полуплоскости комплексной переменной полюсы в точках  $\lambda = -1$  и  $\lambda = 1$ . Интеграл по контуру  $\Gamma$  может быть вычислен с помощью леммы Жордана, а интегралы по полуокружностям вычисляются непосредственно. В результате имеем

$$\begin{aligned} \text{V. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda} \exp \left[ -\frac{1}{i} w_3(\lambda)(z-x) \right] \times \\ \times \left( \frac{(\varphi_-^{(1)}(x, \lambda))_2}{a(\lambda)} \exp \left[ -\frac{1}{i} w_3(\lambda)x \right] - \frac{S_+(x)r(x)}{(1+S_3(x))} \frac{w_1(\lambda)}{w_3(\lambda)} \right) d\lambda = \\ = 2\pi i \left( \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{\lambda_n} \frac{(\varphi_-^{(1)}(x, \lambda_n))_2}{a'(\lambda_n)} \exp \left[ -\frac{1}{i} w_3(\lambda_n)z \right] - \frac{S_+(x)r(x)}{1+S_3(x)} \right). \quad (3.4.11) \end{aligned}$$

Далее, как и ранее, преобразуем формулу (3.4.11), используя связь  $(\varphi_-^{(1)}(x, \lambda_n))_2 = c_n(\varphi_+^{(2)}(x, \lambda))_2$  (3.3.14) и интегральное представление (3.4.3).

При интегрировании по  $\lambda$  правой части равенства (3.4.9) учитываем соотношение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda} w_1(x) \exp[iw_3(\lambda)x] d\lambda = 4\pi\delta(x).$$

Интересно, что интеграл от добавленной функции (3.4.10) при  $z > x$  дает выражение

$$-\text{V. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda} \frac{w_1(\lambda)}{w_3(\lambda)} \exp[iw_3(\lambda)(z-x)] \frac{S_+(x)r(x)}{(1+S_3(x))} d\lambda = -2\pi i \frac{S_+(x)r(x)}{1+S_3(x)},$$

которое полностью компенсирует вклад последнего слагаемого в формуле (3.4.11).

В результате простых преобразований получаем еще одно из уравнений обратной задачи рассеяния:

$$\beta_+(x, z, t) + r^*(x, t)f_2^*(x + z, t) + \int_x^{+\infty} \alpha_+^*(x, y, t)f_2^*(y + z, t) dy = 0, \quad (3.4.12)$$

где

$$f_2^*(y, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b(\lambda, t)}{\lambda a(\lambda)} \exp[iw_3(\lambda)y] d\lambda - i \sum_{\alpha=1}^N \frac{c_\alpha(t)}{\lambda_\alpha a'(\lambda_\alpha)} \exp[iw_3(\lambda_\alpha)y]. \quad (3.4.13)$$

Равенства (3.4.7), (3.4.12) и комплексно сопряженные к ним образуют замкнутую систему интегральных уравнений для расчета функций  $\alpha_+(x, y, t)$  и  $\beta_+(x, y, t)$ . Учитывая формулы (3.3.3), запишем эту систему в виде матричных уравнений для расчета  $\Gamma_+^{(1,2)}$ :

$$\begin{aligned} R(x, t) F_2(x + z, t) + \Gamma_+^{(2)}(x, z, t) i\sigma_2 + \\ + \int_x^{+\infty} \Gamma_+^{(1)}(x, y, t) F_2(y + z, t) dy = 0, \\ \Gamma_+^{(1)}(x, z, t) + \int_x^{+\infty} \Gamma_+^{(2)}(x, y, t) F_1(y + z, t) dy = 0. \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

Здесь

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & -f_1^* \\ f_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} f_2 & 0 \\ 0 & f_2^* \end{pmatrix}.$$

Схема интегрирования уравнений Ландау–Лифшица для ферромагнетика с анизотропией типа «легкая ось» и одинаковыми равновесными значениями намагнитченности при  $x \rightarrow \pm\infty$  состоит в следующем.

1. Решив систему (3.2.2), по заданному начальному распределению параметра порядка  $\mathbf{S}(x, t=0)$  находим набор данных рассеяния при  $t=0$ :

$$\{g(t=0)\}_{\varepsilon=1} \equiv \{\lambda_n, c_n(t=0), b(\lambda, t=0)\}.$$

2. С помощью формул (3.2.14), (3.3.16) находим эволюцию данных рассеяния. Тогда функции  $f_1(y, t)$  и  $f_2(y, t)$  определяются формулами (3.4.8), (3.4.13).
3. Решаем линейные интегральные уравнения типа Гельфанда–Левитана–Марченко (3.4.14).
4. Применяя формулу (3.3.10), получаем решение  $\mathbf{S}(x, t)$  уравнений Ландау–Лифшица в произвольный момент времени  $t > 0$ :

$$\frac{S_+(x, t)}{1 + S_3(x, t)} = \frac{\beta_+(x, x, t)}{ir(x, t)}. \quad (3.4.15)$$

Отметим важную особенность соотношения (3.4.15). Согласно уравнениям (3.4.7), (3.4.12), функция  $\beta_+(x, x, t)$  пропорциональна величине  $r^*(x, t)$ . Поэтому правая часть расчетной формулы (3.4.15) включает фазовый множитель  $r^*(x, t)/r(x, t)$ , который зависит от поля  $\mathbf{S}(x, t)$  (см. (3.3.5)). Изложенная схема интегрирования, в отличие от аналогичной схемы для изотропного ферромагнетика, содержит новый момент: для нахождения поля  $\mathbf{S}(x, t)$  при  $t > 0$  необходимо не только выполнить алгебраические вычисления, но и осуществить одно дополнительное интегрирование. На конкретном примере покажем, что указанное препятствие не вызывает больших затруднений.

Простейший класс точных решений модели ферромагнетика с анизотропией типа «легкая ось» получится, когда  $b(\lambda) = 0$ , а функция  $a(\lambda)$  имеет  $2N$  простых нулей (3.3.15) ( $N$ -солитонное решение). Для  $N$ -солитонного состояния интегральные уравнения (3.4.14) имеют вырожденные ядра  $F_1$ ,  $F_2$  и решаются явно. Как и в случае изотропного ферромагнетика,  $N$ -солитонное решение уравнений «легкоосного» ферромагнетика описывает упругие парные столкновения  $N$  частицеподобных нелинейных волн намагниченности. Поскольку солитоны сохраняют свою индивидуальность при взаимодействиях, достаточно проанализировать внутреннюю структуру односолитонного возбуждения.

Для односолитонного состояния функции  $f_1(y, t)$  и  $f_2^*(y, t)$  суть:

$$\begin{aligned} f_1(y, t) &= -i w_1^2(\lambda_1) \gamma(t) \exp[iw_3(\lambda_1)y], \\ f_2^*(y, t) &= -i \gamma(t) \exp[iw_3(\lambda_1)y], \end{aligned}$$

где

$$\gamma(t) = \gamma_0 \exp[-4i w_1^2(\lambda_1) t], \quad \gamma_0 = \frac{c_1(t=0)}{\lambda_1 a'(\lambda_1)} = \text{const.}$$

Решение уравнений обратной задачи рассеяния (3.4.14) будем искать в виде

$$\alpha_+(x, z, t) = \alpha(x, t) \exp[iw_3(\lambda_1)z], \quad \beta_+(x, z, t) = \beta(x, t) \exp[iw_3(\lambda_1)z].$$

В результате простых вычислений находим

$$\beta(x, t) = \frac{i r^*(x, t) \gamma(t) \exp[iw_3(\lambda_1)x]}{1 - \left[ \frac{|\gamma(t)| w_1^*(\lambda_1)}{w_3(\lambda_1) - w_3^*(\lambda_1)} \right]^2 \exp[2ix(w_3(\lambda_1) - w_3^*(\lambda_1))]} \quad (3.4.16)$$

Дальнейший анализ упрощает параметризация:

$$\mathbf{S} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta). \quad (3.4.17)$$

Из (3.4.15)–(3.4.17) имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \exp(i\varphi) &= \frac{r^*}{r} \gamma \exp[2i w_3 x] \times \\ &\times \left( 1 - \frac{|\gamma|^2 w_1^{*2}}{(w_3 - w_3^*)^2} \exp[2i(w_3 - w_3^*)x] \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

Здесь и далее  $w_{1,3} = w_{1,3}(\lambda_1)$ . Отсюда в явном виде определяем  $\theta(x, t)$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{|w_3 - w_3^*|^2}{4|w_1|^2 \operatorname{ch}^2 \eta - |w_1 - w_1^*|^2}, \\ \eta &= i(w_3 - w_3^*)[x - 2(w_3 + w_3^*)t] + \ln \left| \frac{\gamma_0 w_1}{w_3 - w_3^*} \right| \end{aligned} \quad (3.4.19)$$

и, следовательно, компоненту  $S_3(x, t)$  вектора  $\mathbf{S}(x, t)$ :

$$S_3 = 1 - \frac{|w_3 - w_3^*|^2}{2|w_1|^2} \left( \operatorname{ch}^2 \eta + \frac{|w_3 - w_3^*|^2 - |w_1 - w_1^*|^2}{4|w_1|^2} \right)^{-1}. \quad (3.4.20)$$

Приравнявая фазы левой и правой частей равенства (3.4.18), получим уравнения для расчета  $\varphi(x, y)$ :

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) + \int_x^{+\infty} (1 - S_3(y, t)) \partial_y \varphi(y, t) dy &= (w_3 + w_3^*)x - \\ &- 2(w_1^2 + w_1^{*2})t + \delta - \operatorname{arctg} \left( \frac{i(w_1^2 - w_1^{*2}) \exp 2\eta}{2|w_1|^2 + (w_1^2 + w_1^{*2}) \exp 2\eta} \right), \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

где  $\delta = \arg \gamma_0$ . Дифференцирование по  $x$  формулы (3.4.21) дает явное выражение для  $\partial_x \varphi$ , после интегрирования которого находим

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{w_3 + w_3^*}{i(w_3 - w_3^*)} \eta + \operatorname{arctg} \left[ \frac{i(w_1 - w_1^*)}{w_1 + w_1^*} \operatorname{th} \eta \right] + \\ &+ (4|w_3|^2 - \beta^2)t + \text{const}. \end{aligned} \quad (3.4.22)$$

Односолитонное решение (3.4.19), (3.4.22) описывает уединенную волну намагниченности, которая движется как целое со скоростью

$$v = 2(w_3 + w_3^*). \quad (3.4.23)$$

В системе координат, связанной с солитоном, вектор намагниченности среды прецессирует с постоянной частотой

$$\omega' = 4|w_3|^2 - \beta^2 \quad (3.4.24)$$



вокруг оси  $Ox_3$ . Протяженность области резкого изменения намагниченности  $l_0$  имеет следующий порядок величины

$$l_0 \sim \frac{1}{|w_3 - w_3^*|}. \quad (3.4.25)$$

Значение проекции  $S_3$  в «центре тяжести» солитона

$$A = \frac{(w_1 + w_1^*)^2 + (w_3 - w_3^*)^2}{(w_1 + w_1^*)^2 - (w_3 - w_3^*)^2}. \quad (3.4.26)$$

Рассмотрим предельный переход

$$\beta \rightarrow 0, \quad |\lambda_1| \rightarrow \infty, \quad \beta|\lambda_1| = \text{const}. \quad (3.4.27)$$

В этом пределе  $w_1 \cong w_3 = (\nu + iu)/4$ , где  $u, \nu$  — вещественные параметры ( $u > 0$ ). В результате при  $\beta \rightarrow 0$  решение (3.4.20), (3.4.22) сведется к найденному ранее прецессирующему солитону (2.10.9) модели изотропного ферромагнетика.

Для анализа особенностей нового решения при конечных значениях постоянной анизотропии  $\beta$ , полезно перейти от комплексного параметра  $\lambda_1$  к двум вещественным:  $\lambda_1 = \exp(\rho + i\sigma)$ , где  $-\infty < \rho < \infty$ ,  $0 < \sigma < \pi$ .

Выразим физические характеристики (3.4.23)–(3.4.26) солитона в терминах параметров  $\rho$  и  $\sigma$ :

$$\begin{aligned} v &= \beta \operatorname{sh} \rho \cos \sigma, \quad \omega' = \beta^2 (\operatorname{sh}^2 \rho - \cos^2 \sigma), \\ l_0 &\sim (\beta \operatorname{ch} \rho \sin \sigma)^{-1}, \quad A = \cos 2\sigma. \end{aligned} \quad (3.4.28)$$

Перепишем очевидное неравенство

$$\operatorname{ch}^2 \rho \sin^2 \sigma > 0 \quad (3.4.29)$$

в терминах скорости солитона и частоты прецессии

$$1 + \frac{\omega'}{\beta^2} - \frac{v^2}{\beta^2} > 0. \quad (3.4.30)$$

Напомним, что в изотропном ферромагнетике, при таких же равновесных значениях параметра порядка  $\mathbf{S}(x, t)$  на бесконечности, частота прецессии  $\omega'$  всегда была положительной. В ферромагнетике с анизотропией типа «легкая ось»  $\omega'$  может обращаться в нуль, быть как положительной, так и отрицательной.

При частоте  $\omega' = 0$  ( $\operatorname{sh}^2 \rho = \cos^2 \sigma$ ) скорость движения магнитного солитона лежит в конечных пределах:

$$0 < v^2 < \beta^2.$$

Отрицательные значения частоты  $\omega'$  также ограничены:

$$-\beta^2 < \omega' < 0.$$

Неограниченно большие положительные значения частоты  $\omega'$  возможны только при условии  $|\operatorname{sh} \rho| \gg 1$  и, следовательно, при  $\operatorname{ch} \rho \gg 1$  (см. (3.4.28)). Однако при больших значениях  $\operatorname{ch} \rho$  ширина  $l_0$  области резкого изменения намагниченности становится малой, поэтому может нарушиться условие применимости длинноволнового приближения. Значения величины  $\operatorname{ch} \rho$  и частота  $\omega' > 0$  должны быть ограничены сверху условием

$$l_0 \sim \sqrt{\alpha} [\beta \operatorname{ch} \rho \sin \sigma]^{-1} \gg a, \quad (3.4.31)$$

где  $a$  — постоянная кристаллической решетки. В формуле (3.4.31) мы вернулись к размерным переменным.

Вблизи границ области существования солитона (3.4.29), (3.4.30) параметр  $\sigma \approx 0, \pi$ . При  $\sigma \rightarrow 0$  ( $\sigma \rightarrow \pi$ ) отклонения поля  $\mathbf{S}(x, t)$  от равновесного значения  $\mathbf{S} \approx (0, 0, 1)$  уменьшаются, а протяженность солитона увеличивается. Магнитный солитон (3.4.19), (3.4.22) становится похожим на спиновую волну линейной теории с волновым числом  $k = \beta \operatorname{sh} \rho$  и законом дисперсии  $\omega = \beta^2 + k^2$  (в лабораторной системе координат). Например, при  $\sigma \approx 0$  решение  $\mathbf{S}(x, t)$  можно приближенно переписать в виде (см. рис. 3.2):

$$S_3 = 1 + O(\sigma^2), \quad S_1 + iS_2 \approx \frac{2\sigma \exp(i\beta x \operatorname{sh} \rho - i\beta^2 t \operatorname{ch}^2 \rho)}{\operatorname{ch}[\beta \sigma \operatorname{ch} \rho (x - \beta t \operatorname{sh} \rho)]}.$$

В пределе  $\sigma \rightarrow 0$  протяженность солитона  $(\beta \sigma \operatorname{ch} \rho)^{-1} \rightarrow \infty$ .

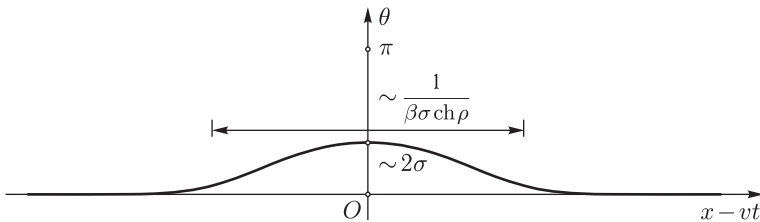


Рис. 3.2. Малоамплитудный солитон. При  $\sigma \ll 1$  прецессирующий солитон движется со скоростью  $v = \beta \operatorname{sh} \rho$  и напоминает «обрезанную» спиновую волну линейной теории с азимутальным углом  $\theta \ll 1$ , волновым числом  $k = \beta \operatorname{sh} \rho$  и частотой  $\omega = \beta^2 \operatorname{ch}^2 \rho = \beta^2 + k^2$

Неподвижные солитоны [5] теоретически описываются более простыми аналитическими выражениями, чем движущиеся солитоны. Различный функциональный вид решения (3.4.19), (3.4.22) для неподвижных и движущихся солитонов является следствием отсутствия галилеевской инвариантности исходных динамических уравнений (3.2.7).

Согласно формуле (3.4.28) существуют два типа неподвижных солитонов: один из них возможен при  $\rho = 0$ ,  $\sigma \neq 0$ , а другой — при  $\rho \neq 0$ ,  $\sigma = \pi/2$ .

Когда  $\rho = 0$ , решение (3.4.19), (3.4.22) приобретает вид:

$$S_3 = 1 - \frac{2 \operatorname{tg}^2 \sigma}{\operatorname{ch}^2 \eta + \operatorname{tg}^2 \sigma}, \quad S_1 + iS_2 = \frac{2 \operatorname{tg} \sigma \operatorname{ch} \eta}{\operatorname{ch}^2 \eta + \operatorname{tg}^2 \sigma} \exp i\varphi; \quad (3.4.32)$$

$$\eta = \beta x \sin \sigma, \quad \varphi = -\beta^2 t \cos^2 \sigma.$$

Частота внутренней прецессии солитона (3.4.32) всегда отрицательна:  $\omega = -\beta^2 \cos^2 \sigma$ . При малых частотах прецессии ( $\sigma \approx \pi/2$ ) солитон представляет собой широкую область практически перемангниченного материала, где  $S_3 \approx \cos 2\sigma \approx -1$ , отделенную от остальной части ферромагнетика двумя областями шириной  $l_0$ , в которых намагниченность среды резко изменяется от одного равновесного значения  $S_3 \cong -1$  до другого  $S_3 = 1$ . В размерных переменных ширина области резкого изменения намагниченности,

$$l_0 \sim \frac{\sqrt{\alpha}}{\beta},$$

совпадает с толщиной доменной стенки в «легкоосном» ферромагнетике (см. следующий раздел). Границы перемангниченной области определяются теми значениями  $x$ , при которых проекция  $S_3$  обращается в нуль. В размерных переменных протяженность  $\Delta$  перемангниченной области много больше магнитной длины  $l_0$ :

$$\Delta \sim \frac{\sqrt{\alpha}}{\beta \sin \sigma} \ln(4 \operatorname{tg}^2 \sigma) \gg l_0$$

при  $\sigma \approx \pi/2$ .

Таким образом, при конечных значениях параметра  $\beta$  и при  $\sigma \approx \pi/2$  неподвижный солитон (3.4.32) можно трактовать как связанное состояние двух доменных стенок с противоположными хиральностями [5] — «зародыш перемангничивания» среды.

В области локализации солитона (3.4.32) тенденция к перемангничиванию среды сопровождается прецессией вектора  $\mathbf{S}$ . При этом вращение вектора  $\mathbf{S}$  во всех точках области локализации солитона происходит синхронно (см. рис. 3.3).

Распределение поля  $\mathbf{S}(x, t)$  для другого неподвижного солитона ( $\rho \neq 0$ ,  $\sigma = \pi/2$ ) имеет вид:

$$S_3 = 1 - \frac{2 \operatorname{cth}^2 \rho}{\operatorname{ch}^2 \eta + \operatorname{sh}^{-2} \rho}, \quad S_1 + iS_2 = \frac{2 \operatorname{cth} \rho \operatorname{sh} \eta \exp i\varphi}{\operatorname{ch}^2 \eta + \operatorname{sh}^{-2} \rho}; \quad (3.4.33)$$

$$\eta = \beta x \operatorname{ch} \rho, \quad \varphi = \beta^2 t \operatorname{sh}^2 \rho.$$

Частота прецессии солитона (3.4.33) всегда положительна:  $\omega = \beta^2 \operatorname{sh}^2 \rho$ . При малых частотах (при  $\rho \approx 0$ ) «форма» нового солитона

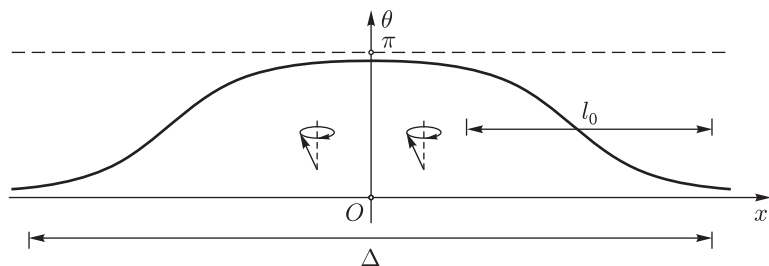


Рис. 3.3. Изменение азимутального угла  $\theta$  для неподвижного солитона (3.4.32). Схематически изображена прецессия вектора  $\mathbf{S}$  в перемагниченной области

(3.4.33) мало отличается от таковой для прежнего солитона (3.4.32). Основная отличительная черта нового солитона состоит в том, что, хотя вектор  $\mathbf{S}$  в области локализации солитона вращается синфазно вокруг оси  $Ox_3$ , фазы вращения в левой и правой «половинках солитона» (в областях  $x > 0$  и при  $x < 0$ ) различаются на  $\pi$  (см. рис. 3.4).

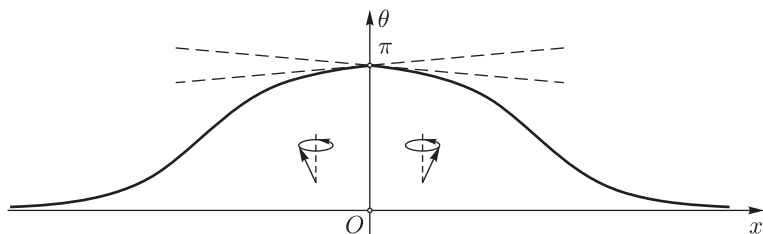


Рис. 3.4. Изменение азимутального угла  $\theta$  и характер прецессии вектора  $\mathbf{S}$  для неподвижного солитона (3.4.33)

В общем случае движущегося солитона в системе отсчета, связанной с солитоном, частота прецессии вектора  $\mathbf{S}$  вокруг оси  $Ox_3$  остается неизменной, но в пределах области перемагниченного материала начальная фаза прецессии будет пространственно неоднородной, представляя собой сумму линейной функции и функции типа перегиба от переменной  $\eta$  (см. (3.4.22)). Хотя при  $\sigma \approx \pi/2$  движущийся солитон напоминает уединенный домен с прецессией намагниченности внутри домена, при изменении параметра  $\sigma$  его отличие от уединенного домена увеличивается. Значение проекции в центре солитона, равное  $\cos 2\sigma$ , при  $0 < \sigma < \pi$  может сильно отличаться от равновесного значения  $S_3 \cong -1$ .

Подводя итог, можно сказать, что рассмотренный ранее прецессирующий солитон изотропного ферромагнетика не имел такой ярко выраженной локализации разворотов намагниченности при переходе от равновесных значений намагниченности на пространственной бесконечности к внутренней прецессии солитона, не содержал протяженной перемагниченной области с малоизменяющейся проекцией

$M_3 = -M_0 S_3$  намагниченности, как это наблюдается у солитона в «легкоосном» ферромагнетике.

Указанное различие солитонов может быть устранено непрерывной деформацией поля  $\mathbf{S}(x, t)$ , что и происходит в пределе (3.4.27).

### 3.5. Обратная задача рассеяния в случае начальных распределений намагниченности с асимптотическим поведением $S \rightarrow (0, 0, \pm 1)$ при $x \rightarrow \pm\infty$ . Доменные стенки

*Каждая решенная мною задача становилась образцом, который служил впоследствии для решения других задач.*

*Р. Декарт*

Схема построения обратного отображения данных рассеяния  $\{g\}_{\varepsilon=-1}$  (3.3.23) в решение  $\mathbf{S}(x, t)$  модели «легкоосного» ферромагнетика с разными равновесными значениями намагниченности на бесконечности во многом аналогична процедуре, изложенной в предыдущем разделе. Отличия связаны с иными аналитическими свойствами функций  $\varphi_-^{(1)}(\lambda)$ ,  $\varphi_+^{(1,2)}(\lambda)$ ,  $a(\lambda)$ ,  $b(\lambda)$  в равенстве (3.4.1). Перечислим ключевые моменты.

Для построения уравнений типа Гельфанда–Левитана–Марченко поступаем следующим образом. Первую компоненту векторного равенства (3.4.1) умножим на функцию  $\frac{1}{\lambda b(\lambda)} \exp \left[ \frac{1}{i} w_3(\lambda) z \right]$  ( $z > x$ ) и перепишем полученный результат в виде ( $S_- = S_1 - iS_2$ ):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda} \exp \left[ \frac{1}{i} w_3(\lambda)(z - x) \right] \times \\ & \times \left( \frac{(\varphi_-^{(1)}(x, \lambda))_1}{b(\lambda)} \exp \left[ \frac{1}{i} w_3(\lambda) x \right] + \frac{S_-(x) r^*(x) w_1(\lambda)}{(1 + S_3(x)) w_3(\lambda)} \right) = \\ & = \frac{S_-(x) r^*(x) w_1(\lambda)}{(1 + S_3(x)) w_3(\lambda)} \exp \left[ \frac{1}{i} w_3(\lambda)(z - x) \right] - \\ & - \frac{w_1(\lambda)}{\lambda} \int_x^{+\infty} \beta_+^*(x, y) \exp \left[ \frac{1}{i} w_3(\lambda)(z - y) \right] dy + \\ & + \frac{a(\lambda)}{\lambda b(\lambda)} \left( r(x) \exp \left[ \frac{1}{i} w_3(\lambda)(z + x) \right] + \right. \\ & \left. + \int_x^{+\infty} \alpha_+(x, y) \exp \left[ \frac{1}{i} w_3(\lambda)(z + y) \right] dy \right). \quad (3.5.1) \end{aligned}$$

Вторую компоненту равенства (3.4.1) умножаем на функцию

$$\frac{1}{b(\lambda)} \exp \left[ \frac{1}{i} w_3(\lambda) z \right] \quad (z > x)$$

и преобразуем результат к виду

$$\begin{aligned} \exp \left[ \frac{1}{i} w_3(\lambda)(z - x) \right] \left( \frac{(\varphi_-^{(1)}(x, \lambda))^2}{b(\lambda)} \exp \left[ \frac{1}{i} w_3(\lambda) x \right] - r^*(x) \right) = \\ = \int_x^{+\infty} \alpha_+^*(x, y) \exp \left[ \frac{1}{i} w_3(\lambda)(y - z) \right] dy + \\ + \frac{a(\lambda)}{b(\lambda)} w_1(\lambda) \int_x^{+\infty} \beta_+(x, y) \exp \left[ \frac{1}{i} w_3(\lambda)(z + y) \right] dy. \quad (3.5.2) \end{aligned}$$

Функции в левых частях равенств (3.5.1) и (3.5.2) являются аналитическими в области  $\text{Im} \lambda \leq 0$  за исключением некоторого числа простых полюсов и достаточно быстро стремятся к нулю при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ .

Левая часть равенства (3.5.1) имеет простые полюсы в точках  $\lambda = \mu_n$  ( $\text{Im} \mu_n < 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, 2N$ ) и  $\lambda = \pm 1$ . Отметим, что благодаря наличию дополнительного слагаемого

$$\frac{S_- r^*}{(1 + S_3)} \frac{w_1}{w_3} \exp \left[ \frac{1}{i} w_3(z - x) \right]$$

левая часть соотношения (3.5.1) оказывается регулярной в точке  $\lambda = 0$ .

Интересно, что левая часть второго равенства (3.5.2) не имеет полюса в точке  $\lambda = -i$ , поскольку

$$(\varphi_-^{(1)}(x, \lambda = -i))_2 = \gamma_0(\varphi_+^{(1)}(x, \lambda = -i))_2 = 0.$$

Это следствие интегральных представлений для решений Йоста (см. (3.4.2)). В результате левая часть формулы (3.5.2) содержит простые полюсы лишь в точках  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{2N}$ .

Проинтегрируем соотношения (3.5.1), (3.5.2) по параметру  $\lambda$  вдоль вещественной оси. Из-за наличия особенностей в точках  $\lambda = 0, \pm 1$  интегрирование соотношения (3.5.1) следует осуществлять в смысле главного значения Коши. Вычисления, подобные выполненным в предыдущем разделе, дают

$$\begin{aligned} -\beta_+^*(x, z, t) + r(x, t) f_1(x + z, t) + \\ + \int_x^{+\infty} \alpha_+(x, y, t) f_1(y + z, t) dy = 0, \\ \alpha_+^*(x, z, t) + \int_x^{+\infty} \beta_+(x, y, t) f_2(y + z, t) dy = 0, \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

где

$$\begin{aligned}
 f_1(y, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a(\lambda, t)}{\lambda b(\lambda)} \exp \left[ \frac{1}{i} w_3(\lambda) y \right] d\lambda + \\
 &\quad + i \sum_{\alpha=0}^N \frac{\gamma_{\alpha}(t)}{\mu_{\alpha} b'(\mu_{\alpha})} \exp \left[ \frac{1}{i} w_3(\mu_{\alpha}) y \right], \\
 f_2(y, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a(\lambda, t)}{\lambda b(\lambda)} w_1^2(\lambda) \exp \left[ \frac{1}{i} w_3(\lambda) y \right] d\lambda + \\
 &\quad + i \sum_{\alpha=1}^N \frac{\gamma_{\alpha}(t)}{\mu_{\alpha} b'(\mu_{\alpha})} w_1^2(\mu_{\alpha}) \exp \left[ \frac{1}{i} w_3(\mu_{\alpha}) y \right].
 \end{aligned} \tag{3.5.4}$$

Равенства (3.5.3) и комплексно сопряженные к ним образуют замкнутую систему уравнений обратной задачи рассеяния для расчета функций  $\alpha_+(x, z, t)$  и  $\beta_+(x, z, t)$  или, что равносильно, для вычисления матричных функций  $\Gamma_+^{(1,2)}(x, z, t)$ :

$$\begin{aligned}
 &\Gamma_+^{(2)}(x, z, t) \sigma_1 + R(x, t) F_1(x + z, t) + \\
 &\quad + \int_x^{+\infty} dy \Gamma_+^{(1)}(x, y, t) F_1(y + z, t) = 0; \\
 &\Gamma_+^{(1)}(x, z, t) + \int_x^{+\infty} dy \Gamma_+^{(2)}(x, y, t) i \sigma_2 F_2^*(y + z, t) = 0.
 \end{aligned} \tag{3.5.5}$$

Ядра в интегральных уравнениях (3.5.5) имеют вид

$$F_1 = \begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_1^* \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} f_2 & 0 \\ 0 & f_2^* \end{pmatrix}.$$

Схема интегрирования уравнений Ландау–Лифшица для ферромагнетика с анизотропией типа «легкая ось» и разными равновесными значениями намагниченности при  $x \rightarrow \pm\infty$  состоит в следующем.

1. Решая систему (3.2.2), по известному начальному распределению поля найдем данные рассеяния  $\{\mu_n, \gamma_n(0), a(\gamma, 0)\}$  при  $t = 0$ .
2. Используя формулы (3.2.15), (3.3.21), вычислим данные рассеяния при  $t > 0$ . Тогда формулы (3.5.4) определяют функции  $f_1(y, t)$  и  $f_2(y, t)$ .
3. Решим линейные интегральные уравнения (3.5.5).
4. Применяя соотношение (3.3.10), получим поле  $\mathbf{S}(x, t)$  при  $t > 0$ :

$$\frac{i S_+(x, t)}{1 + S_3(x, t)} = \frac{\beta_+(x, x, t)}{i r(x, t)}. \tag{3.5.6}$$

Мультисолитонные решения модели определяются условием  $a(\lambda) = 0$  и могут быть выписаны в явном виде. Они задаются нулями функции  $b(\lambda)$ :

$$\{\mu_n\} = \{\mu_0 = -i, \mu_\alpha, \mu_{\alpha+N} = -\mu_\alpha^{-1}, \alpha = 1, 2, \dots, N\}.$$

Парные нули  $\mu_\alpha \neq -i$  и  $-\mu_\alpha^{-1}$  ( $\text{Im}\mu_\alpha < 0$ ) параметризуют уже известные нам прецессирующие солитоны типа (3.4.19), (3.4.22).

Ноль  $\mu_0 = -i$  дает новый тип магнитного солитона. Проанализируем внутреннюю структуру и особенности такого солитона. Соответствующий ему коэффициент  $b(\lambda)$  имеет вид

$$b(\lambda) = -\exp(i\alpha_0) \frac{\lambda + i}{\lambda - i},$$

а функция  $f_2(y, t) = 0$ . Кроме того, поскольку  $w_1(\lambda = -i) = 0$ , переменная  $\gamma_0$  не зависит от времени (смотри (3.3.21)). Решение уравнений обратной задачи рассеяния (3.5.3) тривиально:

$$\alpha_+(x, z, t) \equiv 0, \quad \beta_+(x, z, t) = i\gamma_0^* r^*(x, t) \exp\left[-\frac{\beta}{2}(x + z) + i\alpha_0\right].$$

Выбирая  $\gamma_0$  вещественным и положительным, из (3.5.6) найдем распределение параметра порядка  $\mathbf{S}(x, t)$ :

$$S_3 = \text{th}[\beta(x - x_0)], \quad S_1 + iS_2 = \frac{\exp(i\alpha_0)}{\text{ch}[\beta(x - x_0)]}, \quad (3.5.7)$$

где  $\beta x_0 = \ln \gamma_0$ .

Поскольку намагниченность среды  $\mathbf{M}(x, t) = -M_0 \mathbf{S}(x, t)$ , решение (3.5.7) описывает 180°-ю доменную стенку, которая представляет собой пространственно локализованный слой намагниченности параллельный плоскости  $x_2x_3$  с центром в точке  $x_1 \equiv x = x_0$  (см. рис. 3.5).

Доменная стенка (3.5.7) разграничивает два полубесконечных пространства, причем левое ( $x < x_0$ ) является доменом с намагниченностью, направленной «вверх» — вдоль положительной оси  $Ox_3$ , а правое ( $x > x_0$ ) — доменом с намагниченностью, направленной «вниз».

Как уже отмечалось ранее, энергия одноосной анизотропии (3.1.12) будет минимальна при скачкообразном изменении в точке  $x = x_0$  оси  $Ox_1$  направления намагниченности от ориентации  $\mathbf{M} = M_0(0, 0, 1)$  к положению  $\mathbf{M} = M_0(0, 0, -1)$ . С другой стороны, обменная энергия минимальна при постепенном изменении ориентации вектора  $\mathbf{M}(x)$ . В конечном счете, ширина переходной области определяется компромиссом между двумя конкурирующими эффектами.

Согласно решению (3.5.7) ширина переходной области  $\sim \beta^{-1}$ . В размерных переменных это значение соответствует характерной магнитной длине

$$l_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta_0}}, \quad (3.5.8)$$



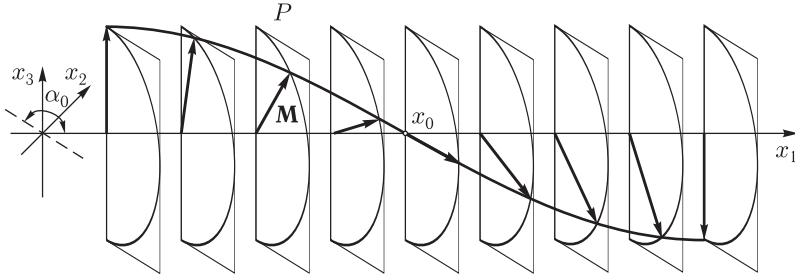


Рис. 3.5. Модель  $180^\circ$ -й доменной стенки с постоянным углом  $\alpha_0$ , характеризующим положение плоскости разворота магнитных моментов стенки. Стенка лежит в плоскости  $x_2x_3$ . Вектор намагниченности среды параллелен плоскости  $P$ , составляющей угол  $\alpha_0$  с плоскостью  $x_1x_3$  ( $0 \leq \alpha_0 < 2\pi$ , на рисунке угол  $\alpha_0$  — тупой). В плоскости  $P$  вектор  $\mathbf{M}$  поворачивается от положения  $(0, 0, M_0)$  при  $x = -\infty$  до положения  $(0, 0, -M_0)$  при  $x = +\infty$

где  $\alpha > 0$  — постоянная неоднородного обменного взаимодействия,  $\tilde{\beta}_0 = J_3 - J_1 = \beta^2 > 0$  — постоянная легкоосной анизотропии.

Типичные значения  $\alpha \sim (10^4 - 10^6) a^2$ , где  $a$  — постоянная кристаллической решетки. Постоянная анизотропии  $\tilde{\beta}$  для разных материалов изменяется в широких пределах. Полагая  $\tilde{\beta} \sim 10 - 10^2$ , приходим к следующей оценке толщины доменной границы:

$$l_0 \sim (10 - 10^3) a \gg a.$$

Полученное значение магнитной длины оказалось много больше постоянной кристаллической решетки. Поэтому использованный нами квазиклассический подход хорошо оправдан. Квантово-механические расчеты структуры доменных стенок являются излишними для большинства магнитных материалов.

Отметим, что отклонения намагниченности от предельных значений в доменах являются малыми уже на расстояниях  $\sim 10 l_0$  от центра доменной границы. Поэтому часто ограничиваются расчетом структуры доменных стенок в безграничной среде. В безграничной среде взаимодействие между достаточно удаленными плоскими доменными стенками экспоненциально малы.

В то же время в тонких магнитных пленках размагничивающие поля могут приводить к сильным дальнедействующим взаимодействиям.

В безграничной среде полная энергия, приходящаяся на единицу площади стенки, в размерных переменных определяется выражением

$$\sigma = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [\alpha (\partial_x \mathbf{M})^2 + \beta^2 (M_0^2 - M_3^2)] dx, \quad (3.5.9)$$

где  $\mathbf{M} = -M_0 \mathbf{S}$  (в данном случае  $M_0$  — номинальная намагниченность на единицу объема среды),  $\beta_0 = \beta^2 > 0$  — постоянная кристаллографи-

ческой магнитной анизотропии материала. Используя (3.1.6), (3.5.7), (3.5.9), находим

$$\sigma = 2M_0^2 \alpha^{1/2} \beta = 2M_0^2 \sqrt{\alpha \tilde{\beta}_0}. \quad (3.5.10)$$

Вклады обмена и анизотропии в энергию (3.5.10) одинаковы.

Напомним, что при получении решения (3.5.7) мы пренебрегли вкладом магнитостатических взаимодействий (3.1.2) по сравнению с энергией кристаллографической магнитной анизотропии среды. Обсудим влияние магнитных полей, обусловленных распределением намагниченности в среде, на параметры и свойства доменных стенок в ферромагнетике с анизотропией типа «легкая ось».

При рассматриваемой геометрии задачи компонента  $M_1$  вектора намагниченности среды, перпендикулярная плоскости  $x_2 x_3$  доменной стенки, создает на поверхности стенки магнитные заряды с плотностью

$$\rho_m = -4\pi \partial_x M_1.$$

Здесь мы снова вернулись к размерным переменным. Магнитные заряды вызывают появление магнитостатического поля (3.1.4) и, следовательно, плотности энергии размагничивания (3.1.2), которую можно записать в виде плотности энергии дополнительной анизотропии  $\tilde{w}^{(a)}$ :

$$w^{(m)} = -\frac{1}{2} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}^{(m)}) = 2\pi M_1^2 \equiv \tilde{w}^{(a)}. \quad (3.5.11)$$

В результате уравнения динамики намагниченности видоизменяются по сравнению с (3.1.17) и приобретают вид (3.1.14)

$$\partial_t \mathbf{M} = -\gamma \left[ \mathbf{M} \times \left( \alpha \partial_x^2 \mathbf{M} + \tilde{\beta}_0 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{M}) \mathbf{n} - 4\pi (\mathbf{e} \cdot \mathbf{M}) \mathbf{e} \right) \right], \quad (3.5.12)$$

где  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ ,  $\mathbf{e} = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{M}^2 = M_0^2$ . Далее мы изложим общую схему интегрирования уравнений (3.5.12) методом обратной задачи рассеяния и покажем, что их решение, соответствующее доменной стенке, есть

$$M_1 + iM_2 = -\frac{M_0 \exp(i\alpha_0)}{\operatorname{ch}(\xi x + \tau t + \delta)}, \quad M_3 = -M_0 \operatorname{th}(\xi x + \tau t + \delta), \quad (3.5.13)$$

где  $\alpha_0$ ,  $\delta$  — вещественные параметры,

$$\xi = \sqrt{(\tilde{\beta}_0 + 4\pi \cos^2 \alpha_0)/\alpha}, \quad \tau = 2\pi\gamma M_0 \sin(2\alpha_0).$$

Пока в справедливости формул (3.5.13) можно убедиться простой проверкой.

Согласно (3.5.13) магнитостатические взаимодействия обуславливают движение доменных стенок со скоростью

$$v(\alpha_0) = 2\pi\gamma M_0 \sin(2\alpha_0) \sqrt{\alpha} (\tilde{\beta}_0 + 4\pi \cos^2 \alpha_0)^{-1/2}.$$

Максимальное значение скорости  $v(\alpha_0)$  соответствует значению  $\alpha_0 = \alpha_{\max}$ , которое является корнем уравнения

$$\frac{4\pi}{\beta} \cos^2 \alpha_{\max} = \sqrt{1 + \frac{4\pi}{\beta_0}} - 1.$$

Отсюда следует выражение для предельной скорости доменной границы в одноосном ферромагнетике (уокеровский предел):

$$v_{\max} = \gamma M_0 \sqrt{\alpha \tilde{\beta}_0} \left( \sqrt{1 + \frac{4\pi}{\tilde{\beta}_0}} - 1 \right) \approx 2\pi \gamma M_0 \sqrt{\frac{\alpha}{\tilde{\beta}_0}} \quad \text{при} \quad \tilde{\beta}_0 \gg 4\pi.$$

Значение  $v_{\max}$  для разных ферромагнетиков — порядка 100–1000 м/с. Реально в ферромагнитных пластинах наблюдают меньшее значение предельной скорости. Дело в том, что из-за «скручивания» доменная граница в пластине не всегда описывается простой зависимостью  $\mathbf{M} = \mathbf{M}(x + vt)$ .

Выражениям для толщины  $l_0$  доменной стенки (3.5.13) и ее энергии  $\sigma$  придадим форму соотношений (3.5.8), (3.5.9):

$$l_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{\tilde{\beta}}}, \quad \sigma = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \alpha (\partial_x \mathbf{M})^2 + \tilde{\beta} (M_0^2 - M_3^2) \right] dx = 2M_0^2 \sqrt{\alpha \tilde{\beta}}.$$

Здесь  $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}_0 + 4\pi \cos^2 \alpha_0$  — параметр эффективной анизотропии среды, включающий вклад магнитостатических взаимодействий ( $\tilde{\beta}_0$  — постоянная кристаллографической магнитной анизотропии типа «легкая ось»).

Формулы (3.5.11), (3.5.13) показывают, что увеличению энергии размагничивания соответствует рост величины  $\cos^2 \alpha_0$ . С увеличением  $\cos^2 \alpha_0$  увеличивается также постоянная эффективной магнитной анизотропии  $\tilde{\beta}$  и энергия доменной стенки  $\sigma$ . При этом толщина доменной стенки  $l_0$  уменьшается.

Энергия доменной стенки оказывается минимальной при  $\cos^2 \alpha_0 = 0$ , т. е., когда  $\alpha_0 = \pi/2, 3\pi/2$ . При таких значениях угла  $\alpha_0$  вектор намагниченности  $\mathbf{M}$  лежит в плоскости  $x_2x_3$  доменной границы. Поэтому на ее поверхности не возникает магнитных зарядов ( $M_1 = 0$ ). Вектор  $\mathbf{M}$  ортогонален оси  $Ox_1$ , и его поворот по толщине доменной стенки можно уподобить винтовому вращению. Такие доменные стенки принято называть «стенками Блоха». В отсутствие дополнительных возмущений и взаимодействий они могут быть лишь неподвижными. Симметрия допускает два возможных направления поворота намагниченности в плоскости блоховской доменной границы. Поэтому существуют два типа доменных стенок (см. рис. 3.6). А именно правовинтовые ( $\alpha_0 = \pi/2$ ):

$$\mathbf{M} = -M_0 \left( 0, \operatorname{sech} \sqrt{\frac{\tilde{\beta}_0}{\alpha}} x, \operatorname{th} \sqrt{\frac{\tilde{\beta}_0}{\alpha}} x \right),$$

и левовинтовые ( $\alpha_0 = 3\pi/2$ ):

$$\mathbf{M} = -M_0 \left( 0, -\operatorname{sech} \sqrt{\frac{\tilde{\beta}_0}{\alpha}} x, \operatorname{th} \sqrt{\frac{\tilde{\beta}_0}{\alpha}} x \right),$$

причем оба типа стенок имеют одинаковую энергию.

При определенных условиях на опыте реализуются доменные стенки, имеющие участки с противоположными направлениями вращения вектора намагниченности. Эти участки отделены друг от друга областью конечной толщины, проходящей вдоль особой линии, которую называют «бловховской». Вокруг бловховской линии распределение намагниченности приобретает вихревой характер. Бловховская линия не может закончиться в какой-то точке доменной границы: она либо замыкается в кольцо, либо выходит на поверхность кристалла вместе с доменной границей. Бловховские линии являются топологическими дефектами тонкой структуры доменных стенок.

Магнитостатическая энергия (3.5.11) будет максимальна при значениях  $\alpha_0 = 0, \pi$ . В этом случае доменная стенка (3.5.13) также неподвижна. Поворот вектора  $\mathbf{M}$  по толщине стенки осуществляется в плоскости  $x_1x_3$ , перпендикулярной плоскости стенки — плоскости  $x_2x_3$ . Значениям  $\alpha_0 = 0$  и  $\alpha_0 = \pi$  соответствуют два типа стенок, отличающихся направлениями вращения вектора  $\mathbf{M}$ , которые называют «стенками Нееля» (см. рис. 3.7).

Отметим важное обстоятельство. Несмотря на то что стенки Блоха минимизируют энергию размагничивания, учет внешнего магнитного поля, направленного под углом к плоскости доменной стенки, или же дополнительных магнитоанизотропных взаимодействий приводит к тому, что стенки Нееля или промежуточные конфигурации с  $\alpha_0 \neq 0, \pi$  могут стать энергетически более выгодными, чем стенки

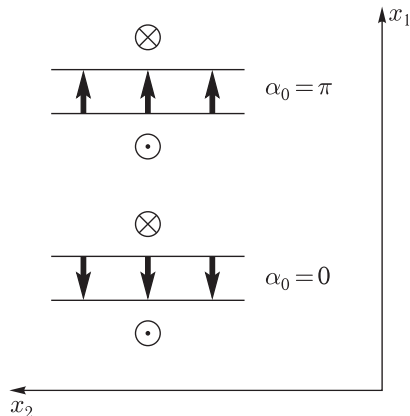
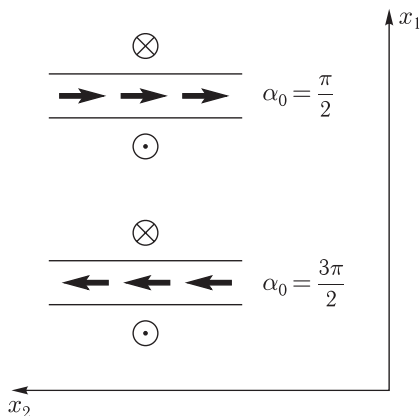


Рис. 3.6. Бловховские доменные стенки. Рис. 3.7. Неелевские доменные стенки  
Вид со стороны оси  $Ox_3$

Блоха. При изменении внешних полей блоховская доменная стенка может оказаться неустойчивой, тогда намагниченность в ней спонтанно переориентируется в другую конфигурацию. Особенно это важно в образцах конечных размеров.

В любом случае доменная стенка (3.5.7) или (3.5.13) разделяет два разных основных состояния ферромагнетика. Поэтому стабильность солитона (3.5.7) усилена топологическими причинами. При фиксированных граничных условиях  $(\mathbf{S} \rightarrow (0, 0, \pm 1))$  при  $x \rightarrow \pm\infty$  распределение намагниченности, соответствующее доменной стенке (3.5.7), нельзя непрерывной деформацией поля  $\mathbf{S}(x)$  свести к однородному основному состоянию. Когда координата  $x$  пробегает интервал от  $-\infty$  до  $+\infty$ , конец вектора  $\mathbf{S}(x)$  на поверхности сферы  $\mathbf{S}^2 = 1$  описывает дугу, соединяющую противоположные полюсы сферы — точки с радиусами-векторами  $\mathbf{S} = (0, 0, 1)$  и  $\mathbf{S} = (0, 0, -1)$ . Такую траекторию непрерывной деформацией поля  $\mathbf{S}(x)$  невозможно стянуть в точку, которая и соответствовала бы однородному распределению намагниченности в среде.

Полученные результаты показывают, что в отсутствии внешнего магнитного поля или же нелинейных спиновых волн доменная стенка в безграничном ферромагнетике с кристаллографической анизотропией типа «легкая ось» всегда неподвижна (см. (3.5.7)). Когда внутреннее магнитное поле ферромагнетика отлично от нуля вдоль оси  $Ox_3$ :  $\mathbf{H} = (0, 0, H')$  ( $H' \neq 0$ ), неподвижных доменных границ не существует. Дело в том, что при  $H' \neq 0$  плотности энергии доменов с намагниченностями  $\mathbf{M} = (0, 0, -M_0)$  и  $\mathbf{M} = (0, 0, M_0)$  различаются на величину  $2M_0H'$ , поэтому доменная стенка не может находиться в равновесии. Выгодный домен, у которого  $\mathbf{M} \uparrow \uparrow \mathbf{H}$ , будет расширяться за счет невыгодного, т. е. доменная граница будет двигаться. Более подробное обсуждение представлено в разделе 3.7.1.

Разумеется, решение (3.5.7) было бы проще получить непосредственным интегрированием уравнений Ландау–Лифшица (3.2.7). Однако преимущество изложенного метода состоит в том, что он позволяет исследовать эволюцию любых начальных распределений намагниченности с асимптотиками  $\mathbf{S} \rightarrow (0, 0, \pm 1)$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ . При этом все расчеты сводятся к решению линейных задач.

### 3.6. «Одевание» тривиальных решений $\mathbf{S} = (0, 0, \pm 1)$ уравнений Ландау–Лифшица с анизотропией типа «легкая ось»

*Метод состоит в размещении и упорядочивании того, на что должно быть направлено острие ума в целях открытия какой-либо истины.*

*Р. Декарт*

Построенные в предыдущих разделах солитонные решения модели легкоосного ферромагнетика с равновесными значениями поля  $\mathbf{S}(x, t)$

при  $x \rightarrow \pm\infty$  проще получить «одеванием» тривиальных решений модели  $\mathbf{S} = (0, 0, \pm 1)$  с помощью матричной задачи Римана. В данном разделе подробно обсудим эту процедуру, поскольку она содержит ряд технических особенностей, которые отсутствовали в модели изотропного ферромагнетика и повторяются при анализе других задач.

Напомним, что в схеме «одевания» вспомогательная линейная система записывается не в виде (3.2.2), (3.2.5), а в форме

$$\partial_x \chi = U(\lambda) \chi, \quad \partial_t \chi = V(\lambda) \chi. \quad (3.6.1)$$

Для модели ферромагнетика с анизотропией типа «легкая ось» матрицы  $U(\lambda)$ ,  $V(\lambda)$  определяются формулами (3.1.15), (3.1.18) и, в отличие от модели изотропного ферромагнетика, не обращаются одновременно в нуль в точке  $\lambda = 0$  или в какой-либо другой точке  $\lambda$ -плоскости. Эта особенность ведет к тому, что матричные решения системы (3.6.1) с заданными свойствами аналитичности не могут быть нормированы на единичную матрицу при каком-либо значении  $\lambda$ . Для легкоосного ферромагнетика особыми точками системы (3.6.1) будут  $\lambda = 0$  и  $\lambda = \infty$ . В них далее не фиксируются численные значения матричных решений уравнений (3.6.1), а лишь оговариваются асимптотические свойства решений. В конечном счете, задача сопряжения аналитических функций, лежащая в основе метода «одевания», посредством калиброванного преобразования все же сводится к задаче Римана с нормировкой на единичную матрицу в точке  $\lambda = \infty$ . Однако после калибровочного преобразования исходные линейные редукции на решения системы (3.6.1) переходят в нелинейные редукции на матрицы задачи Римана. Тем не менее, оказывается, что даже при нелинейных редукциях задача Римана с нулями имеет явное решение.

Нас интересуют решения уравнений Ландау–Лифшица (3.1.17) со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &\rightarrow (0, 0, 1) \quad \text{при } x \rightarrow +\infty; \\ \mathbf{S} &\rightarrow (0, 0, \varepsilon) \quad \text{при } x \rightarrow -\infty, \end{aligned}$$

где  $\varepsilon = \pm 1$ . При таких условиях вспомогательная линейная система (3.6.1) имеет асимптотические решения

$$\begin{aligned} \chi_2^{(0)}(x, t, \lambda) &= \exp \left[ \frac{1}{i} (w_3(\lambda)x - 2w_1^2(\lambda)t) \sigma_3 \right] \quad \text{при } x \rightarrow +\infty; \\ \chi_1^{(0)}(x, t, \lambda) &= \exp \left[ \frac{\varepsilon}{i} (w_3(\lambda)x - 2w_1^2(\lambda)t) \sigma_3 \right] \quad \text{при } x \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

Два набора базисных решений системы (3.6.1) фиксируем асимптотиками

$$\chi_{1,2}(x, t, \lambda) \rightarrow \chi_{1,2}^{(0)}(x, t, \lambda) \quad \text{при } x \rightarrow \mp\infty.$$

Из столбцов матриц  $\chi_{1,2}(x, t, \lambda)$  необходимо сконструировать два матричных решения  $\chi_{\pm}(x, t, \lambda)$  системы (3.6.1), одно из которых  $\chi_+(\lambda)$

будет аналитической функцией в области  $\text{Im}\lambda \geq 0$ , а другое  $\chi_-(\lambda)$  — в области  $\text{Im}\lambda \leq 0$ . Задача сопряжения аналитических функций  $\chi_{\pm}(\lambda)$  на вещественной  $\lambda$ -оси и будет лежать в основе метода «одевания». Анализ можно упростить, заметив, что решения  $\chi_{1,2}(x, t, \lambda)$  системы (3.6.1) выражаются через решения Йоста  $\varphi_{\pm}(x, t, \lambda)$  родственной системы (3.2.2), (3.2.5):

$$\begin{aligned}\chi_2(\lambda) &= \varphi_+(\lambda) \exp [2i w_1^2(\lambda) \sigma_3 t]; \\ \chi_1(\lambda) &= \varphi_-(\lambda) \exp [2i \varepsilon w_1^2(\lambda) \sigma_3 t].\end{aligned}\quad (3.6.3)$$

Аналитические свойства функций Йоста  $\varphi_{\pm}(x, t, \lambda)$  нами уже описаны. Поэтому сформулируем все необходимые утверждения в терминах решений Йоста и лишь на конечном этапе расчетов перейдем от функций Йоста к функциям  $\chi_{\pm}(\lambda)$  с требуемыми свойствами аналитичности.

Напомним, что решения Йоста на вещественной  $\lambda$ -оси связаны матричными равенствами:

$$\varphi_-(\lambda) = \varphi_+(\lambda) T(\lambda), \quad \varphi_+(\lambda) = \varphi_-(\lambda) T^{-1}(\lambda), \quad (3.6.4)$$

где

$$\begin{aligned}T(\lambda) &= \begin{pmatrix} a(\lambda) & -b^*(\lambda) \\ b(\lambda) & a^*(\lambda) \end{pmatrix}, \quad T^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} a^*(\lambda) & b^*(\lambda) \\ -b(\lambda) & a(\lambda) \end{pmatrix}, \\ |a(\lambda)|^2 + |b(\lambda)|^2 &= 1.\end{aligned}$$

Нам потребуется более подробная форма записи равенств (3.6.4):

$$\begin{aligned}\varphi_-^{(1)} &= a \varphi_+^{(1)} + b \varphi_+^{(2)}, & \varphi_-^{(2)} &= -b^* \varphi_+^{(1)} + a^* \varphi_+^{(2)}; \\ \varphi_+^{(1)} &= a^* \varphi_-^{(1)} - b \varphi_-^{(2)}, & \varphi_+^{(2)} &= b^* \varphi_-^{(1)} + a \varphi_-^{(2)}.\end{aligned}\quad (3.6.5)$$

Конечный вид функций  $\chi_{\pm}(\lambda)$  с предписанными свойствами аналитичности зависит от параметра  $\varepsilon = \pm 1$ .

Обсудим сначала задачу с  $\varepsilon = -1$ . Как показано ранее, при  $\varepsilon = -1$  в нижней полуплоскости комплексной переменной  $\lambda$  оказываются аналитическими функции  $\varphi_+^{(1)}(\lambda)$ ,  $\varphi_-^{(1)}(\lambda)$  и  $b(\lambda)$ , в то время как функции  $\varphi_+^{(2)}(\lambda)$ ,  $\varphi_-^{(2)}(\lambda)$  и  $b^*(\lambda)$  аналитически продолжаются с вещественной  $\lambda$ -оси в верхнюю полуплоскость. Определим матричные решения  $\Phi_-(\lambda)$  и  $\Phi_+(\lambda)$  системы (3.2.2), (3.2.5), аналитические в областях  $\text{Im}\lambda \leq 0$  и  $\text{Im}\lambda \geq 0$  соответственно:

$$\Phi_- = (\varphi_+^{(1)}, \varphi_-^{(1)}); \quad \Phi_+ = (\varphi_-^{(2)}, \varphi_+^{(2)}). \quad (3.6.6)$$

Используя равенства (3.6.5), (3.6.6), нетрудно проверить, что на вещественной  $\lambda$ -оси функции  $\Phi_{\pm}(\lambda)$  выражаются через решения Йоста:

$$\begin{aligned}\Phi_-(\lambda) &= \varphi_+(\lambda) M_{+-}(\lambda) = \varphi_-(\lambda) M_{--}(\lambda) i \sigma_2; \\ \Phi_+(\lambda) &= -\varphi_+(\lambda) \sigma_3 M_{++}(\lambda) = \varphi_-(\lambda) M_{-+}(\lambda) \sigma_1,\end{aligned}\quad (3.6.7)$$

где матрицы  $M$  являются треугольными:

$$\begin{aligned} M_{+-} &= \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}, & M_{--} &= \begin{pmatrix} 1 & -a^* \\ 0 & b \end{pmatrix}, \\ M_{++} &= \begin{pmatrix} b^* & 0 \\ a^* & 1 \end{pmatrix}, & M_{-+} &= \begin{pmatrix} b^* & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

и удовлетворяют тождеству

$$T(\lambda) = -\sigma_3 M_{++}(\lambda) \sigma_1 M_{-+}^{-1}(\lambda) = -M_{+-}(\lambda) i \sigma_2 M_{--}^{-1}(\lambda).$$

Формулы (3.6.7) позволят получить все необходимые свойства функций  $\Phi_{\pm}(\lambda)$  по известным ранее свойствам решений Йоста.

Отметим, прежде всего, что, хотя матрицы  $\varphi_{\pm}(\lambda)$  унимодулярны, матричные решения  $\Phi_{\pm}(\lambda)$  этому свойству не удовлетворяют. На вещественной  $\lambda$ -оси

$$\det \Phi_{-}(\lambda) = -[\det \Phi_{+}(\lambda)]^* = b(\lambda).$$

Редукции (3.2.9), (3.2.10), которым подчиняются функции  $\varphi_{\pm}(\lambda)$ , переносятся на матричные функции  $\Phi_{\pm}(\lambda)$ . На вещественной  $\lambda$ -оси имеем

$$\Phi_{\mp}(-\lambda^{-1}) = \pm \sigma_3 \Phi_{\mp}(\lambda); \quad (3.6.8)$$

$$\Phi_{\mp}^*(\lambda) = \pm i \sigma_2 \Phi_{\pm}(\lambda) \sigma_1. \quad (3.6.9)$$

Редукция (3.6.8) с вещественной  $\lambda$ -оси может быть продолжена в области аналитичности функций  $\Phi_{+}(\lambda)$  и  $\Phi_{-}(\lambda)$ , в то время как редукция (3.6.9) справедлива только на вещественной оси. Используя тождество, справедливое для произвольных матриц  $2 \times 2$ :

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{\det \Phi} \sigma_2 \Phi^T \sigma_2,$$

перепишем редукцию (3.6.9) в виде

$$[\Phi_{\mp}(\lambda)]^{\dagger} = \pm \sigma_3 \det \Phi_{\pm}(\lambda) \Phi_{\pm}^{-1}(\lambda).$$

Асимптотики функций  $\Phi_{\pm}(\lambda)$  при  $|\lambda| \rightarrow \infty$  следуют из полученных ранее асимптотик для функций  $\varphi_{\pm}(\lambda)$ ,  $b(\lambda)$  (3.3.11), (3.3.22):

$$\begin{aligned} \Phi_{-}(\lambda) &= \left[ g_{-1} + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right] \exp \left[ \frac{1}{i} w_3(\lambda) \sigma_3 x \right], \\ \Phi_{+}(\lambda) &= \exp(-i \alpha_0) \left[ g_{-1} \sigma_3 + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right] \exp \left[ \frac{1}{i} w_3(\lambda) \sigma_3 x \right], \end{aligned} \quad (3.6.10)$$



где  $g_{-1}$  — независящая от параметра  $\lambda$  унитарная матрица:

$$g_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -S_{-}(1+S_3)^{-1} \\ S_{+}(1+S_3)^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -r^* \exp i\alpha_0 \end{pmatrix},$$

$$g_{-1}^{\dagger} g_{-1} = I.$$

С помощью соотношений (3.6.7) получаем условие сопряжения аналитических функций  $\Phi_{\pm}(\lambda)$  на вещественной  $\lambda$ -оси, которое лежит в основе методов обратной задачи рассеяния и «одевания»:

$$\Phi_{-}(x, t, \lambda) = -\frac{1}{b^*(\lambda)} \Phi_{+}(x, t, \lambda) \sigma_3 \begin{pmatrix} 1 & a(\lambda, t) \\ a^*(\lambda, t) & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.6.11)$$

Напомним, что при  $\varepsilon = -1$  коэффициент  $b(\lambda)$  не зависит от времени, а эволюция коэффициента  $a(\lambda, t)$  имеет вид (3.2.15)

$$a(\lambda, t) = a(\lambda, t=0) \exp[4i w_1^2(\lambda) t].$$

Для перехода от равенства (3.6.11) к стандартной формулировке задачи Римана выделим из функций  $\Phi_{\pm}(\lambda)$  множитель  $\exp \left[ \frac{1}{i} w_3(\lambda) \sigma_3 x \right]$  (см. (3.6.10)) и представим их в форме

$$\begin{aligned} \Phi_{-}(x, t, \lambda) &= G_{-}(x, t, \lambda) \exp \left[ \frac{1}{i} w_3(\lambda) \sigma_3 x \right], \\ \Phi_{+}(x, t, \lambda) &= -b^*(\lambda) G_{+}^{-1}(x, t, \lambda) \sigma_3 \exp \left[ \frac{1}{i} w_3(\lambda) \sigma_3 x \right]. \end{aligned} \quad (3.6.12)$$

В результате равенство (3.6.11) переписывается в виде

$$\begin{aligned} G_{+}(x, t, \lambda) G_{-}(x, t, \lambda) &= \\ &= \chi_2^{(0)}(x, t, \lambda) \begin{pmatrix} 1 & a(\lambda, 0) \\ a^*(\lambda, 0) & 1 \end{pmatrix} [\chi_2^{(0)}(x, t, \lambda)]^{-1}, \end{aligned} \quad (3.6.13)$$

где  $\chi_2^{(0)}(x, t, \lambda)$  — «затравочное» решение (3.6.2), а матричные функции  $G_{\pm}(\lambda)$  удовлетворяют условиям:

$$\det G_{-}(\lambda) = -[\det G_{+}(\lambda^*)]^* = b(\lambda) \quad (\operatorname{Im} \lambda \leq 0);$$

$$G_{+}(\lambda) = G_{-}^{\dagger}(\lambda^*) \quad (\operatorname{Im} \lambda \geq 0);$$

$$G_{-}(-\lambda^{-1}) = \sigma_3 G_{-}(\lambda), \quad G_{+}(-\lambda^{-1}) = G_{+}(\lambda) \sigma_3; \quad (3.6.14)$$

$$G_{-}(\lambda) = g_{-1} + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \quad \text{при } |\lambda| \rightarrow \infty. \quad (3.6.15)$$

Требуемые решения вспомогательной линейной системы (3.6.1)  $\chi_{-}(\lambda)$  и  $\chi_{+}(\lambda)$ , аналитические в областях  $\operatorname{Im} \lambda \leq 0$  и  $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$  соот-

ветственно, принимают вид, типичный для схемы «одевания» частных решений:

$$\chi_+(\lambda) = G_+^{-1}(\lambda)\chi_2^{(0)}(\lambda), \quad \chi_-(\lambda) = G_-(\lambda)\chi_2^{(0)}(\lambda). \quad (3.6.16)$$

При переходе от соотношений (3.6.3), (3.6.12) к формулам (3.6.16) устранили несущественные множители.

Мультисолитонные состояния модели ферромагнетика с анизотропией типа «легкая ось» и разными равновесными значениями намагниченности на бесконечности ассоциированы с решениями задачи Римана (3.6.13) при  $a(\lambda, t=0) = 0$ . В этом случае на вещественной  $\lambda$ -оси имеем

$$G_+(\lambda)G_-(\lambda) = I. \quad (3.6.17)$$

Напомним, что нетривиальные решения задачи Римана (3.6.17) возможны только тогда, когда функции  $G_{\pm}(\lambda)$  имеют нули в областях своей аналитичности. Далее для простоты предполагаем, что все нули функции  $G_-(\lambda)$  являются простыми и не лежат на вещественной оси. В силу редукции (3.6.14), они имеют вид

$$\begin{aligned} \{\mu_n, n = 0, 1, 2, \dots, 2N\} \equiv \\ \equiv \{\mu_0 = -i, \mu_\alpha \neq -i, \mu_{\alpha+N} = -\mu_\alpha^{-1}, \alpha = 1, 2, \dots, N\}. \end{aligned}$$

Поскольку  $G_+(\lambda) = [G_-(\lambda^*)]^\dagger$  ( $\text{Im} \lambda \geq 0$ ), нулями функции  $G_+(\lambda)$  будут  $\{\mu_n^*, n = 0, 1, 2, \dots, 2N\}$ .

Равенство (3.6.17) предполагает, что нули функций  $G_{\pm}(\lambda)$  совпадают с полюсами функций  $G_{\mp}(\lambda)$ .

Как известно, решение задачи Римана (3.6.17) определено с точностью до произвольной невырожденной и независимой от  $\lambda$  матрицы. Воспользуемся условием (3.6.15), чтобы устранить произвол. Положим

$$G_-(\lambda) = g_{-1}\Psi_-(\lambda), \quad G_+(\lambda) = \Psi_+(\lambda)g_{-1}^\dagger, \quad (3.6.18)$$

где  $\Psi_+(\lambda) = \Psi_-^\dagger(\lambda)$  при вещественных значениях параметра  $\lambda$ . Тогда матричная функция  $\Psi_-(\lambda)$  будет иметь каноническую нормировку:

$$\Psi_-(\lambda = \infty) = I.$$

Подставляя (3.6.18) в формулу (3.6.14), находим:

$$\Psi_-(-\lambda^{-1}) = g_{-1}^\dagger \sigma_3 g_{-1} \Psi_-(\lambda).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} g_{-1}^\dagger \sigma_3 g_{-1} \equiv \begin{pmatrix} S_3 & S_- \left( \frac{r^*}{r} \right) \exp(i\alpha_0) \\ S_+ \left( \frac{r}{r^*} \right) \exp(-i\alpha_0) & -S_3 \end{pmatrix} = \\ = \Psi_-(\lambda = 0) = \Psi_-^\dagger(\lambda = 0). \end{aligned} \quad (3.6.19)$$

В результате задача Римана (3.6.13) с линейной редукцией (3.6.14) сводится к построению матриц  $\Psi_{\pm}(\lambda)$ , удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned}\Psi_+(\lambda)\Psi_-(\lambda) &= I, \quad \Psi_+(\lambda) = \Psi_-^\dagger(\lambda), \quad \text{Im}\lambda = 0; \\ \Psi_-(\lambda = \infty) &= I\end{aligned}\quad (3.6.20)$$

и нелинейной редукции

$$\Psi_-(-\lambda^{-1}) = \Psi_-^\dagger(\lambda = 0)\Psi_-(\lambda). \quad (3.6.21)$$

Общее решение задачи (3.6.20) без наложения дополнительной редукции (3.6.21) было получено ранее:

$$\begin{aligned}[\Psi_+(\lambda)]_{\sigma\sigma'} &= \delta_{\sigma\sigma'} - \sum_{p,s=0}^{2N} \frac{(m_p)_\sigma (m_s)_{\sigma'}^*}{\lambda - \mu_p} (A^{-1})_{ps}; \\ [\Psi_-(\lambda)]_{\sigma\sigma'} &= \delta_{\sigma\sigma'} + \sum_{k,n=0}^{2N} \frac{(m_k)_\sigma (m_n)_{\sigma'}^*}{\lambda - \mu_n^*} (A^{-1})_{kn},\end{aligned}\quad (3.6.22)$$

где  $\sigma, \sigma' = 1, 2$ ;  $(A^{-1})_{ij}$  — элементы  $2N \times 2N$ -матрицы, обратной к матрице  $A$  с элементами

$$A_{ij} = \frac{(\mathbf{m}_i^* \cdot \mathbf{m}_j)}{\mu_i^* - \mu_j} = -A_{ji}^*. \quad (3.6.23)$$

При записи формул (3.6.22) мы учли соотношения

$$(A^{-1})_{ij} = -(A^{-1})_{ji}^*, \quad (3.6.24)$$

которые являются следствием равенства (3.6.23).

В справедливости решения (3.6.22) можно убедиться простой проверкой с использованием тождества

$$\sum_{s,k=0}^{2N} (A^{-1})_{ps} (\mathbf{m}_s^* \cdot \mathbf{m}_k) (A^{-1})_{kn} = (A^{-1})_{pn} \mu_n^* - \mu_p (A^{-1})_{pn}. \quad (3.6.25)$$

В формуле (3.6.25) по индексам  $p$  и  $n$  нет суммирования.

Тождество (3.6.25) оказывается полезным и при работе с нелинейной редукцией (3.6.21). С его помощью нетрудно показать, что

$$\begin{aligned}[\Psi_-^\dagger(\lambda = 0)\Psi_-(\lambda)]_{\sigma\sigma'} &= \delta_{\sigma\sigma'} + \sum_{p,n=0}^{2N} (m_p)_\sigma \frac{1}{\mu_p} (A^{-1})_{pn} (m_n)_{\sigma'}^* + \\ &+ \sum_{p,n=0}^{2N} (m_p)_\sigma \frac{\mu_n^*}{\mu_p} \frac{(A^{-1})_{pn}}{(\lambda - \mu_n^*)} (m_n)_{\sigma'}^*. \quad (3.6.26)\end{aligned}$$

В то же время

$$\begin{aligned} [\Psi_-(-\lambda^{-1})]_{\sigma\sigma'} &= \delta_{\sigma\sigma'} - \sum_{n,p=0}^{2N} (m_p)_\sigma \frac{1}{\mu_n^*} (A^{-1})_{pn} (m_n)_{\sigma'}^* + \\ &+ \sum_{n,p=0}^{2N} (m_p)_\sigma \frac{(A^{-1})_{pn} (\mu_n^*)^{-2}}{(\lambda + \mu_n^{*-1})} (m_n)_{\sigma'}^*. \end{aligned} \quad (3.6.27)$$

Выражения (3.6.26), (3.6.27) совпадут, если совпадут матричные коэффициенты при одинаковых полюсах. Это происходит при условии

$$m_{\alpha+N} = m_\alpha, \quad \mu_{\alpha+N} = -\mu_\alpha^{-1}, \quad (3.6.28)$$

когда элементы матрицы  $A^{-1}$  приобретают дополнительные свойства симметрии:

$$\begin{aligned} (A^{-1})_{\alpha+N, 0} &= \frac{1}{i\mu_\alpha} (A^{-1})_{\alpha, 0}, \\ \mu_\alpha (A^{-1})_{N+\alpha, \beta} \frac{1}{\mu_\beta^*} &= -(A^{-1})_{\alpha, \beta+N}, \\ (A^{-1})_{\alpha+N, \beta+N} &= \frac{1}{\mu_\alpha} (A^{-1})_{\alpha, \beta} \frac{1}{\mu_\beta^*}. \end{aligned}$$

Остальные связи между элементами матрицы  $A^{-1}$  следуют из условия ее антиэрмитовости (3.6.24).

Выражения (3.6.22), (3.6.28) дают полное и явное решение задачи Римана (3.6.20) с нелинейной редукцией (3.6.21).

В результате новое решение  $\chi_\pm(x, t, \lambda)$  вспомогательной системы получается «одеванием» «затравочного» решения  $\chi_2^{(0)}(x, t, \lambda)$  с помощью матричных функций  $g_{-1}$  и  $\Psi_\pm(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} \chi_+(x, t, \lambda) &= g_{-1}(x, t) \Psi_+^{-1}(x, t, \lambda) \chi_2^{(0)}(x, t, \lambda); \\ \chi_-(x, t, \lambda) &= g_{-1}(x, t) \Psi_-(x, t, \lambda) \chi_2^{(0)}(x, t, \lambda). \end{aligned}$$

Зависимость от  $x$  и  $t$  векторов  $\mathbf{m}_n$  определится, как и ранее, из требования отсутствия «лишних» полюсов в точках  $\{\lambda_n \equiv \mu_n^*, n = 0, 1, 2, \dots, 2N\}$  и  $\{\mu_n, n = 0, 1, 2, \dots, 2N\}$  в «одевающих» формулах

$$U = \partial_x \chi_\pm \chi_\pm^{-1}, \quad V = \partial_t \chi_\pm \chi_\pm^{-1},$$

которые в более подробной записи имеют вид:

$$\begin{aligned} U &= \partial_x g_{-1} g_{-1}^{-1} - g_{-1} \Psi_+^{-1} (\partial_x \Psi_+ - U_0 \Psi_+) g_{-1}^{-1} = \\ &= \partial_x g_{-1} g_{-1}^{-1} + g_{-1} (\partial_x \Psi_- + \Psi_- U_0) \Psi_-^{-1} g_{-1}^{-1}; \\ V &= \partial_t g_{-1} g_{-1}^{-1} - g_{-1} \Psi_+^{-1} (\partial_t \Psi_+ - V_0 \Psi_+) g_{-1}^{-1} = \\ &= \partial_t g_{-1} g_{-1}^{-1} + g_{-1} (\partial_t \Psi_- + \Psi_- V_0) \Psi_-^{-1} g_{-1}^{-1}. \end{aligned} \quad (3.6.29)$$

Здесь

$$U_0 = -i\sigma_3 w_3(\lambda), \quad V_0(\lambda) = 2i w_1^2(\lambda) \sigma_3.$$

«Одевающие» формулы (3.6.29) отличаются от использованных ранее (2.9.13) появлением матричной функции  $g_{-1}(x, t)$ , которая осуществляет так называемое калибровочное преобразование. Специфика преобразования — в том, что функция  $g_{-1}(x, t)$  не зависит от параметра  $\lambda$ , потому условие отсутствия «лишних» полюсов в соотношениях (3.6.29) сводится к прежним уравнениям:

$$\partial_x \mathbf{m}_n = U_0(\mu_n) \mathbf{m}_n, \quad \partial_t \mathbf{m}_n = V_0(\mu_n) \mathbf{m}_n. \quad (3.6.30)$$

Уравнения (3.6.30) имеют тривиальные решения, согласующиеся с требованием (3.6.28):

$$\mathbf{m}_\alpha = \chi_2^{(0)}(x, t, \mu_\alpha) \mathbf{c}_\alpha, \quad \mathbf{m}_{\alpha+N} = \mathbf{m}_\alpha,$$

где  $\mathbf{c}_\alpha$  — произвольные постоянные двумерные комплексные векторы.

Равенство (3.6.19) является основным для построения мультисолитонных решений модели ферромагнетика с анизотропией типа «легкая ось» и разными равновесными значениями намагниченности на бесконечности. Как и в методе Гельфанда–Левитана–Марченко, компонента  $S_3$  параметра порядка  $\mathbf{S}$  вычисляется явно:

$$S_3(x, t) = [\Psi_-(x, t, \lambda = 0)]_{11}. \quad (3.6.31)$$

Расчет фазы поля  $S_+ = S_1 + iS_2$  предполагает дополнительное интегрирование при использовании равенства

$$S_+(x, t) \frac{r(x, t)}{r^*(x, t)} \exp(-i\alpha_0) = [\Psi_-(x, t, \lambda = 0)]_{21}. \quad (3.6.32)$$

В качестве иллюстрации эффективности метода еще раз получим солитонное решение, соответствующее доменной границе. В этом случае функция  $\Psi_-(\lambda)$  имеет единственный полюс в точке  $\lambda = i$ :

$$\Psi_-(\lambda) = I + \frac{2i}{\lambda - i} P, \quad (3.6.33)$$

где  $P$  — проекционная матрица с элементами

$$P_{\sigma\sigma'} = \frac{(m_0)_\sigma (m_0)_{\sigma'}^*}{|m_0|^2}, \quad \mathbf{m}_0 = \chi_2^{(0)}(x, t, \lambda = -i) \mathbf{c} = \exp\left(-\frac{\beta\sigma_3}{2}x\right) \mathbf{c}.$$

Из (3.6.31)–(3.6.33), полагая для определенности  $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ ,  $c_2 c_1^* = -|c_1 c_2|$ , воспроизводим решение, соответствующее доменной стенке:

$$S_3 = \text{th}[\beta(x - x_0)], \quad S_+ = \frac{\exp(i\alpha_0)}{\text{ch}[\beta(x - x_0)]}, \quad x_0 = \frac{1}{\beta} \ln \left| \frac{c_1}{c_2} \right|.$$

Используя явные формулы (3.6.31), (3.6.32), можно проверить, что взаимодействие доменной стенки с прецессирующими магнитными солитонами сводится к их упругим парным столкновениям друг с другом. После столкновений координаты «центров тяжести» солитонов и фазы их внутренней прецессии приобретают дополнительные постоянные сдвиги.

При  $\varepsilon = 1$  все построения аналогичны. Решения системы (3.2.2), (3.2.5)  $F_+(x, t, \lambda)$  и  $F_-(x, t, \lambda)$ , аналитические в областях  $\text{Im}\lambda \geq 0$  и  $\text{Im}\lambda \leq 0$ , имеют вид

$$F_+ = (\varphi_-^{(1)}, \varphi_+^{(2)}), \quad F_- = (\varphi_+^{(1)}, \varphi_-^{(2)}).$$

На вещественной  $\lambda$ -оси решения Йоста и функции  $F_{\pm}(\lambda)$  связаны соотношениями

$$\begin{aligned} F_+(\lambda) &= \varphi_+(\lambda)M_{++}(\lambda) = \varphi_-(\lambda)M_{-+}(\lambda); \\ F_-(\lambda) &= \varphi_+(\lambda)M_{+-}(\lambda) = \varphi_-(\lambda)M_{--}(\lambda), \end{aligned} \quad (3.6.34)$$

где

$$\begin{aligned} M_{++} &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{-+} = \begin{pmatrix} 1 & b^* \\ 0 & a \end{pmatrix}, \\ M_{+-} &= \begin{pmatrix} 1 & -b^* \\ 0 & a^* \end{pmatrix}, \quad M_{--} = \begin{pmatrix} a^* & 0 \\ -b & 1 \end{pmatrix}; \\ T(\lambda) &= M_{++}(\lambda)M_{-+}^{-1}(\lambda) = M_{+-}(\lambda)M_{--}^{-1}(\lambda). \end{aligned}$$

При  $\varepsilon = 1$  коэффициент  $a(\lambda)$  аналитически продолжается в область  $\text{Im}\lambda \geq 0$  и не зависит от времени. Эволюция коэффициента  $b(\lambda, t)$ :

$$b(\lambda, t) = b(\lambda, t = 0) \exp[-4i\omega_1^2(\lambda) t].$$

Необходимые редукции на функции  $F_{\pm}(\lambda)$  и их асимптотическое поведение в окрестности особых точек  $\lambda = 0$  и  $\lambda = \infty$  следуют из соответствующих результатов для функций  $\varphi_{\pm}(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} F_{\pm}^*(\lambda) &= \sigma_2 F_{\mp}(\lambda) \sigma_2, \\ \det F_+(\lambda) &= [\det F_-(\lambda)]^* = a(\lambda), \quad \text{Im}\lambda = 0; \\ F_{\pm}(-\lambda^{-1}) &= \sigma_3 F_{\pm}(\lambda) \sigma_3; \\ F_+(\lambda) &= \exp(-i\beta_0) \left[ g_1 + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right] \exp\left[\frac{1}{i}w_3(\lambda)\sigma_3 x\right], \\ F_-(\lambda) &= \left[ g_1 + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right] \exp\left[\frac{1}{i}w_3(\lambda)\sigma_3 x\right] \quad \text{при } |\lambda| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Здесь

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & -S_-(1+S_3)^{-1} \\ S_+(1+S_3)^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^* \exp(i\beta_0) \end{pmatrix}, \quad g_1^\dagger g_1 = I.$$

Задача сопряжения аналитических функций  $F_{\pm}(\lambda)$  на вещественной  $\lambda$ -оси имеет вид

$$F_{-}(x, t, \lambda) = \frac{1}{a(\lambda)} F_{+}(x, t, \lambda) \begin{pmatrix} 1 & -b^{*}(\lambda, t) \\ -b(\lambda, t) & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.6.35)$$

С помощью преобразований

$$\begin{aligned} \frac{1}{a(\lambda)} F_{+}(x, t, \lambda) &= g_1(x, t) \Psi_{+}^{-1}(x, t, \lambda) \exp \left[ \frac{1}{i} w_3(\lambda) x \sigma_3 \right], \\ F_{-}(x, t, \lambda) &= g_1(x, t) \Psi_{-}(x, t, \lambda) \exp \left[ \frac{1}{i} w_3(\lambda) x \sigma_3 \right] \end{aligned}$$

соотношение (3.6.35) сводим к формулировке задачи Римана:

$$\begin{aligned} \Psi_{+}(x, t, \lambda) \Psi_{-}(x, t, \lambda) &= \\ = \chi_2^{(0)}(x, t, \lambda) \begin{pmatrix} 1 & -b^{*}(\lambda, t=0) \\ -b(\lambda, t=0) & 1 \end{pmatrix} [\chi_2^{(0)}(x, t, \lambda)]^{-1}, \quad (3.6.36) \\ \Psi_{-}(\lambda) &= \Psi_{+}^{\dagger}(\lambda) \quad (\text{Im} \lambda = 0) \end{aligned}$$

с канонической нормировкой

$$\Psi_{\pm}(\lambda = \infty) = I$$

и нелинейной редукцией:

$$\begin{aligned} \Psi_{+}(-\lambda^{-1}) &= \sigma_3 \Psi_{+}(\lambda) \Psi_{+}^{\dagger}(\lambda = 0) \sigma_3, \\ \Psi_{-}(-\lambda^{-1}) &= \sigma_3 \Psi_{-}^{\dagger}(\lambda = 0) \Psi_{-}(\lambda) \sigma_3. \end{aligned} \quad (3.6.37)$$

При записи (3.6.37) учли равенство

$$g_1^{\dagger} \sigma_3 g_1 = \Psi_{+}^{-1}(\lambda = 0) \sigma_3 = \Psi_{-}(\lambda = 0) \sigma_3,$$

из которого, в свою очередь, следует, что

$$\Psi_{\pm}^{\dagger}(\lambda = 0) = \Psi_{\pm}^{-1}(\lambda = 0), \quad \Psi_{\pm}(\lambda = 0) = \sigma_3 \Psi_{\pm}^{\dagger}(\lambda = 0) \sigma_3.$$

В качестве «одетых» решений вспомогательной линейной системы (3.6.1) с требуемыми аналитическими свойствами выберем функции

$$\chi_{+}(\lambda) = g_1 \Psi_{+}^{-1}(\lambda) \chi_2^{(0)}(\lambda), \quad \chi_{-}(\lambda) = g_1 \Psi_{-}(\lambda) \chi_2^{(0)}(\lambda). \quad (3.6.38)$$

Рабочая формула для расчета новых решений уравнений Ландау–Лифшица (3.1.17) при  $\varepsilon = 1$  выглядит так:

$$\sigma_3 \Psi_{+}(\lambda = 0) = g_1^{\dagger} \sigma_3 g_1 = \begin{pmatrix} S_3 & -S_{-} \left( \frac{r^{*}}{r} \right) \exp(i\beta_0) \\ -S_{+} \left( \frac{r}{r^{*}} \right) \exp(-i\beta_0) & -S_3 \end{pmatrix}.$$

Для мультисолитонных состояний ( $b(\lambda, t = 0) \equiv 0$ ) задача Римана (3.6.36) решается явно:

$$[\Psi_+(\lambda)]_{\sigma\sigma'} = \delta_{\sigma\sigma'} - \sum_{p,s=1}^{2N} \frac{(m_p)_\sigma (m_s)_{\sigma'}^*}{\lambda - \lambda_p^*} (A^{-1})_{ps}.$$

Здесь  $\sigma, \sigma' = 1, 2$ ;  $(A^{-1})_{ij}$  — элементы  $2N \times 2N$ -матрицы, обратной по отношению к матрице с элементами  $A_{ij}$ :

$$A_{ij} = \frac{(\mathbf{m}_i^* \cdot \mathbf{m}_j)}{\lambda_i - \lambda_j^*}; \quad (A^{-1})_{ij} = \frac{\partial \ln \det A}{\partial A_{ji}};$$

$$\mathbf{m}_\alpha = \chi_2^{(0)}(x, t, \lambda_\alpha^*) \mathbf{c}_\alpha, \quad \mathbf{m}_{\alpha+N} = \sigma_3 \mathbf{m}_\alpha,$$

$$\lambda_{\alpha+N} = -\lambda_\alpha^{-1} \quad (\lambda_\alpha \neq i, \quad \text{Im} \lambda_\alpha > 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N),$$

$\mathbf{c}_\alpha$  — произвольные постоянные двумерные комплексные векторы.

Простейшее из мультисолитонных состояний, соответствующее паре полюсов функции  $\Psi_+(\lambda)$  в точках  $\lambda = \lambda_1^*$  и  $\lambda = -(\lambda_1^*)^{-1}$ , совпадает с найденным ранее путем более утомительной процедуры прецессирующим магнитным солитоном (3.4.19), (3.4.22).

### 3.7. Вынужденное движение доменной стенки в поле нелинейной спиновой волны

*...Любая сложная задача всегда вызывает у исследователя желание ее решить. Нам кажется, что удовольствие от решения сложной задачи растет значительно быстрее, чем сложность задачи. Здесь также проявляется нелинейность, характерная для всех законов природы.*

*В. Г. Барьяхтар, Б. А. Иванов.  
«В мире магнитных доменов»*

#### 3.7.1. Постановка задачи

Модель легкоосного ферромагнетика содержит запрет на движение доменной стенки. В этом нетрудно убедиться, если переписать уравнения Ландау–Лифшица (3.1.17) в виде

$$\begin{aligned} \partial_t S_3 &= \frac{i}{2} \partial_x [S_+ \partial_x S_- - S_- \partial_x S_+], \\ \partial_t S_+ &= i \partial_x [S_3 \partial_x S_+ - S_+ \partial_x S_3] - i \beta^2 S_3 S_+, \end{aligned} \quad (3.7.1)$$



где  $S_{\pm} = S_1 \pm iS_2$ . Согласно первому уравнению (3.7.1), проекция полного магнитного момента среды на ось анизотропии должна оставаться неизменной:

$$I = \int_{-L}^L S_3(x, t) dx = \text{const}, \quad (3.7.2)$$

где  $2L$  — размер образца. Перемещение доменной стенки неизбежно изменит величину  $I$ . Именно это обстоятельство приводит к запрету на ее движение. При учете внешнего магнитного поля, направленного вдоль оси анизотропии, закон сохранения (3.7.2) также справедлив, а значит, движение стенки тоже невозможно.

Наиболее известный механизм движения доменной стенки во внешнем магнитном поле, направленном вдоль оси анизотропии, предполагает возникновение магнитостатического поля, обусловленного некруговой прецессией намагниченности вокруг внешнего магнитного поля [6, 7]. При учете магнитостатического поля, ортогонального поверхности стенки, закон сохранения проекции намагниченности на ось анизотропии нарушается, а значит, снимается запрет на движение доменной границы. При стационарном движении доменной стенки энергия, получаемая стенкой от внешнего поля, компенсирует диссипативные потери.

В этом разделе обсуждается другой механизм движения доменной стенки, когда она не закреплена дефектами и взаимодействует с бегущей нелинейной спиновой волной. Рассматриваемый сценарий стационарного движения стенки реализуется даже в пренебрежении магнитостатическими взаимодействиями и процессами релаксации. Полученные в этой главе аналитические решения не противоречат качественным выводам [6, 7] и согласуются с результатами работы [8] по возбуждению и управлению движением малоамплитудных солитонов в поле циркулярно-поляризованной волны. Приведем аргументы [9] в пользу того, что процесс взаимодействия доменной стенки с пакетом спиновых волн приводит к ее смещению, а в поле бегущей спиновой волны стенка обязана двигаться навстречу волне.

Пусть локализованный пакет спиновых волн движется слева направо и до столкновения со стенкой дает положительный вклад  $I_0$  в закон сохранения (3.7.2). Значение  $I_0$  соответствует площади, заштрихованной на рис. 3.8, а. Затем пакет частично проходит сквозь стенку, а частично отражается от нее (рис. 3.8, б). Вклад в закон сохранения (3.7.2) от прошедшей через стенку волны отрицателен и равен  $-I_1$ , а вклад  $I_2$  отраженной волны — положителен. Площади, соответствующие величинам  $I_1$  и  $I_2$ , на рис. 3.8, б заштрихованы. Амплитуда отраженной волны не может быть слишком большой (это противоречит закону сохранения энергии). Поэтому возникает дисбаланс:

$$\Delta I = I_0 - (I_2 - I_1) = I_0 + I_1 - I_2 > 0,$$

который можно компенсировать только сдвигом доменной стенки влево. В самом деле, при сдвиге влево на  $\Delta x$  интеграл (3.7.2) изменяется на величину  $\Delta I \cong 2\Delta x$ , приблизительно равную площади заштрихованного параллелограмма на рис. 3.8, б. Отсюда величина сдвига доменной стенки равна

$$\Delta x = \frac{1}{2}(I_0 + I_1 - I_2).$$

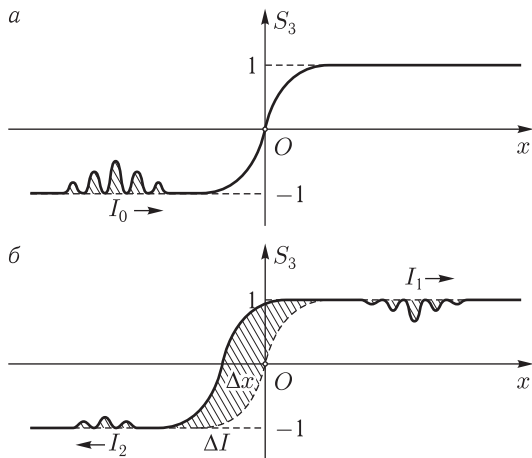


Рис. 3.8. Взаимодействие доменной стенки со спин-волновым импульсом в ферромагнетике с анизотропией типа «легкая ось»: *а* — положение спин-волнового пакета до столкновения с доменной стенкой, *б* — после столкновения

Приведенное рассуждение является общим и не требует малости амплитуды спиновой волны. В реальных кристаллах более сложная анизотропия, процессы диссипации энергии, дефекты решетки, а также поверхностные и размерные эффекты могут разрушить интеграл (3.7.2). Однако если время прохождения локализованного спин-волнового импульса через доменную стенку много меньше времени, необходимого для разрушения интеграла (3.7.2), то приведенные соображения остаются в силе.

Методом «одевания» в работе [10] найдено явное решение модели (3.7.1), описывающее взаимодействие доменной стенки с нелинейной волной прецессии большой амплитуды. В этом и следующем разделах, следуя [11–14], мы модифицируем вычисления работы [10] так, чтобы сделать более простыми и наглядными аналитические свойства матричных функций задачи Римана. Для этого потребуются аппарат теории эллиптических функций, который чрезвычайно полезен для дальнейших обобщений метода «одевания». Этим методом удастся аналитически описывать не только локализованные в пространстве

солитоны, но и более общие нелокализованные солитоноподобные состояния.

Впервые «одевание» посредством интегральных операторов Шабата применялось Кузнецовым и Михайловым [15] для изучения солитоноподобных возбуждений на пьедестале кноидальной волны в средах, описывающихся моделью Кортевега–де Вриза. В работе [16] на основе решения задачи Римана аналитически описаны солитоны в неколлинеарных ферри- и антиферромагнетиках на фоне бегущих навстречу друг другу нелокализованных волн намагниченности. В [17] проанализировано взаимодействие бегущих волн прецессии с солитонами в квазиодномерном ферромагнетике с анизотропией типа «легкая плоскость». Установлено, что волны приводят к амплитудной и фазовой модуляции солитонов, а при определенных условиях — «разрушают» солитоны. Эти результаты изложены в главах 4 и 7 данной книги. Родственное методу «одевания» преобразование Дарбу применялось для построения решений волнового уравнения sine-Gordon, которые описывают доменные границы, движущиеся между двумя пространственно однородными, но периодическими во времени состояниями [18]. Тем же методом в рамках волнового уравнения sh-Gordon проанализировано взаимодействие «темных» солитонов с однородными колебаниями ненулевого вакуума [19, 20]. В средах, динамика которых описывается нелинейным уравнением Шредингера, особенности взаимодействия солитонов и излучения изучались в [21] аналитическими и численными методами.

Рассмотрим образец, в котором имеются две однородно намагниченные области, разделенные доменной стенкой. Толщина стенки мала, поэтому можно считать, что  $\mathbf{S} \rightarrow (0, 0, 1)$  при  $x \rightarrow +\infty$  и  $\mathbf{S} \rightarrow (0, 0, -1)$  при  $x \rightarrow -\infty$ . Если в образце возбуждена спиновая волна, то указанные асимптотики изменяются следующим образом:

$$\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}_0^{(\pm)} \quad \text{при} \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad (3.7.3)$$

где

$$\mathbf{S}_0^{(\pm)} = (\sin \theta_0 \cos \varphi_{\pm}, \pm \sin \theta_0 \sin \varphi_{\pm}, \pm \cos \theta_0). \quad (3.7.4)$$

Угол  $\theta_0$  характеризует амплитуду волны,  $\varphi_{\pm} = px - \omega t + \delta_{\pm}$ ,  $p$  — волновое число,  $\omega = \cos \theta_0(p^2 + \beta^2)$  — частота прецессии, фазовые сдвиги  $\delta_+$  и  $\delta_-$ , как выяснится в дальнейшем, связаны с топологией доменной стенки.

В рассматриваемом случае волна (3.7.4) модуляционно неустойчива. Начальную стадию развития неустойчивости можно изучить, используя анализ устойчивости по линейному приближению относительно малой периодической модуляции. Малые возмущения волны накачки (3.7.4)  $\sim \exp(i\tilde{\omega}t + i\tilde{p}x)$ , где  $\tilde{p}$  — вещественное число, имеют закон дисперсии:

$$\tilde{\omega}(\tilde{p}) = -2p\tilde{p} \cos \theta_0 \pm \tilde{p} \sqrt{p^2 - \nu^2}, \quad \nu^2 = \sin^2 \theta_0(p^2 + \beta^2). \quad (3.7.5)$$

Инкремент нарастания возмущений  $\delta = |\tilde{p}| \sqrt{\nu^2 - \tilde{p}^2}$  вещественен в интервале волновых чисел  $-\nu < \tilde{p} < \nu$ . Его максимальное значение  $\delta_{\max}$  связано с минимальным временем  $\tau_{\min}$ , за которое возмущение волны возрастает в  $e$  раз:  $\delta_{\max} = \tau_{\min}^{-1} = \nu^2/2$ .

Волна (3.7.4) проходит через образец длиной  $2L$  за время  $T = 2Lp/\omega$ . Ввиду неустойчивости волны ее взаимодействие с солитонами можно рассматривать только при условии  $\tau_{\min} > T$ , которое приводит к ограничению на параметры задачи:

$$\frac{pL \sin^2 \theta_0}{\cos \theta_0} < 1.$$

С физической точки зрения волна (3.7.4) генерируется на границе ферромагнетика внешним источником и взаимодействует с доменными границами, зародышами перемагничивания или бризерами, которые изначально имеются в образце. Длина образца, с одной стороны, должна быть достаточно большой, чтобы можно было не описывать механизм возбуждения волны на границе образца, а с другой — достаточно малой, чтобы неустойчивость волны не успела развиться.

Отметим, что нелинейные волны (3.7.4), сами по себе, являются точными решениями уравнений Ландау–Лифшица (3.1.17). Наша цель состоит в том, чтобы методом «одевания» построить новое решение уравнений Ландау–Лифшица, удовлетворяющее асимптотическим краевым условиям (3.7.3) и, тем самым, описывающее взаимодействие доменной стенки с волной прецессии большой амплитуды.

Для распределений намагниченности (3.7.4) вспомогательная линейная система

$$\begin{aligned} \partial_t \chi &= -i \{ w_1 ([\mathbf{S} \times \partial_x \mathbf{S}]_1 \sigma_1 + [\mathbf{S} \times \partial_x \mathbf{S}]_2 \sigma_2) + \\ &\quad + w_3 [\mathbf{S} \times \partial_x \mathbf{S}]_3 \sigma_3 - 2w_1^2 S_3 \sigma_3 - \\ &\quad - 2w_1 w_3 (S_1 \sigma_1 + S_2 \sigma_2) \} \chi \equiv V \chi, \\ \partial_x \chi &= -i \{ w_1 (S_1 \sigma_1 + S_2 \sigma_2) + w_3 S_3 \sigma_3 \} \chi \equiv U \chi, \end{aligned} \quad (3.7.6)$$

где

$$w_1 = \frac{\beta}{4} \left( \lambda + \frac{1}{\lambda} \right), \quad w_3 = \frac{\beta}{4} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda} \right),$$

имеет точные решения:

$$\begin{aligned} \chi_{1,2}^{(0)}(\lambda, x, t) &= \alpha(\lambda, \tau) \exp \left( \pm \frac{i\sigma_3 \varphi \mp}{2} \right) \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} 1 & \pm \Delta(\lambda, \tau) \\ \mp \Delta(\lambda, \tau) & 1 \end{pmatrix} \exp \left( \mp \frac{\tau}{i} \sigma_3 \eta \right). \end{aligned} \quad (3.7.7)$$

Здесь введены обозначения:

$$\Delta(\lambda, \tau) = \frac{\tau - (w_3 \cos \theta_0 - p/2)}{w_1 \sin \theta_0} = \frac{w_1 \sin \theta_0}{\tau + w_3 \cos \theta_0 - p/2},$$

$$\tau = [(w_3 \cos \theta_0 - p/2)^2 + w_1^2 \sin^2 \theta_0]^{1/2}, \quad \eta = x - (2w_3 + p \cos \theta_0)t.$$

Множитель  $\alpha(\lambda, \tau)$  в дальнейшем подберем так, чтобы упростить вычисления.

### 3.7.2. Свойства решений Йоста. Метод «одевания»

Определим функции Йоста  $\chi_1$  и  $\chi_2$  задачи о взаимодействии доменной стенки со спиновой волной как решения системы (3.7.6), имеющие следующее асимптотическое поведение:

$$\chi_{1,2} \rightarrow \chi_{1,2}^{(0)} \quad \text{при} \quad x \rightarrow \mp \infty. \quad (3.7.8)$$

Перейдем от задачи (3.7.6), (3.7.8) к эквивалентным интегральным уравнениям для расчета функций Йоста:

$$\begin{aligned} \chi_1(\lambda, x) = \chi_1^{(0)}(\lambda, x) & \left( I + \int_{-\infty}^x [\chi_1^{(0)}(\lambda, x')]^{-1} \times \right. \\ & \left. \times [U(\lambda, x') - U_1(\lambda, x')] \chi_1(\lambda, x') dx' \right), \\ \chi_2(\lambda, x) = \chi_2^{(0)}(\lambda, x) & \left( I - \int_x^{+\infty} [\chi_2^{(0)}(\lambda, x')]^{-1} \times \right. \\ & \left. \times [U(\lambda, x') - U_2(\lambda, x')] \chi_2(\lambda, x') dx' \right). \end{aligned} \quad (3.7.9)$$

Здесь  $U_{1,2}$  — значения  $U$ -оператора при  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_0^{(\mp)}$ . Посредством итераций решения уравнений (3.7.9) можно представить в виде формальных рядов по степеням функций  $\chi_{1,2}^{(0)}$ . Анализ рядов приводит к заключению, что аналитические свойства решений Йоста формулируются на двулистной римановой поверхности функции  $\tau = \tau(\lambda)$ . Риманова поверхность возникает как естественная область определения «затравочных» матричных функций  $\chi_{1,2}^{(0)}(\lambda)$  (3.7.7). Как и в других задачах, свойства аналитичности решений Йоста являются простыми следствиями аналитических свойств функций  $\chi_{1,2}^{(0)}(\lambda)$  и расстановки пределов интегрирования по переменной  $x$  в представлениях (3.7.9).

Далее мы увидим, что существование доменной границы предполагает наличие у функций задачи Римана полюсов в четырех точках римановой поверхности, лежащих над значениями спектрального параметра  $\lambda = \pm i$ . Ситуация осложняется тем, что «затравочные» функции (3.7.7) имеют полюсы в тех же точках.

Для построения решения, описывающего взаимодействие доменной стенки со спиновой волной, необходимо сформулировать правила, в со-

ответствии с которыми преобразуются точки римановой поверхности при операциях, связанных с комплексным сопряжением, и преобразованиях, сохраняющих неизменной форму записи вспомогательной линейной системы (3.7.6). В работе [10] перед формулировкой таких правил проведена замена спектрального параметра. После этого вместо функции  $\tau = \tau(\lambda)$  возникла другая функция, по-прежнему представляющая квадратный корень из полинома четвертой степени, но от нового спектрального параметра. Разумеется, такая смена параметров не дает ответов на вопросы о том, какие знаки следует выбирать перед квадратным корнем после преобразований симметрии вспомогательной линейной системы, или же после операций, связанных с комплексным сопряжением.

Во избежание подобных трудностей выберем спектральный параметр иначе. Воспользуемся тем, что любая рациональная функция от переменных  $\lambda, y$ :  $f(\lambda, y)$ , где  $y = \sqrt{R(\lambda)}$ , а  $R(\lambda)$  — полином по  $\lambda$  степени три или четыре, всегда может быть представлена в параметрической форме в терминах двоякопериодических аналитических функций Якоби, имеющих лишь полюсные особенности. Формулы связи исходных переменных  $\lambda, y$  с «униформизирующей» переменной  $u$ :

$$\lambda = \lambda(u), \quad y = y(u)$$

классифицированы в справочниках. В нашей задаче имеем [22]:

$$\begin{aligned} \lambda &= (k')^{-1/2} \operatorname{tg} \frac{\theta_0 + \theta_4}{2} \left[ \frac{i \operatorname{dn}(u + iK') + k' \operatorname{ctg}((\theta_0 + \theta_4)/2)}{i \operatorname{dn}(u + iK') - \operatorname{tg}((\theta_0 + \theta_4)/2)} \right], \\ \tau &= \frac{i\beta k^2 \sin \theta_0 [\sin(\theta_0 - \theta_4) \sin(\theta_0 + \theta_4)]^{-1/2}}{[i \operatorname{dn}(u + iK') + k' \operatorname{ctg}((\theta_0 + \theta_4)/2)]} \times \\ &\quad \times \frac{\operatorname{cn}(u + iK') \operatorname{sn}(u + iK')}{[i \operatorname{dn}(u + iK') - \operatorname{tg}((\theta_0 + \theta_4)/2)]}. \end{aligned} \quad (3.7.10)$$

В формулах (3.7.10) угол  $0 \leq \theta_4 \leq \theta_0$  определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \theta_4 = \kappa(1 + \kappa^2)^{-1/2} \operatorname{tg} \theta_0, \quad \kappa = p/\beta.$$

Модуль  $k$  эллиптических функций Якоби  $\operatorname{sn} u$ ,  $\operatorname{cn} u$ ,  $\operatorname{dn} u$  имеет вид

$$k = \frac{2\sqrt{\cos \theta_0 \cos \theta_4}}{\cos \theta_0 + \cos \theta_4}.$$

При этом дополнительный модуль

$$k' = \sqrt{1 - k^2} = \operatorname{tg} \frac{\theta_0 + \theta_4}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta_0 - \theta_4}{2}.$$

В комплексной  $u$ -плоскости функции  $\lambda = \lambda(u)$  и  $\tau = \tau(u)$  (3.7.10) являются мероморфными двоякопериодическими функциями с периодами  $2K, 4iK'$ , где  $K = K(k)$ ,  $K' = K(k')$  — полные эллиптические интегралы первого рода.

Хотя функции Якоби наиболее популярны среди эллиптических функций, они не удобны при конкретных вычислениях. Все расчеты проще проводить с помощью функций Вейерштрасса, и лишь на конечных этапах вычислений записывать результат в терминах хорошо изученных и табулированных функций Якоби [23]. Техника работы с эллиптическими функциями поясняется в приложении.

Аналитические свойства решений Йоста будут проще, если в формулах (3.7.7) в качестве общего множителя выбрать  $\alpha(\lambda(u), \tau(u)) = \beta(-u)$ . Представление  $\beta(u)$  в терминах дзета-функций Вейерштрасса и эллиптических функций Якоби получено в приложении:

$$\begin{aligned} \beta(u) &= \zeta(u + iK' + K/2) - \zeta(u - 3iK' + K/2) - \eta_3 = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\operatorname{cn}(\nu, k)}{\operatorname{sn}(\nu, k)} - k' \frac{\operatorname{sn}(\nu, k)}{\operatorname{cn}(\nu, k)} \right) \Big|_{\nu=(u+iK'+K/2)/2}. \end{aligned}$$

Здесь периоды дзета-функций равны  $2K, 8iK'$  и  $\eta_3 = \zeta(4iK'|K, 4iK')$ , после вертикальной черты принято указывать половинки примитивных периодов [22, 23]. В приложении приведены полезные при расчетах тождества для функций  $\beta(-u)$ ,  $\beta^*(u^*)$ ,  $\beta(u)$ . В терминах спектрального параметра  $u$  «затравочные» матричные функции примут вид

$$\chi_{1,2}^{(0)}(u) = \exp\left(\pm \frac{i\sigma_3}{2} \varphi_{\mp}\right) \begin{pmatrix} \beta(-u) & \pm \beta(u) \\ \mp \beta(u) & \beta(-u) \end{pmatrix} \exp\left(\mp \frac{\tau}{i} \sigma_3 \eta\right). \quad (3.7.11)$$

Функции (3.7.11), а значит и решения Йоста  $\chi_{1,2}(u)$ , являются двоякопериодическими функциями с периодами  $2K, 8iK'$ . Поскольку  $\chi_{1,2}(u + 4iK') = -\chi_{1,2}(u)$ , аналитические свойства решений Йоста достаточно исследовать в пределах ячейки периодичности функции  $\tau = \tau(u)$ , т. е. в пределах прямоугольника со сторонами  $2K, 4iK'$ .

Построение решений Йоста, а значит интегрирование исходного нелинейного уравнения Ландау–Лифшица далее сведено к решению задачи Римана для двоякопериодических функций комплексной переменной  $u$ . Такую задачу называют задачей Римана на торе. Подчеркнем принципиальное отличие рассматриваемого уравнения (3.2.7) от тех, что были проинтегрированы первыми с привлечением задачи Римана на торе (см. [24–26]), результаты изложены в главах 5 и 7). В работах [24–26] изучались солитоны на однородном фоне, но в средах с сильной дисперсией. Для линейных мод зависимость частоты  $\omega$  от волнового числа  $k$  имела вид  $\omega = \sqrt{P_4(k)}$ , где  $P_4(k)$  — полином четвертой степени по  $k$ . Это проявлялось в усложнении  $U$ – $V$ -пар: матрицы  $U(\lambda)$  и  $V(\lambda)$  зависели от спектрального параметра  $\lambda$  не через рациональные функции, а через двоякопериодические эллиптические

функции Якоби. Указанная особенность и приводила к задаче Римана на торе. В рассматриваемом случае  $U$ - $V$ -операторы (3.1.15), (3.1.18) имеют рациональную зависимость от параметра  $\lambda$ . Появление задачи Римана на торе при интегрировании уравнения (3.2.7) имеет другое происхождение: оно связано с учетом неоднородного периодического фона в виде волны накачки.

Осциллирующие при  $|x| \rightarrow \infty$  решения Йоста существуют лишь тогда, когда значения спектрального параметра  $u$  лежат на контуре  $\Gamma = \{u : \text{Im} \tau(u) = 0\}$ . Множество  $\Gamma$  соответствует непрерывному спектру задачи рассеяния, связанной с решениями Йоста.

На рис. 3.9 угловые точки контура  $\Gamma$  с номерами 1, 2, ..., 7 имеют координаты

$$\begin{aligned} & -\tilde{u} - K, \quad -\tilde{u}, \quad \tilde{u} - 2iK', \quad \tilde{u} + K - 2iK', \\ & -\tilde{u} + K, \quad \tilde{u} + 2iK', \quad \tilde{u} - K + 2iK', \end{aligned}$$

где  $0 < \tilde{u} < K$  — корень уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\text{cn} \tilde{u}}{\text{sn} \tilde{u}} &= \frac{1}{1-\gamma} \left[ \text{tg} \frac{\theta_0 - \theta_4}{2} + \gamma \text{tg} \frac{\theta_0 + \theta_4}{2} \right], \\ \gamma &= \frac{\kappa \cos \theta_0 + \sqrt{\kappa^2 \cos^2 \theta_0 + 1}}{\kappa + \sqrt{1 + \kappa^2}}, \quad \kappa = \frac{p}{\beta}. \end{aligned}$$

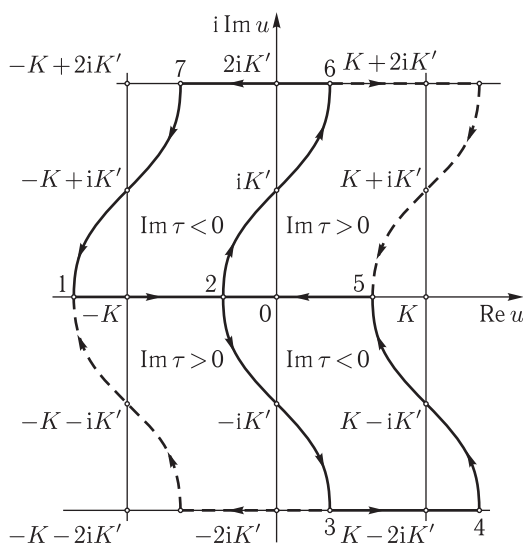


Рис. 3.9. Область аналитичности функции Йоста. Сплошной линией обозначен контур  $\Gamma$ , слева от которого  $\text{Im} \tau(u) < 0$ , штриховой — контур, эквивалентный контуру  $\Gamma$ , справа от которого  $\text{Im} \tau(u) > 0$



Участки контура  $\Gamma$ , которые на рис. 3.9 вышли за пределы фундаментального прямоугольника, можно вернуть внутрь прямоугольника посредством трансляций на примитивные периоды решетки. Отметим, что в  $u$ -плоскости в качестве контура  $\Gamma$  можно взять любой контур, совпадающий с приведенным на рисунке после трансляций  $2Km + 4iK'm'$ , где  $m, m'$  — целые числа.

Функции  $\lambda(u)$ ,  $\tau(u)$ ,  $\beta(u)$ ,  $\beta(-u)$  обладают следующими трансформационными свойствами:

$$\begin{aligned} \lambda(-u + 2iK') &= \lambda(u), \quad \tau(-u + 2iK') = -\tau(u); \\ \lambda(u + K) &= -\lambda^{-1}(u), \quad \tau(u + K) = -\tau(u); \\ \lambda^*(u^*) &= \lambda(u), \quad \tau^*(u^*) = \tau(u), \\ 2\beta^*(\pm u^*)\beta(\mp u) &= (1 + k')\sqrt{k'}; \\ \beta(-u + 2iK') &= \beta(u), \quad \beta[-(-u + 2iK')] = -\beta(-u); \\ \beta^*[-(-u + 2iK')^*] &= \beta(-u), \quad \beta^*[-(-u + 2iK')^*] = -\beta(u). \end{aligned} \quad (3.7.12)$$

Используя соотношения (3.7.12), нетрудно доказать справедливость следующих редукций на решения Йоста:

$$\begin{aligned} \chi_{1,2}(-u + K + 2iK') &= -\sigma_3 \chi_{1,2}(u) \sigma_3; \\ \chi_{1,2}^*[-(-u + 2iK')^*] &= \pm i \sigma_2 \chi_{1,2}(u); \\ \chi_{1,2}^*(u^*) &= \frac{(1 + k')\sqrt{k'}}{2\beta(u)\beta(-u)} \sigma_2 \chi_{1,2}(u) \sigma_2 \quad (u \in \Gamma). \end{aligned} \quad (3.7.13)$$

Доказательство формул (3.7.13), как и ранее, основано на использовании теоремы единственности решений линейных дифференциальных уравнений с одинаковыми асимптотическими условиями.

На контуре  $\Gamma$  базисные решения Йоста должны быть связаны между собой:

$$\chi_1(u) = \chi_2(u) T(u). \quad (3.7.14)$$

Редукции (3.7.13) конкретизируют вид матрицы перехода:

$$T(u) = \begin{pmatrix} a(u) & -b^*(u^*) \\ b(u) & a^*(u^*) \end{pmatrix}, \quad a(u)a^*(u^*) + b(u)b^*(u^*) = 1. \quad (3.7.15)$$

Функции  $a(u)$  и  $b(u)$  не изменяются при трансляциях  $2Km + 4iK'm'$ , где  $m, m'$  — произвольные целые числа, и удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} a(-u + K + 2iK') &= a(u), \quad b(-u + K + 2iK') = -b(u); \\ a^*[-(-u + 2iK')^*] &= -a(u), \quad b^*[-(-u + 2iK')^*] = -b(u). \end{aligned} \quad (3.7.16)$$

Анализ формальных рядов, полученных итерациями из интегральных уравнений (3.7.9), приводит к заключению, что матричные функции

$$\chi_+(u) = \left( \chi_1^{(2)}(u), \chi_2^{(2)}(u) \right), \quad \chi_-(u) = \left( \chi_2^{(1)}(u), \chi_1^{(1)}(u) \right)$$

допускают аналитическое продолжение с контура  $\Gamma$  в области  $\Gamma_+ = \{u : \text{Im}\tau > 0\}$  и  $\Gamma_- = \{u : \text{Im}\tau < 0\}$  соответственно. Здесь верхние индексы 1, 2 нумеруют столбцы матричных функций Йоста.

Две первые редукции (3.7.13) не меняют столбцов матриц Йоста и потому переносятся с контура  $\Gamma$  в области аналитичности функций  $\chi_{\pm}(u)$ :

$$\begin{aligned}\chi_{\pm}(-u + K + 2iK') &= \pm\sigma_3\chi_{\pm}(u), \\ \chi_{\pm}^* [(-u + 2iK')^*] &= \pm i\sigma_2\chi_{\pm}(u)\sigma_3.\end{aligned}\quad (3.7.17)$$

Последнее соотношение (3.7.13) можно переписать в терминах  $\chi_{\pm}(u)$  лишь на контуре  $\Gamma$ :

$$\chi_{\pm}^*(u^*) = \mp \frac{(1+k')\sqrt{k'}}{2\beta(u)\beta(-u)} i\sigma_2\chi_{\mp}(u)\sigma_1 \quad (u \in \Gamma). \quad (3.7.18)$$

На контуре  $\Gamma$  все базисные решения связаны между собой:

$$\chi_- = \chi_2 M_{+-} = \chi_1 M_{--} i\sigma_2, \quad \chi_+ = -\chi_2 \sigma_3 M_{++} = \chi_1 M_{-+} \sigma_1. \quad (3.7.19)$$

Матрицы  $M$  имеют такую же форму записи, что и в случае доменной стенки в отсутствие спиновой волны:

$$\begin{aligned}M_{+-} &= \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad M_{--} = \begin{pmatrix} 1 & -a^* \\ 0 & b \end{pmatrix}, \\ M_{++} &= \begin{pmatrix} b^* & 0 \\ a^* & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{-+} = \begin{pmatrix} b^* & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Связь решений Йоста на контуре  $\Gamma$  (3.7.14) эквивалентна условию сопряжения функций  $\chi_{\pm}(u)$  на том же контуре:

$$\chi_-(u) = -\frac{1}{b^*(u^*)} \chi_+(u) \sigma_3 \begin{pmatrix} 1 & a(u) \\ a^*(u^*) & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.7.20)$$

Нетрудно показать (см. (3.7.19)), что

$$b(u) = \frac{\det \chi_-(u)}{\det \chi_2^{(0)}(u)}, \quad b^*(u^*) = -\frac{\det \chi_+(u)}{\det \chi_1^{(0)}(u)}. \quad (3.7.21)$$

Отсюда следует, что элементы матрицы перехода  $b(u)$  и  $b^*(u^*)$  могут быть аналитически продолжены с контура  $\Gamma$  в области  $\Gamma_-$  и  $\Gamma_+$  соответственно, за исключением, может быть, точек, где

$$\det \chi_1^{(0)}(u) = \det \chi_2^{(0)}(u) = \beta^2(u) + \beta^2(-u) \quad (3.7.22)$$

обращается в нуль.

Нули коэффициентов  $b(u)$  и  $b^*(u^*)$  отвечают дискретному спектру вспомогательной линейной системы (3.7.6). В силу редукций (3.7.16), у функции  $b(u)$  имеются два особых нуля:

$$u = iK' - K/2, \quad -iK' + K/2 \pmod{(2K, 4iK')} \quad (3.7.23)$$

и множество нулей вида

$$u = \mu_s, \quad -\mu_s^* - 2iK', \quad \mu_s^* + K, \\ -\mu_s - K + 2iK' \pmod{(2K, 4iK')}, \quad (3.7.24)$$

где  $\mu_s \in \Gamma_-$  — комплексные параметры,  $s = 1, 2, \dots, N$ . Особые нули (3.7.23) присутствуют всегда, так как гарантируют существование доменной стенки. Дополнительных нулей (3.7.24) может и не быть, так как они связаны с возбуждением бризеров на фоне спиновой волны.

Нули функции  $b^*(u^*)$  оказываются комплексно сопряженными по отношению к нулям функции  $b(u)$ .

Далее нас интересуют солитоноподобные возбуждения, для которых коэффициенты отражения равны нулю:

$$a(u) = a^*(u^*) = 0.$$

В этом случае условие унимодулярности матрицы перехода приобретает простой вид:

$$b(u)b^*(u^*) = 1. \quad (3.7.25)$$

Среди множества солитонных решений уравнений Ландау–Лифшица особый интерес вызывает решение, описывающее взаимодействие доменной стенки со спиновой волной в отсутствии бризеров. Как уже отмечалось, такое решение определяется специфическими нулями (3.7.23) функции  $b(u)$ . Для солитонных решений функция  $b(u)$  оказывается мероморфной в  $u$ -плоскости. Из формулы (3.7.25) следует, что ее полюсы совпадают с нулями функции  $b^*(u^*)$ , которые суть

$$u = \pm(iK' + K/2) \pmod{(2K, 4iK')}.$$

Используя теорему о разложении эллиптической функции на множители (см. приложение), восстановим явный вид функции  $b(u)$ :

$$b(u) = \theta \exp(8iK'\eta_1) \frac{\sigma(u - iK' + K/2)\sigma(u + iK' - K/2)}{\sigma(u + iK' + K/2)\sigma(u - iK' - K/2)}.$$

Здесь  $\theta = \pm 1$ , сигма-функции Вейерштрасса имеют периоды  $2K, 4iK'$ ;  $\eta_1 = \zeta(K|K, 2iK')$ .

Непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости эквивалентных представлений (см. приложение):

$$b(u) = i\theta(\operatorname{sn}v - i\operatorname{cn}v)(\operatorname{sn}w - i\operatorname{cn}w) \Big|_{v=u+K/2, w=-u+K/2} = \\ = -\theta \left( \frac{i+1}{i-1} \right) \left( \frac{\operatorname{dn}u - i\sqrt{k'}}{\operatorname{dn}u + i\sqrt{k'}} \right) = -\frac{2\theta\beta(u)\beta(-u)}{\sqrt{k'}(1+k')}. \quad (3.7.26)$$

Для построения интересующего нас решения уравнений Ландау–Лифшица, применим метод «одевания» с той лишь разницей [10], что «одевать» будем не точное решение  $U$ – $V$ -уравнений (3.7.6), а функцию

$$\exp(-i\tau\sigma_3\eta), \quad (3.7.27)$$

где  $\eta = x - (2w_3 + p \cos \theta_0)t$ . Далее показано, что функция (3.7.27) содержит все существенные особенности, которые необходимы для восстановления  $U$ – $V$ -пары и решений  $\chi_{\pm}(u, x, t)$ .

Решение  $\chi_{-}(u)$  будем искать в виде

$$\chi_{-}(u) = \Psi(u) \exp(-i\tau\sigma_3\eta). \quad (3.7.28)$$

Единственными особенностями функции  $\Psi(u)$  в  $u$ -плоскости являются полюсы в точках  $u = \pm(K/2 + iK')$ ,  $\text{mod}(2K, 4iK')$ .

Согласно формулам (3.7.12), (3.7.17) матричная функция  $\Psi(u)$  должна удовлетворять редукциям

$$\begin{aligned} \Psi(-u + K + 2iK') &= -\sigma_3 \Psi(u), \\ \Psi^* [(-u + 2iK')^*] &= -i\sigma_2 \Psi(u) \sigma_3. \end{aligned} \quad (3.7.29)$$

Покажем, что условие сопряжения на контуре  $\Gamma$  аналитических функций  $\chi_{\pm}(u)$  (3.7.20) можно переписать в терминах одной лишь функции  $\Psi(u)$ . Для этого с помощью тождества, справедливого для любой невырожденной  $2 \times 2$ -матрицы  $\chi_{+}$ :

$$\chi_{+}^{-1} = \frac{1}{\det \chi_{+}} \sigma_2 \chi_{+}^{\tau} \sigma_2,$$

и соотношений (3.7.18), (3.7.21), (3.7.22) установим связь между функциями  $\chi_{+}^{-1}(u)$  и  $\chi_{-}^{\dagger}(u^*)$  на контуре  $\Gamma$ :

$$\chi_{+}^{-1}(u) = -\frac{1}{b^*(u^*)} \frac{2\beta(u)\beta(-u)\chi_{-}^{\dagger}(u^*)}{(1+k')\sqrt{k'}[\beta^2(u) + \beta^2(-u)]}. \quad (3.7.30)$$

Используя связь (3.7.30) и формулы (3.7.20), (П.17), находим, что при  $a = a^* = 0$ :

$$\Psi^{\dagger}(u^*)\Psi(u) = [\beta(u)\beta^*(u^*) + \beta(-u)\beta^*(-u^*)] I \quad (u \in \Gamma). \quad (3.7.31)$$

Для дальнейшего анализа полезно знать асимптотическое поведение функции  $\chi_{-}(x, t, u)$  при  $u \in \Gamma$  и  $x \rightarrow \pm\infty$ , которое нетрудно извлечь из формул (3.7.19):

$$\begin{aligned} \chi_{-} &\rightarrow \exp\left(\frac{i\sigma_3}{2}\varphi_{-}\right) \begin{pmatrix} -\beta(u)b(u) & \beta(-u) \\ -\beta(-u)b(u) & -\beta(u) \end{pmatrix} \times \\ &\quad \times \exp(i\tau\sigma_3\eta), \quad x \rightarrow -\infty; \\ \chi_{-} &\rightarrow \exp\left(-\frac{i\sigma_3}{2}\varphi_{+}\right) \begin{pmatrix} \beta(-u) & -\beta(u)b(u) \\ \beta(u) & \beta(-u)b(u) \end{pmatrix} \times \\ &\quad \times \exp(-i\tau\sigma_3\eta), \quad x \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (3.7.32)$$

Покажем, что построение матричной функции  $\Psi(u)$  сводится к алгебраическим вычислениям. Сопоставление формул (3.7.28), (3.7.32) позволяет угадать зависимость от параметра  $u$  элементов матрицы  $\Psi(u)$ . Редукции (3.7.29) дополнительно конкретизируют вид матричной функции  $\Psi(u)$ :

$$\Psi(u) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \begin{pmatrix} \beta(-u)a_1 - \beta(u)b(u)a_2 & -\beta(u)b(u)b_1 + \beta(-u)b_2 \\ \beta(u)a_1^* - \beta(-u)b(u)a_2^* & \beta(-u)b(u)b_1^* - \beta(u)b_2^* \end{pmatrix},$$

где  $a_{1,2}$ ,  $b_{1,2}$ ,  $\sqrt{\gamma}$  зависят только от  $x$  и  $t$ . В отличие от предыдущих задач, матричная функция  $\Psi(u)$  имеет не простые, а двойные полюсы в точках  $u = \pm(iK' + K/2) \pmod{2K, 4iK'}$ .

Дополнительные связи между параметрами  $a_{1,2}$ ,  $b_{1,2}$ ,  $\sqrt{\gamma}$  получим из условия (3.7.31) на контуре  $\Gamma$  и требования (см. (3.7.21), (3.7.22)):

$$\det \Psi(u) = b(u)[\beta^2(u) + \beta^2(-u)].$$

Эти связи имеют вид

$$a_i = b_i \quad (i = 1, 2), \quad \gamma = |a_1|^2 + |a_2|^2 - 2\theta\sqrt{k'}(1 + k')^{-1}(a_1a_2^* + a_2a_1^*).$$

В справедливости утверждения легко убедиться непосредственной проверкой с использованием формул (П.17), (3.7.25), (3.7.26) и тождеств:

$$\begin{aligned} \beta^2(\pm u) &= -k' \left[ \frac{\tau + i(\kappa w_3 + \beta \cos \theta_0/2)}{\tau \pm (w_3 \cos \theta_0 - p/2)} \right], \\ -\frac{2\beta(u)\beta(-u)}{(1 + k')\sqrt{k'}} &= \frac{\tau + i(\kappa w_3 + \beta \cos \theta_0/2)}{w_1 \sqrt{1 + \kappa^2}} = \\ &= \frac{w_1 \sqrt{1 + \kappa^2}}{\tau - i(\kappa w_3 + \beta \cos \theta_0/2)}, \\ \frac{\beta(u)}{\beta(-u)} &= \frac{\tau - (w_3 \cos \theta_0 - p/2)}{w_1 \sin \theta_0} = \frac{w_1 \sin \theta_0}{\tau + w_3 \cos \theta_0 - p/2}. \end{aligned} \quad (3.7.33)$$

В итоге мы нашли матричную функцию, удовлетворяющую алгебраическим ограничениям (3.7.29), (3.7.31):

$$\begin{aligned} \Psi(u) &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \begin{pmatrix} \beta(-u)a_1 - \beta(u)b(u)a_2 & -\beta(u)b(u)a_1 + \beta(-u)a_2 \\ \beta(u)a_1^* - \beta(-u)b(u)a_2^* & \beta(-u)b(u)a_1^* - \beta(u)a_2^* \end{pmatrix}, \\ \gamma &= |a_1|^2 + |a_2|^2 - 2\theta\sqrt{k'}(1 + k')^{-1}(a_1a_2^* + a_1^*a_2). \end{aligned} \quad (3.7.34)$$

При этом

$$\Psi^{-1}(u) = \Psi^\dagger(u^*)r(u), \quad (3.7.35)$$

где  $r(u) = [\beta(u)\beta^*(u^*) + \beta(-u)\beta^*(-u^*)]^{-1}$ .

Дополнительные дифференциальные ограничения на вид матрицы  $\Psi(u, x, t)$  состоят в том, что в области  $\Gamma_-$  функции  $\partial_x \chi - \chi^{-1}$  и  $\partial_t \chi - \chi^{-1}$  должны сводиться к выражениям

$$\begin{aligned}\partial_x \chi - \chi^{-1} &= U = -i\{w_1(S_1\sigma_1 + S_2\sigma_2) + w_3 S_3\sigma_3\}, \\ \partial_t \chi - \chi^{-1} &= V = -i\{w_1([\mathbf{S} \times \partial_x \mathbf{S}]_1\sigma_1 + [\mathbf{S} \times \partial_x \mathbf{S}]_2\sigma_2) + \\ &\quad + w_3[\mathbf{S} \times \partial_x \mathbf{S}]_3\sigma_3 - 2w_1^2 S_3\sigma_3 - 2w_1 w_3 (S_1\sigma_1 + S_2\sigma_2)\},\end{aligned}\quad (3.7.36)$$

где  $\mathbf{S}^2 = 1$ .

Используя соотношения (3.7.28), (П.17), (3.7.33)–(3.7.35), приходим к заключению, что левые части формул (3.7.36) дают члены нужной алгебраической структуры только тогда, когда справедливы уравнения:

$$\begin{aligned}a_1 \partial_x a_2 - a_2 \partial_x a_1 &= a_1 a_2 (ip - \beta \cos \theta_0), \\ a_1^* \partial_x a_1 + a_2^* \partial_x a_2 - a_1 \partial_x a_1^* - a_2 \partial_x a_2^* &= ip(|a_2|^2 - |a_1|^2), \\ a_2^* \partial_x a_1 + a_1^* \partial_x a_2 - a_1 \partial_x a_2^* - a_2 \partial_x a_1^* &= \beta \cos \theta_0 (a_1 a_2^* - a_2 a_1^*), \\ a_1 \partial_t a_2 - a_2 \partial_t a_1 &= -a_1 a_2 (\beta p \sin^2 \theta_0 + i\omega), \\ a_1^* \partial_t a_1 + a_2^* \partial_t a_2 - a_1 \partial_t a_1^* - a_2 \partial_t a_2^* &= i\omega(|a_1|^2 - |a_2|^2), \\ a_2^* \partial_t a_1 + a_1^* \partial_t a_2 - a_1 \partial_t a_2^* - a_2 \partial_t a_1^* &= \beta p \sin^2 \theta_0 (a_1 a_2^* - a_2 a_1^*).\end{aligned}$$

Эта система сводится к линейным уравнениям, которые имеют простое решение:

$$a_{1,2} = \exp\left(\pm \frac{\beta}{2} (x \cos \theta_0 + pt \sin^2 \theta_0 + \Delta_{\pm}) \mp \frac{i\varphi_{\pm}}{2}\right), \quad (3.7.37)$$

где  $\varphi_{\pm} = px - \omega t + \delta_{\pm}$ ;  $\delta_{\pm}$ ,  $\Delta_{\pm}$  — вещественные постоянные интегрирования.

Если функции  $a_{1,2}(x, t)$  выбраны в соответствии с формулами (3.7.37), то решение Йоста имеет верные асимптотики (3.7.32). При этом из первого уравнения (3.7.36) находим компоненты вектора  $\mathbf{S}$ :

$$\begin{aligned}S_1 - iS_2 &= \frac{1}{\gamma} \left[ (a_1^2 + a_2^2) \sin \theta_0 - \frac{2a_1 a_2 \theta}{\sqrt{1 + \kappa^2}} (1 - i\kappa \cos \theta_0) \right], \\ S_3 &= \frac{1}{\gamma} \left[ (|a_1|^2 - |a_2|^2) \cos \theta_0 + \frac{i\kappa \theta \sin \theta_0}{\sqrt{1 + \kappa^2}} (a_1 a_2^* - a_1^* a_2) \right].\end{aligned}$$

Мы получили точное решение уравнений Ландау–Лифшица, описывающее взаимодействие доменной стенки со спиновой волной в отсутствие бризеров. В более подробной записи оно имеет вид:

$$\begin{aligned}S_1 - iS_2 &= e^{-i\delta_2} \frac{\sin \theta_0 \operatorname{ch}(y + i\Phi) - \theta(1 + \kappa^2)^{-1/2}(1 - i\kappa \cos \theta_0)}{\operatorname{ch} y - \theta(1 + \kappa^2)^{-1/2} \sin \theta_0 \cos \Phi}, \\ S_3 &= \frac{\operatorname{sh} y \cos \theta_0 - \theta\kappa(1 + \kappa^2)^{-1/2} \sin \theta_0 \sin \Phi}{\operatorname{ch} y - \theta(1 + \kappa^2)^{-1/2} \sin \theta_0 \cos \Phi},\end{aligned}\quad (3.7.38)$$

где

$$\begin{aligned} y &= \beta (\cos \theta_0 x + p \sin^2 \theta_0 t + \Delta_1), \quad \Delta_1 = (\Delta_+ + \Delta_-)/2, \\ \Phi &= \omega t - px - \delta_1, \quad \omega = \cos \theta_0 (p^2 + \beta^2), \quad \theta = \pm 1, \\ \delta_1 &= \frac{\delta_+ + \delta_-}{2}, \quad \delta_2 = \frac{\delta_+ - \delta_-}{2}. \end{aligned}$$

В безразмерных переменных ширина доменной стенки, взаимодействующей со спиновой волной, порядка  $(\beta \cos \theta_0)^{-1}$ , а ее скорость противоположна направлению распространения спиновой волны и определяется соотношением

$$V = -p \operatorname{tg} \theta_0 \sin \theta_0.$$

При  $p = 0$ ,  $\theta_0 = 0$  решение (3.7.38) сводится к изолированной неподвижной доменной стенке (3.5.7) в отсутствии волны намагниченности, внутренней структура которой определяется параметром  $\delta_2$ .

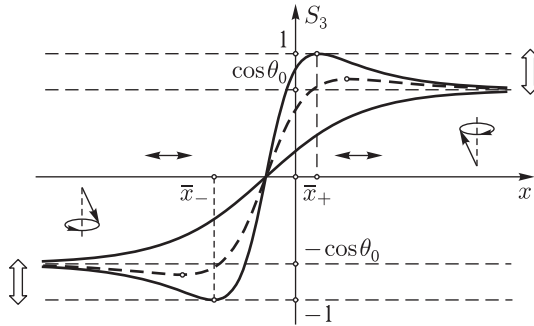


Рис. 3.10. Пульсации проекции  $S_3$  между двумя предельными положениями, изображенными сплошными линиями

При  $p = 0$ ,  $0 < \cos \theta_0 < 1$  на бесконечности имеем однородную прецессию вектора  $\mathbf{S}$  с частотой  $\omega = \beta^2 \cos \theta_0$ , причем направления прецессии справа и слева от центра доменной стенки противоположны. Доменная стенка не движется как целое, но пульсирует. Компонента  $S_3$  колеблется между предельными положениями, представленными на рис. 3.10. В моменты времени, когда  $\theta \cos \Phi = 1$ , в точках с координатами  $\bar{x}_{\pm} = (\beta \cos \theta_0)^{-1} (-\beta \Delta_1 \mp \ln \operatorname{tg}(\theta_0/2))$  функция  $S_3(x, t)$  достигает значений  $\pm 1$ . В другие моменты времени экстремальные значения удовлетворяют неравенству  $\cos \theta_0 \leq |S_3|_{\max} < 1$  и достигаются в точках, которые периодически сдвигаются на бесконечность, где  $|S_3|_{\max} \rightarrow \cos \theta_0$ . В центре доменной стенки (при  $y = 0$ ) намагниченность не зависит от времени и остается такой же, как в отсутствии волны прецессии:  $\mathbf{S} = (-\theta \cos \delta_2, -\theta \sin \delta_2, 0)$ .

В общем случае для анализа решения (3.7.38) его удобно переписать в виде

$$\mathbf{S} = \frac{1}{A}(\mathbf{m} + \mathbf{n}), \quad A \equiv \operatorname{ch} y - \frac{\theta}{\sqrt{1 + \kappa^2}} \sin \theta_0 \cos \Phi.$$

Здесь  $\mathbf{n}$  — вектор с компонентами

$$\begin{aligned} n_1 &= \theta (1 + \kappa^2)^{-1/2} [\kappa \cos \theta_0 \sin \delta_2 - \cos \delta_2], \\ n_2 &= -\theta (1 + \kappa^2)^{-1/2} [\kappa \cos \theta_0 \cos \delta_2 + \sin \delta_2], \\ n_3 &= \operatorname{sh} y \cos \theta_0. \end{aligned}$$

Вектор  $\mathbf{m}$  допускает представление

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \mathbf{e}_1 \cos \Phi + \mathbf{e}_2 \sin \Phi; \quad \mathbf{e}_1 = \operatorname{ch} y \sin \theta_0 (\cos \delta_2, \sin \delta_2, 0), \\ \mathbf{e}_2 &= \operatorname{sh} y \sin \theta_0 (\sin \delta_2, -\cos \delta_2, 0) - \theta \kappa (1 + \kappa^2)^{-1/2} \sin \theta_0 (0, 0, 1). \end{aligned}$$

В системе отсчета, связанной с доменной стенкой, векторы  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  постоянны в каждой точке на оси  $Ox$  (при каждом постоянном значении  $y$ ). Поскольку фаза  $\Phi$  линейно зависит от времени:

$$\Phi = \frac{(p^2 + \beta^2 \cos^2 \theta_0)t}{\cos \theta_0} + \left( \Delta_1 - \frac{y}{\beta} \right) \frac{p}{\cos \theta_0} - \delta_1,$$

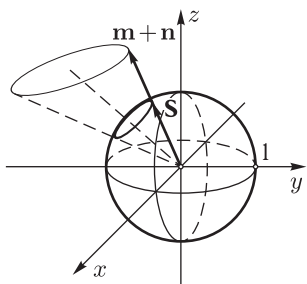


Рис. 3.11. Проектирование вектора  $\mathbf{m} + \mathbf{n}$  на поверхность сферы единичного радиуса осуществляется вдоль образующих конуса

конец вектора  $\mathbf{m}$  движется по эллипсу в плоскости, задаваемой векторами  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ . Соответственно, вектор  $\mathbf{m} + \mathbf{n}$  движется по поверхности конуса, ось которого совпадает с направлением вектора  $\mathbf{n}$ .

Вектор  $\mathbf{S}$  сонаправлен вектору  $\mathbf{m} + \mathbf{n}$  и отличается от него множителем  $1/A > 0$ . Поэтому переход от вектора  $\mathbf{m} + \mathbf{n}$  к вектору  $\mathbf{S}$  соответствует масштабному преобразованию, после которого допустимые значения вектора  $\mathbf{m} + \mathbf{n}$  попадают на поверхность сферы  $\mathbf{S}^2 = 1$  (рис. 3.11).

Таким образом, в системе отсчета, связанной с доменной стенкой, наблюдается неоднородная прецессия вектора  $\mathbf{S}$  с частотой  $(p^2 + \cos^2 \theta_0 \beta^2) / \cos \theta_0$  вокруг локальных осей, параллельных вектору  $\mathbf{n}$ .

Будем характеризовать внутреннюю структуру доменной стенки положением вектора  $\mathbf{n}$  в ее центре (при  $y = 0$ ). Тогда структура доменной стенки определится параметром  $\xi$ :

$$\xi = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\kappa \cos \theta_0 \cos \delta_2 + \sin \delta_2}{\cos \delta_2 - \kappa \cos \theta_0 \sin \delta_2}, \quad \kappa = \frac{p}{\beta}.$$



При  $\kappa \cos \theta_0 \cos \delta_2 + \sin \delta_2 = 0$  имеем стенку «неелевского типа», а при  $\cos \delta_2 - \kappa \cos \theta_0 \sin \delta_2 = 0$  — «блоховского». Кавычки поставлены потому, что мы пренебрегли магнитостатикой и энергии обеих стенок в нашей модели одинаковы. В общем случае плоскость, в которой лежит ось прецессии, в центре доменной стенки образует угол  $\operatorname{arctg} \xi$  с осью  $Ox$ .

Отсюда следует, что структура доменной стенки изменяется в зависимости от соотношения плотности импульса  $p \cos \theta_0$  падающей на нее волны и параметра анизотропии  $\beta$ . Под влиянием волны намагниченности первоначально блоховская стенка становится промежуточной между блоховской и неелевской. С другой стороны, даже при наличии волны существуют стенки с преимущественно «блоховским» типом распределения намагниченности. Для таких стенок учет магнитостатических взаимодействий не столь существен.

Отметим также, что существует возможность непосредственного сопоставления результатов теории с экспериментальными данными для квазиодномерных ферромагнитных цепочек с анизотропией типа «легкая ось». В квазиодномерных кристаллах магнитостатические взаимодействия и диссипативные потери малы. Их можно учесть в рамках солитонной теории возмущений [27–29].

С математической точки зрения, отличительная особенность рассмотренной задачи — в том, что матричная функция  $\Psi(u)$  (3.7.34) задачи Римана имеет двойные полюсы и не выражается через простые проекционные матрицы. Отметим также, что для доопределения задачи Римана (3.7.31) не использовалось условие нормировки. Оговаривалось лишь асимптотическое поведение функции (3.7.32) при  $u \in \Gamma, x \rightarrow \pm\infty$ .

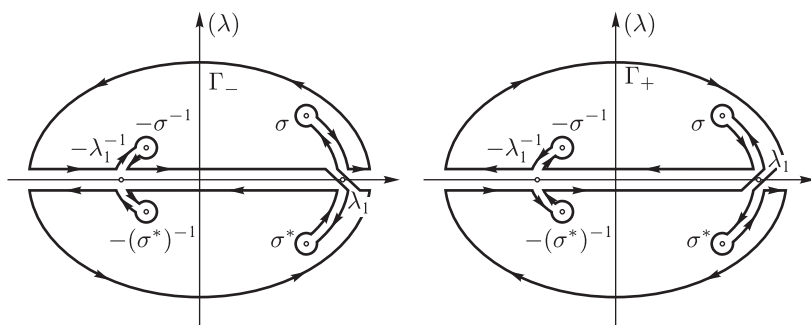


Рис. 3.12. Листы  $\Gamma_{\pm}$  римановой поверхности функции  $\tau = \tau(\lambda)$ ;  $\sigma = (\sqrt{1 + \kappa^2} + \kappa) \exp i\theta_0$ ,  $\lambda_1 = \kappa \cos \theta_0 + \sqrt{\kappa^2 \cos^2 \theta_0 + 1}$

Разумеется, формулировку задачи Римана и ее решение можно переписать в терминах исходного спектрального параметра  $\lambda$ . Для этого достаточно воспользоваться формулами (3.7.33). Двухлистная риманова поверхность функции  $\tau = \tau(\lambda)$  и контур  $\Gamma = \{\lambda : \operatorname{Im} \tau(\lambda) = 0\}$  изображены на рис. 3.12. Указанные соотношения еще раз указывают

на сложность процедуры «одевания» в терминах спектрального параметра  $\lambda$  или же параметра, введенного в работе [10]. Возможно, этим объясняется то, что приведенные в статье [10] выражения для намагниченности имеют неверный знаменатель и потому не удовлетворяют уравнениям Ландау–Лифшица.

### 3.8. Взаимодействие нелинейной волны с бризерами и зародышами перемагничивания

*Все грандиозные достижения математики и естественных наук ... проистекают из нашего неутоlimого желания придать миру в наших умах более рациональную форму, чем та, которую придал ему грубый порядок нашего опыта.*

У. Джеймс. «Прагматизм»

В этом разделе изложены результаты работ [11–14], в которых найдено аналитическое решение модели Ландау–Лифшица, описывающее взаимодействие бризера с волной намагниченности большой амплитуды в легкоосном ферромагнетике. При определенных значениях параметров бризер представляет собой уединенный домен, т.е. широкую область перемагниченного материала, ограниченную двумя доменными стенками. Установлено, что уединенный домен движется навстречу волне с той же скоростью, что и отдельная доменная стенка. После прохождения через домен волна приобретает специфический фазовый сдвиг. Это можно использовать для обнаружения и диагностики зародышей перемагничивания в ферромагнетиках. В общем случае бризер имеет внутренние колебания и, в отличие от доменной стенки, может двигаться по образцу даже в отсутствии волны. Это обстоятельство сказывается на форме его записи и осложняет анализ. Выявлены особенности колебательных режимов бризера вблизи границ области его существования. Показано, что скоростью движения бризера можно управлять, меняя волновое число и амплитуду волны накачки.

#### 3.8.1. Построение бризерных решений

Постановка рассматриваемой задачи отличается от постановки разд. 3.7 только видом асимптотик  $S_0^{(\pm)}$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ . Теперь на обеих бесконечностях

$$S \rightarrow S_0^{(\pm)} = (\sin \theta_0 \cos \varphi_{\pm}, \sin \theta_0 \sin \varphi_{\pm}, \cos \theta_0). \quad (3.8.1)$$

Угол  $\theta_0$  характеризует амплитуду волны,  $\varphi_{\pm} = px - \omega t + \delta_{\pm}$ ,  $\omega = (p^2 + \beta^2) \cos \theta_0$  — частота прецессии,  $p$  — волновое число,  $\delta_{\pm} = \text{const.}$

Далее показано, что фазовые сдвиги  $\delta_{\pm}$  не могут быть произвольными. Они несут информацию о бризере, который модулирует волну (3.8.1).

Определим функции Йоста  $\chi_1$  и  $\chi_2$  как решения системы (3.7.6), имеющие асимптотическое поведение  $\chi_{1,2} \rightarrow \chi_{1,2}^{(0)}$  при  $x \rightarrow \mp\infty$ . Здесь  $\chi_{1,2}^{(0)}$  — точные решения системы (3.7.6):

$$\chi_{1,2}^{(0)}(u) = \exp\left(-\frac{i\sigma_3}{2}\varphi_{\mp}\right) \begin{pmatrix} \beta(-u) & -\beta(u) \\ \beta(u) & \beta(-u) \end{pmatrix} \exp\left(\frac{\tau}{i}\sigma_3\eta\right),$$

$$\eta = x - (2w_3 + p \cos \theta_0)t,$$

соответствующие распределения намагниченности (3.8.1).

Как и ранее, множество  $\Gamma = \{u : \text{Im}\tau(u) = 0\}$  соответствует непрерывному спектру задачи рассеяния. На контуре  $\Gamma$  решения Йоста связаны между собой прежним соотношением (3.7.14). Однако новые функции Йоста удовлетворяют ограничениям, которые несколько отличаются от прежних:

$$\begin{aligned} \chi_{1,2}(-u + K + 2iK') &= -\sigma_3 \chi_{1,2}(u) \sigma_3, \\ \chi_{1,2}^* [(-u + 2iK')^*] &= -i\sigma_2 \chi_{1,2}(u), \\ \chi_{1,2}^*(u^*) &= \frac{(1+k')\sqrt{k'}}{2\beta(u)\beta(-u)} \sigma_2 \chi_{1,2}(u) \sigma_2 \quad (u \in \Gamma). \end{aligned} \quad (3.8.2)$$

Поэтому, хотя матрица перехода имеет прежнюю структуру (3.7.15), ее элементы удовлетворяют другим ограничениям:

$$\begin{aligned} a(-u + K + 2iK') &= a(u), \quad b(-u + K + 2iK') = -b(u), \\ a^* [(-u + 2iK')^*] &= a(u), \quad b^* [(-u + 2iK')^*] = b(u). \end{aligned}$$

Введем функции  $\chi_+ = (\chi_1^{(1)}, \chi_2^{(2)})$  и  $\chi_- = (\chi_2^{(1)}, \chi_1^{(2)})$ , которые допускают аналитическое продолжение с контура  $\Gamma$  в области  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$  соответственно.

Из соотношения (3.7.14) получаем представления для элементов матрицы перехода:

$$a(u) = \frac{\det \chi_+(u)}{\det \chi_2^{(0)}(u)}, \quad a^*(u^*) = \frac{\det \chi_-(u)}{\det \chi_2^{(0)}(u)}.$$

Отсюда следует, что функции  $a(u)$  и  $a^*(u^*)$  аналитически продолжаются с контура  $\Gamma$  в области  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$  соответственно (за исключением, может быть, точек, где  $\det \chi_{1,2}^{(0)}(u) = \beta^2(-u) + \beta^2(u) = 0$ ).

Нули коэффициентов  $a(u)$  и  $a^*(u^*)$  в областях  $\Gamma_-$  и  $\Gamma_+$  отвечают дискретному спектру задачи рассеяния. В силу редукций (3.8.2), у функции  $a^*(u^*)$  имеются два особых нуля (3.7.23), приводящих к появлению доменной стенки, и группы нулей (3.7.24), каждая из которых учитывает наличие одного бризера на фоне волны (3.8.1).

В нашей задаче, в силу краевых условий (3.8.1), доменные стенки либо отсутствуют, либо появляются парами с противоположными топологическими зарядами. Другими словами, в данной задаче особые нули (3.7.23) либо отсутствуют, либо являются кратными. Напомним, что кратные нули приводят к появлению слабосвязанных экспоненциально-полиномиальных солитонов. Далее для определенности будем предполагать, что нули функций  $a(u)$  и  $a^*(u^*)$  являются простыми, тогда особые нули (3.7.23) можно не учитывать.

Для дальнейшего анализа удобно выделить из функций  $\chi_{\pm}$  затра-  
вочное решение  $\chi_2^{(0)}$  и ввести матричные функции  $\Psi_{\pm}$ :

$$\chi_-(u) = \Psi_-(u)\chi_2^{(0)}(u), \quad \frac{\chi_+(u)}{a(u)} = \Psi_+(u)\chi_2^{(0)}(u).$$

Тогда соотношение (3.7.14) сведется к условию сопряжения аналитических функций  $\Psi_{\pm}$  на контуре  $\Gamma$ :

$$\Psi_-(x, t, u) = \Psi_+(x, t, u)G(x, t, u) \quad (u \in \Gamma), \quad (3.8.3)$$

где

$$G(x, t, u) = \chi_2^{(0)}(x, t, u) \begin{pmatrix} 1 & -b^*(u^*) \\ -b(u) & 1 \end{pmatrix} \left(\chi_2^{(0)}\right)^{-1}(x, t, u).$$

Таким образом, мы вновь приходим к задаче Римана. Ее отличительная особенность состоит в том, что структура матричных функций  $\Psi_{\pm}$  достаточно «жестко» задается редукциями (3.8.2). В областях своей аналитичности функции  $\Psi_{\pm}$  удовлетворяют ограничениям

$$\begin{aligned} \Psi_{\pm}(-u + K + 2iK') &= \sigma_3 \Psi_{\pm}(u) \sigma_3, \\ \Psi_{\pm}^* [(-u + 2iK')^*] &= \sigma_2 \Psi_{\pm}(u) \sigma_2, \end{aligned} \quad (3.8.4)$$

а на контуре  $\Gamma$  одну из них можно выразить через другую:

$$\Psi_+^{-1}(u) = \Psi_-^{\dagger}(u^*), \quad u \in \Gamma.$$

В итоге условие на контуре  $\Gamma$  можно записать в терминах одной лишь функции  $\Psi_-$ :

$$\Psi_-^{\dagger}(u^*)\Psi_-(u) = G(u). \quad (3.8.5)$$

Пусть  $0 < u_0 < K$  — вещественный корень уравнения

$$i \operatorname{dn}(u_0 + iK') = \operatorname{tg} \frac{\theta_0 + \theta_4}{2}.$$

В точке  $u = u_0$  функция  $\tau(u)$  имеет простой полюс (см. (3.7.10)), а правая часть формулы (3.8.5) — существенную особенность. С другой

стороны, левая часть равенства (3.8.5) в малой окрестности точки  $u = u_0$  является функцией, дифференцируемой по параметру  $u$ . Противоречия можно избежать лишь при ограничении:  $b(u_0) = 0$  или, что эквивалентно, при условии, что матричная функция  $\Psi_-(u)$  унитарна в точке  $u = u_0$ :

$$\Psi_-^\dagger(u_0)\Psi_-(u_0) = I. \quad (3.8.6)$$

Получим формулу для расчета намагниченности. Функция  $\Psi_-$  удовлетворяет дифференциальным уравнениям:

$$\partial_x \Psi_- = U \Psi_- - \Psi_- U_0, \quad \partial_t \Psi_- = V \Psi_- - \Psi_- V_0, \quad (3.8.7)$$

где матричные функции  $U, V$  определены формулами (3.7.6),  $U_0$  и  $V_0$  — значения  $U$  и  $V$  при  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_0^{(+)}$ . Отсюда, в частности, получаем равенство:  $U = \partial_x \Psi_- \Psi_-^{-1} + \Psi_- U_0 \Psi_-^{-1}$ , левая и правая части которого имеют простые полюсы при  $u = u_0$ . Приравнявая вычеты в этой точке и учитывая (3.8.6), получаем формулу для расчета намагниченности:

$$S_k \sigma_k = \Psi_-(u_0)(\mathbf{S}_0^{(+)})_k \sigma_k \Psi_-^\dagger(u_0). \quad (3.8.8)$$

Для того чтобы ей воспользоваться, нужно знать решения задачи Римана на торе (3.8.3).

Солитонным состояниям соответствуют решения задачи Римана с нулями коэффициентов  $a(u)$  и  $a^*(u^*)$  в областях  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$ , когда  $b = b^* \equiv 0$ . В этом случае функции  $\Psi_-(u)$ ,  $\Psi_-^\dagger(u^*)$  являются мероморфными в области  $\Gamma_- \cup \Gamma_+$ . Условие их сопряжения на контуре  $\Gamma$  приобретает простой вид:

$$\Psi_-^\dagger(u^*)\Psi_-(u) = \Psi_-(u)\Psi_-^\dagger(u^*) = I \quad (u \in \Gamma).$$

Построим простейшую солитонную функцию  $\Psi_-^\dagger(u^*)$ , описывающую один бризер на фоне волны (3.8.1). В силу (3.7.24), такая функция имеет четыре простых полюса. Потому ее разложение по дзета-функциям Вейерштрасса должно иметь вид (см. приложение)

$$\Psi_-^\dagger(u^*) = A_0 + A\zeta_1 + B\zeta_2 + C\zeta_3 + D\zeta_4, \quad (3.8.9)$$

где  $\zeta_i = \zeta(u - \mu_i)$ ,  $\mu_1 = \mu$ ,  $\mu_2 = -\mu - K - 2iK'$ ,  $\mu_3 = -\mu^* + 2iK'$ ,  $\mu_4 = \mu^* + K$ , периоды функций Вейерштрасса:  $2K, 4iK'$ ,  $\mu \in \Gamma_-$ . Учитывая трансформационные свойства функций Вейерштрасса [22, 23], из условий симметрии (3.8.4) выражаем матрицы  $B, C, D$  через  $A$ :

$$B = -\sigma_3 A \sigma_3, \quad C = -\sigma_2 A^* \sigma_2, \quad D = \sigma_1 A^* \sigma_1.$$

При этом матрица  $A_0$  имеет вид

$$A_0 \equiv \begin{pmatrix} r & 2\eta_2 A_{12} \\ 2\eta_2 A_{21} & r^* \end{pmatrix},$$

где  $\eta_2 = \zeta(-K - 2iK'|K, 2iK')$ .

Матричная функция (3.8.9) будет иметь периоды  $2K$ ,  $4iK'$ , только когда сумма вычетов функции  $\Psi_-^\dagger(u^*)$  в ее полюсах  $\mu_i$  равна нулю (см. [23] и приложение). Это условие будет выполнено, если недиагональные элементы матрицы  $A$  удовлетворяют ограничению

$$A_{12} = -A_{21}^*. \quad (3.8.10)$$

Дальнейшие вычисления проведем, предполагая справедливость равенства (3.8.10). Окончательный результат подтвердит его правильность.

Редукции конкретизировали алгебраическую структуру матричной функции (3.8.9). Положим  $A = \tilde{A}R$ , где  $R = \text{diag}(r, r^*)$ ,  $r \neq 0$ , и представим полученный результат в форме, удобной для дальнейшего анализа:

$$\begin{aligned} \Psi_-^\dagger(u^*) &= \Psi^\dagger(u^*)R, \\ \Psi^\dagger(u^*) &= I + \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11}\zeta_{12}(u) - \tilde{A}_{22}^*\zeta_{34}(u) & \tilde{A}_{12}\varphi(u) \\ A_{21}\varphi(u) & \tilde{A}_{22}\zeta_{12}(u) - \tilde{A}_{11}^*\zeta_{34}(u) \end{pmatrix}, \\ \zeta_{12}(u) &= \zeta_1 - \zeta_2, \quad \zeta_{34}(u) = \zeta_3 - \zeta_4, \quad \varphi(u) = \zeta_1 + \zeta_2 - \zeta_3 - \zeta_4 + 2\eta_2. \end{aligned}$$

Условия отсутствия полюсов в произведении матричных функций

$$\Psi_-(u)\Psi_-^\dagger(u^*) = R^\dagger\Psi_-(u)\Psi_-^\dagger(u^*)R = I \quad (3.8.11)$$

эквивалентны одному независимому матричному уравнению

$$\tilde{A}^\dagger\Psi^\dagger(u^*)\Big|_{u=\mu^*} = 0,$$

которое имеет нетривиальное решение только при условии (см. [30] и разд. 2.9.2)

$$\tilde{A}_{\alpha\beta} = m_\alpha X_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2.$$

Учитывая это условие и тождество

$$\varphi(\mu^*) + \zeta_{34}(\mu^*) = -\zeta_{12}^*(\mu^*),$$

находим:

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{m_1^*}{|m_1|^2\zeta_{12}(\mu^*) - |m_2|^2\zeta_{12}^*(\mu^*)}, \\ X_2 &= \frac{m_2^*}{|m_1|^2\zeta_{12}^*(\mu^*) - |m_2|^2\zeta_{12}(\mu^*)}. \end{aligned} \quad (3.8.12)$$

Построенная матрица  $A_{\alpha\beta}$  удовлетворяет ограничению (3.8.10).

Знаменатели, возникшие в формулах (3.8.12), можно исключить переопределением параметров  $r$  и  $r^*$ , тогда матричная функция  $\Psi^\dagger(u^*)$  примет вид

$$\begin{aligned} \Psi^\dagger(u^*) &= \\ &= \begin{pmatrix} -|m_1|^2\varphi_1(u) - |m_2|^2\varphi_2(u) & m_1m_2^*\varphi(u) \\ -m_2m_1^*\varphi(u) & |m_1|^2\varphi_2(u) + |m_2|^2\varphi_1(u) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.8.13)$$

где

$$\varphi_1(u) = \zeta_{12}(u) - \zeta_{12}(\mu^*), \quad \varphi_2(u) = \zeta_{34}(u) + \zeta_{12}^*(\mu^*).$$

Отметим, что функции  $\varphi(u)$ ,  $\varphi_{1,2}(u)$  образуют представление групп редукций:

$$\begin{aligned} \varphi_{1,2}(-u + K + 2iK') &= \varphi_{1,2}(u), \quad \varphi(-u + K + 2iK') = -\varphi(u); \\ \varphi_{2,1}^* [(-u + 2iK')^*] &= -\varphi_{1,2}(u), \quad \varphi^* [(-u + 2iK')^*] = \varphi(u). \end{aligned}$$

Комбинации дзета-функций Вейерштрасса  $\varphi_{1,2}(u)$ ,  $\varphi(u)$  выразим в терминах функций Якоби. Для сокращения записи введем обозначения:  $\tilde{\mu} = \mu + iK' + K/2$ ;  $\tilde{s} = \text{sn}(\tilde{\mu}, k)$  и т. д.;  $s = \text{sn}(u + iK' + K/2, k)$  и т. д. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= -\frac{k^2(k' + |\tilde{d}|^2)sc}{(d - \tilde{d})(k' + \tilde{d}^*d)}, \\ \varphi_1(u) &= -\frac{k^2\tilde{s}\tilde{c}}{\tilde{d} + \tilde{d}^*} \left( \frac{d + \tilde{d}^*}{d - \tilde{d}} \right), \\ \varphi_2(u) &= -\frac{k^2\tilde{s}^*\tilde{c}^*}{\tilde{d} + \tilde{d}^*} \left( \frac{d\tilde{d} - k'}{d\tilde{d}^* + k'} \right). \end{aligned} \quad (3.8.14)$$

Эти и другие тождества, как всегда, проще всего проверить посредством разложения их левых и правых частей либо на «простые дроби», либо на «множители» по функциям Вейерштрасса (см. приложение).

При конкретных расчетах используются тождества:

$$\begin{aligned} \varphi_1^*(u^*)\varphi(u) + \varphi^*(u^*)\varphi_2(u) &= 0, \\ \varphi_1(u)\varphi_2^*(u^*) + \varphi_2(u)\varphi_1^*(u^*) + \varphi(u)\varphi^*(u) &= c_2, \\ \varphi_1^*(u^*)\varphi_1(u) &= \varphi_2^*(u^*)\varphi_2(u) = c_1, \\ \varphi^2(u) - \varphi_1^2(u) - \varphi_2^2(u) &= -\frac{c_2}{c_1}\varphi_1(u)\varphi_2(u), \\ \frac{\beta(u)}{\beta(-u)} &= \frac{1}{\sqrt{k'}} \text{dn} \left( u + \frac{K}{2} \right), \end{aligned} \quad (3.8.15)$$

где постоянные  $c_1$  и  $c_2$  имеют вид

$$c_1 = \frac{k^4|\tilde{s}\tilde{c}|^2}{(\tilde{d} + \tilde{d}^*)^2}, \quad c_2 = \frac{2}{(\tilde{d} + \tilde{d}^*)^2} \left[ (1 + k')|\tilde{d}|^2 + |k' + \tilde{d}|^2 \right].$$

Модуль числа  $r$  найдем из соотношения (3.8.11)

$$(RR^\dagger)^{-1} \equiv |r|^{-2}I = \Psi(u)\Psi^\dagger(u^*).$$

По построению правая часть равенства не зависит от  $u$  и является положительно определенной диагональной матрицей. Непосредственные вычисления с учетом тождеств (3.8.15) дают

$$|r|^{-2} = (|m_1|^4 + |m_2|^4)c_1 + |m_1m_2|^2c_2. \quad (3.8.16)$$

При записи решения уравнений (3.7.1) предпочтительнее другое представление  $|r|^{-2}$ , которое следует из (3.8.16) при замене постоянных  $c_{1,2}$  комбинациями из чисел  $\varphi_{1,2}(u_0)$  и  $\varphi(u_0)$  (см. (3.8.15)).

Зависимость вектора  $\mathbf{m} = (m_1, m_2)$  и фазы  $\varphi_0 = \arg(r)$  от координат  $x, t$  следует из уравнений, обеспечивающих отсутствие лишних полюсов в выражениях (3.8.7) для  $U$  и  $V$ . Решениями этих уравнений будут

$$\mathbf{m} = \chi_2^{(0)}(\mu)\mathbf{e}, \quad \varphi_0 = \text{const}, \quad (3.8.17)$$

где  $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$  — произвольный постоянный комплексный вектор.

Непосредственным вычислением коэффициента  $a^*(u^*)$ :

$$a^*(u^*) = \det \Psi_-^\dagger(u^*) = -\frac{\varphi_1(u)\varphi_2(u)}{c_1} = \frac{\varphi^*(u^*)}{\varphi(u)} \quad (3.8.18)$$

убеждаемся, что, в соответствии с предписанными аналитическими свойствами, функция  $a^*(u^*)$  имеет нули в точках (3.7.24), полюсы в комплексно сопряженных точках и удовлетворяет условию  $a^*(u^*)a(u) = 1$ .

Для нахождения постоянной  $\varphi_0$  воспользуемся формулой связи фундаментальных решений на контуре  $\Gamma$ , которая следует из соотношения (3.7.14)

$$\Psi_-(u)\chi_2^{(0)}(u) = \chi_2(u) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^*(u^*) \end{pmatrix}.$$

Из требования совпадения при  $x \rightarrow +\infty$  асимптотик левой и правой частей этого равенства получаем:

$$\varphi_0 = i \ln \left( -\frac{\widetilde{s}[\widetilde{c}]}{\widetilde{c}[\widetilde{s}]} \right) = \pi - \arg \frac{\widetilde{s}}{\widetilde{c}}. \quad (3.8.19)$$

С помощью формул (3.8.8), (3.8.13), (3.8.16), (3.8.17), (3.8.19) находим решение уравнений Ландау–Лифшица, описывающее бризер на фоне нелинейной спиновой волны (3.8.1) произвольной амплитуды. Окончательный результат можно записать в виде

$$S_3 = \frac{(|\alpha|^2 - |\beta|^2) \cos \theta_0 - (\alpha^* \beta + \alpha \beta^*) \sin \theta_0}{|\alpha|^2 + |\beta|^2},$$

$$S_1 - iS_2 = \frac{\exp(-i\varphi_+ - 2i\varphi_0) [2\alpha\beta \cos \theta_0 + (\alpha^2 - \beta^2) \sin \theta_0]}{|\alpha|^2 + |\beta|^2}. \quad (3.8.20)$$



Здесь

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= \pi - \arg(\tilde{s}/\tilde{c}), \quad \varphi_+ = px - \omega t + \delta_+, \\ \alpha &= |n_2|^2 \frac{\varphi_1(u_0)}{\varphi(u_0)} - |n_1|^2 \frac{\varphi_1^*(u_0)}{\varphi^*(u_0)}, \quad \beta = n_1 n_2^*, \\ n_1 &= -\left(i\sqrt{k'} \frac{\tilde{s}}{\tilde{c}} \exp \gamma + \exp(-\gamma)\right), \quad n_2 = \exp \gamma - i\sqrt{k'} \frac{\tilde{s}}{\tilde{c}} \exp(-\gamma), \\ \gamma &= -i\tau(\mu) [x - (2w_3(\mu) + p \cos \theta_0)t] + \frac{1}{2} \ln \frac{e_1}{e_2}.\end{aligned}$$

Согласно (3.8.14) коэффициенты  $\varphi(u_0)$  и  $\varphi_1(u_0)$  выражаются в терминах эллиптических функций Якоби от аргументов  $\tilde{u}_0 = u_0 + iK' + K/2$  и  $\tilde{\mu} = \mu + iK' + K/2$ . В тех же терминах запишем коэффициенты  $\tau(\mu)$  и  $w_{1,3}(\mu)$ :

$$\begin{aligned}\tau(\mu) &= \frac{i\beta k^2(1-k')(k' - \tilde{d}^2)s_0^2 c_0^2}{2(k' - d_0^2)(\tilde{d} - d_0)(k' - \tilde{d}d_0)}, \quad w_1 = \frac{i\beta k^2(1-k')\tilde{s}\tilde{c}s_0 c_0}{2(\tilde{d} - d_0)(k' - \tilde{d}d_0)}, \\ w_3(\mu) &= \frac{i\beta[\tilde{d}d_0(1+k')^2 - (k' + \tilde{d}^2)(k' + d_0^2)]}{2(1+k')(\tilde{d} - d_0)(k' - \tilde{d}d_0)}.\end{aligned}\tag{3.8.21}$$

Здесь для сокращения записи введены обозначения  $s_0 = \text{sn}(\tilde{u}_0)$ ,  $\tilde{s} = \text{sn}(\tilde{\mu})$  и т. д.;  $\mu \in \Gamma_-$  — комплексный параметр.

Согласно найденному решению (3.8.20), пройдя через бризер, волна намагнитичности приобретает дополнительный фазовый сдвиг. Поэтому постоянные  $\delta_{\pm}$  в формулах (3.8.1) оказываются связанными между собой:

$$\delta_+ - \delta_- = 4 \arg(\tilde{s}/\tilde{c}) \pmod{2\pi}.$$

Заметим, что в силу тождеств

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{p}{\beta} = \frac{i(1-k')d_0}{k' - d_0^2}, \quad \sin \theta_0 = \frac{2i(1-k')\sqrt{k'} s_0 c_0}{k' - d_0^2}, \\ \cos \theta_0 &= \left(\frac{d_0^2 + k'}{k' - d_0^2}\right) \left(\frac{1 - k'}{1 + k'}\right),\end{aligned}$$

вместо параметров  $p$  и  $\theta_0$  волны можно использовать  $k'$  и  $u_0$ . Отметим также нетривиальную алгебраическую связь между величинами  $k'$ ,  $p$  и  $\sin \theta_0$ :

$$\frac{4k'}{(1+k')^2} = \frac{\sin^2 \theta_0}{\kappa^2 + 1}.$$

Кратко охарактеризуем полученное решение. Ширина бризера (3.8.20) имеет порядок  $-[\text{Im}\tau(\mu)]^{-1}$ , а его скорость равна

$$V = \frac{2\text{Im}[\tau(\mu)w_3(\mu)]}{\text{Im}\tau(\mu)} + p \cos \theta_0.$$

Бризер представляет локализованную модуляцию волны (3.8.1), которая движется на фоне волны подобно частице. В области локализации солитона происходят обусловленные волной (3.8.1) дополнительные пульсации намагниченности с частотой

$$\Omega = 2\operatorname{Re} [\tau(\mu)(2w_3(\mu) + p \cos \theta_0)]$$

в лабораторной системе координат или с частотой

$$\varpi = \Omega - 2V\operatorname{Re} \tau(\mu)$$

в системе отсчета, связанной с бризером. Пульсации распространяются по области локализации бризера, зарождаясь у одного его края и исчезая у другого. Их фазовая скорость  $V_{\text{ph}}$  есть

$$V_{\text{ph}} = \frac{\Omega}{2\operatorname{Re} \tau(\mu)}.$$

Величина  $[2\operatorname{Re} \tau(\mu)]^{-1}$  дает характерный масштаб дополнительных пространственных модуляций бризера, связанных с распространением пульсаций.

### 3.8.2. Сценарии «разрушения» бризера волной

*...что следует деятельно разрушить,  
то надо сперва крепко схватить.*

Ф. Кафка. «Афоризмы»

Бризер существует только в области значений физических параметров задачи, удовлетворяющих неравенству  $\operatorname{Im} \tau(\mu) < 0$ . Когда  $\operatorname{Im} \tau(\mu) \rightarrow -0$ , область локализации бризера неограниченно увеличивается. При этом поведение колебаний намагниченности в бризере может быть разным.

При значениях  $\mu \in \Gamma_-$  вблизи горизонтальных участков контура  $\Gamma = \{u : \operatorname{Im} \tau(u) = 0\}$  магнитный солитон (3.8.20) представляет собой суперпозицию линейных мод с вещественным законом дисперсии (3.7.5) (где  $\tilde{p} = 2\tau(\mu)$ ).

Вблизи наклонных границ области  $\Gamma_-$  (см. рис. 3.13) всюду, за исключением окрестностей точек  $\mu = iK' \pmod{K, 2iK'}$ , скорость солитонов достаточно велика. Система как бы стремится понизить свою энергию излучением бризеров.

По-видимому, экспериментальному наблюдению легче всего поддается сценарий колебаний намагниченности, возникающий, когда  $\mu$  лежит вблизи точки ветвления функции  $\tau(\mu)$ :  $\mu = iK' + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — ма-

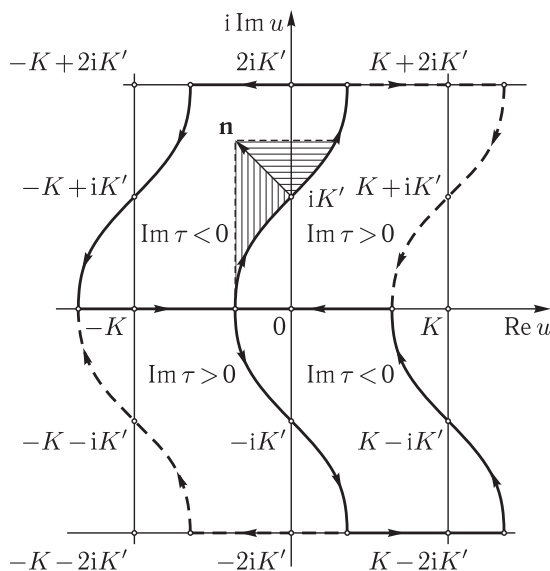


Рис. 3.13. Нормаль  $\mathbf{n}$  к контуру  $\Gamma$  в точке ветвления; в области с горизонтальной штриховкой  $V_{\text{eff}} > V_g$ ; в области с вертикальной штриховкой  $V_{\text{eff}} < V_g$

лое комплексное число. В этом случае распределение намагниченности описывается приближенной формулой:

$$S_3 \approx \frac{(|\tilde{\alpha}|^2 - |\tilde{\beta}|^2) \cos \theta_0 - (\tilde{\alpha}^* \tilde{\beta} + \tilde{\alpha} \tilde{\beta}^*) \sin \theta_0}{|\tilde{\alpha}|^2 + |\tilde{\beta}|^2}, \quad (3.8.22)$$

$$S_1 - iS_2 \approx \frac{\exp(-i\varphi_+) [2\tilde{\alpha}\tilde{\beta} \cos \theta_0 + (\tilde{\alpha}^2 - \tilde{\beta}^2) \sin \theta_0]}{|\tilde{\alpha}|^2 + |\tilde{\beta}|^2},$$

где

$$\tilde{\alpha} = \frac{2\kappa \operatorname{Re} \tilde{\gamma}}{\sqrt{1 + \kappa^2}} + i(|\tilde{\gamma}|^2 + 1) \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0}, \quad \tilde{\beta} = -2\operatorname{Im} \tilde{\gamma} - i(|\tilde{\gamma}|^2 - 1),$$

$$\tilde{\gamma} = \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} \operatorname{sh} \left[ \tilde{\varepsilon} \left( \cos \theta_0 \sqrt{1 + \kappa^2} (x - (V_g + V)t) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + i\kappa \sin \theta_0 (x - (V_g + V_{\text{ph}})t) \right) \beta \sin \theta_0 \right],$$

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2}(1 + k'),$$

$V_{\text{ph}}$  — фазовая скорость волны накачки,

$$V_{\text{ph}} = \frac{p^2 + \beta^2}{p} \cos \theta_0,$$

$V_g$  — групповая скорость волны,

$$V_g = 2p \cos \theta_0,$$

и

$$V = -p \operatorname{tg} \theta_0 \sin \theta_0$$

формально совпадает со скоростью вынужденного движения отдельной доменной границы. При переходе от (3.8.20), (3.8.21) к (3.8.22) входящая в  $\gamma$  константа интегрирования выбрана так, чтобы в формулах для  $\alpha$  и  $\beta$  отсутствовали слагаемые нулевого порядка по  $\varepsilon$ .

Решение (3.8.22) описывает формирование локализованных колебаний с частотой

$$\Omega = 2\operatorname{Re}\tilde{\varepsilon} \left[ \operatorname{tg} \varphi_\varepsilon \sqrt{1 + \kappa^2} (V_g + V) \cos \theta_0 + \kappa(V_g + V_{\text{ph}}) \sin \theta_0 \right] \beta \sin \theta_0$$

в протяженной области с характерным размером

$$d \sim \left( \operatorname{Re}\tilde{\varepsilon}(1 - \eta) \beta \sin \theta_0 \cos \theta_0 \sqrt{1 + \kappa^2} \right)^{-1},$$

где

$$\eta = \sqrt{-\frac{V}{V_{\text{ph}}}} \operatorname{tg} \varphi_\varepsilon, \quad \varphi_\varepsilon = \arg(\varepsilon).$$

Эта область движется как целое на фоне волны (3.8.1) со скоростью

$$V_{\text{eff}} = V_g + \frac{V - \eta V_{\text{ph}}}{1 - \eta},$$

которая существенно зависит от величины  $\arg(\varepsilon)$ . Ввиду того что  $\mu \in \Gamma_-$ , область значений  $\arg(\varepsilon)$  ограничена условием  $\eta < 1$ . При  $\eta = V/V_{\text{ph}} < 0$  точка  $\mu = iK' + \varepsilon$  лежит на нормали к контуру  $\Gamma$ . В этом случае  $V_{\text{eff}} = V_g$ . Нормаль служит границей между областями, где  $V_{\text{eff}} > V_g$  и  $V_{\text{eff}} < V_g$  (см. рис. 3.13).

Область локализации колебаний неподвижна, когда выполняется условие

$$\eta = \frac{V_g + V}{V_g + V_{\text{ph}}}.$$

В частности, если  $\varepsilon$  вещественно, скорость солитона  $V_{\text{eff}} = V_g + V$  обращается в нуль при накачке однородной прецессией намагниченности ( $p = 0$ ) или при условии:  $p \neq 0$ ,  $\theta_0 = \arccos(\sqrt{3}/3) \approx 54,7^\circ$ . При  $\arccos(\sqrt{3}/3) < \theta_0 < \pi/2$  область с колебаниями движется навстречу волне (3.8.1), а при углах прецессии  $0 < \theta_0 < \arccos(\sqrt{3}/3)$  — в направлении распространения волны.

Частота  $\Omega$  внутренних колебаний брызера в рассматриваемой области (перед «разрушением» солитона волной) во много раз меньше частоты  $\omega$  волны накачки. Так, в случае однородной прецессии (при  $p = 0$ ) имеем

$$\Omega = \beta^2 \operatorname{Re} \tilde{\varepsilon} \sin^2 \theta_0 \cos \theta_0 \ll \omega = \beta^2 \cos \theta_0.$$

После перехода к размерным переменным приведенные выражения для ширины солитона  $d$ , его скорости  $V_{\text{эф}}$  и частот  $\omega$ ,  $\Omega$  приобретают дополнительные множители  $\sqrt{\alpha}$ ,  $\gamma M_0 \sqrt{\alpha}$  и  $\gamma M_0$  соответственно, где  $\gamma$  — гиромангнитное отношение,  $M_0$  — номинальная намагниченность,  $\alpha$  — константа обменного взаимодействия.

Характер осцилляций компоненты  $S_3$  (3.8.22) и форма их огибающей существенно зависят от величины  $|\varepsilon|$ . Приближение (3.8.22) справедливо только для малых значений  $|\varepsilon|$ . При  $|\varepsilon| \simeq 1$  форма огибающей слабо зависит от времени (рис. 3.14). В этом случае формула (3.8.22) имеет низкую точность. Однако она позволяет получить представление о структуре брызера в общем случае, т. е. вдали от точки  $\mu = iK'$ .

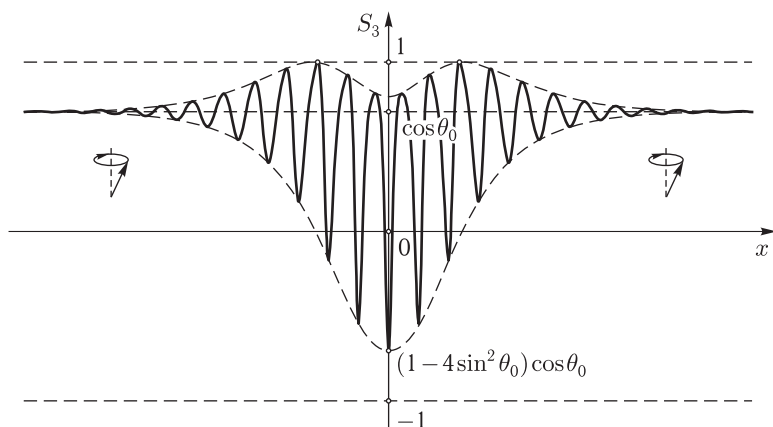


Рис. 3.14. Осцилляции  $S_3$ -компоненты намагниченности при  $t = 0$ ,  $|\varepsilon| \simeq 1$

При  $|\varepsilon| \ll 1$  пульсации намагниченности сглаживаются. Функция  $S_3(x, t)$  имеет только два максимума и один минимум в каждый момент времени  $t$ . В некоторые моменты времени максимумы  $S_3$  становятся равными  $+1$ . Глобальный минимум равен  $S_3(0, 0) = \cos \theta_0 (1 - 4 \sin^2 \theta_0) \geq -1$ . При  $|\varepsilon| \ll 1$  решение (3.8.22) описывает колебания  $S_3$ -компоненты намагниченности с большой амплитудой в протяженной области. Частный случай таких колебаний, а именно когда  $\varepsilon$  вещественно, представлен на рис. 3.15. В общем случае точки экстремума функции  $S_3(x, t)$  достигают своих предельных значений в разные моменты времени.

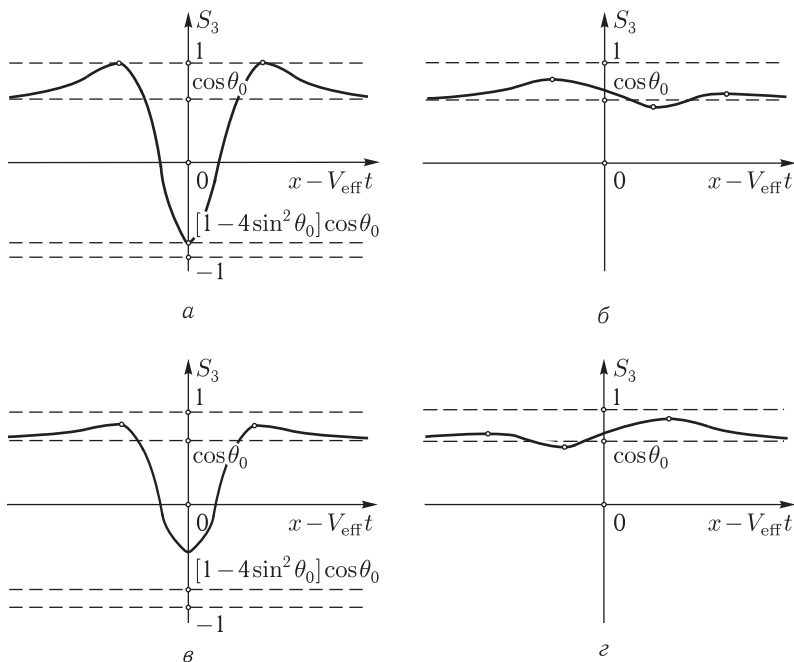


Рис. 3.15. Колебания  $S_3$ -компоненты намагниченности в моменты времени  $t = 0$  (а),  $t = T/4$  (б),  $t = T/2$  (в),  $t = 3T/4$  (г);  $T$  — период колебаний;  $\varepsilon$  выбрано малым и вещественным

В пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$  период колебаний неограниченно растет и выражение (3.8.22) описывает аperiодический процесс зарождения и последующего исчезновения локализованных модуляций компоненты  $S_3$  поля намагниченности. При этом экспоненциально-тригонометрическая зависимость  $\tilde{\gamma}$  от  $x, t$  заменяется на линейную. Такие кратковременные, но сильные «всплески» модуляций волны накачки могут привести к сбою в работе приборов и устройств. По своему характеру их возникновение напоминает формирование «волн-убийц» в океанологии.

### 3.8.3. Уединенный домен на фоне волны

Обсудим наиболее интересный частный случай решения (3.8.20), который соответствует взаимодействию уединенного домена («зародыша перемagnetизования») с нелинейной спиновой волной. С математической точки зрения, в этом случае нули (3.7.24) коэффициента  $a^*(u^*)$  приближаются к особым значениям (3.7.23), так что  $\tilde{\mu} = 2iK' + \varepsilon$ . Комплексный параметр  $\varepsilon$  определяет внутреннюю структуру и протяженность уединенного домена. В частности, размер домена будет тем больше, чем меньше  $|\varepsilon|$ . При достаточно малых  $|\varepsilon|$  распределение

намагниченности (3.8.20) хорошо аппроксимируется выражением

$$\begin{aligned}
 S_3 \approx & \tau \left( \cos \theta_0 \left[ \frac{|\varepsilon_0|^2}{2} \operatorname{ch} 2y - 1 \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{\kappa \sin \theta_0}{\sqrt{1 + \kappa^2}} [\varepsilon_0 \operatorname{sh}(y + i\Phi) + \varepsilon_0^* \operatorname{sh}(y - i\Phi)] \right), \\
 S_1 + iS_2 \approx & \tau \exp(i\Phi_0) \left( \frac{1}{4} \sin \theta_0 \exp(-i\Phi) \times \right. \\
 & \times \left[ \varepsilon_0^2 \exp(-2y) + \varepsilon_0^{*2} \exp(2y) \right] - \frac{i}{\sqrt{1 + \kappa^2}} [\varepsilon_0 \exp(-y) \times \\
 & \times (1 + i\kappa \cos \theta_0) + \varepsilon_0^* \exp(y)(1 - i\kappa \cos \theta_0)] - \\
 & \left. - \sin \theta_0 \exp(i\Phi) \right), \tag{3.8.23}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_0 &= (1 + k')\varepsilon, \quad \kappa = \frac{p}{\beta}, \\
 y &= -\beta x \cos \theta_0 - p\beta t \sin^2 \theta_0 + \ln \left| \frac{e_1}{e_2} \right|, \\
 \tau^{-1} &= \frac{|\varepsilon_0|^2}{2} \operatorname{ch} 2y + 1 - \frac{i \sin \theta_0}{\sqrt{1 + \kappa^2}} [\varepsilon_0 \operatorname{sh}(y + i\Phi) - \varepsilon_0^* \operatorname{sh}(y - i\Phi)]; \\
 \omega &= (p^2 + \beta^2) \cos \theta_0, \\
 \Phi &\approx \omega t - px + \arg \left( \frac{e_1}{e_2} \right); \quad \Phi_0 = \arg \left( \frac{e_1}{e_2} \right) + \delta_+.
 \end{aligned}$$

Приближенная формула (3.8.23) получена в результате «сшивания» асимптотик точного решения (3.8.20) при  $|\varepsilon| \ll 1$  в областях  $|y| < 1$  и  $|y| > 1$ . Вблизи стенок, ограничивающих домен, справедлива оценка  $|\varepsilon| \exp |y| = O(1)$  ( $|y| > 1, |\varepsilon| < 1$ ). Поэтому в разложении (3.8.23) удержаны слагаемые, содержащие малые коэффициенты  $O(\varepsilon^2)$  перед  $\exp(2|y|)$ .

Условия применимости приближенного решения  $|\partial_x \Phi + p|/|p| \ll 1$ ,  $|\partial_x y + \beta \cos \theta_0|/\beta \cos \theta_0 \ll 1$  нарушаются при малых волновых числах ( $p \approx 0$ ) и при больших углах прецессии ( $\theta_0 \approx \pi/2$ ) волны (3.8.1). Обоснованность приближения (3.8.23) можно подтвердить, перейдя в систему отсчета, связанную с одной из границ уединенного домена. Тогда в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$ , при условии  $|\varepsilon| \exp |y| = \text{const}$ , выражение (3.8.23) сводится к точному решению (3.7.38), описывающему отдельную доменную стенку на фоне волны накачки.

Согласно (3.8.23) в центре уединенного домена (при  $y \approx 0$ ) распределение намагниченности имеет вид

$$\begin{aligned}
 S_1 + iS_2 &\approx -\sin \theta_0 \exp \left[ -i \left( px - \omega t - 2 \arg \left( \frac{e_1}{e_2} \right) - \delta_+ \right) \right], \\
 S_3 &\approx -\cos \theta_0.
 \end{aligned}$$

При  $x \rightarrow \pm\infty$  намагниченность совершает неоднородную круговую прецессию вокруг оси  $Ox_3$ , связанную с распространением волны (3.8.1):

$$S_3 \approx \cos \theta_0, \quad S_1 + iS_2 \approx \sin \theta_0 \exp(i\varphi_{\pm}), \quad x \rightarrow \pm\infty;$$

$$\delta_+ - \delta_- = 4 \arg \varepsilon_0, \quad \varphi_{\pm} = px - \omega t + \delta_{\pm}.$$

Положения доменных стенок, ограничивающих домен, определяются условием  $S_3 \approx 0$ . Отсюда находим размер домена:

$$l \sim \frac{2}{\beta \cos \theta_0} \ln \frac{2}{|\varepsilon_0|}.$$

Вследствие распространения спиновой волны, в пределах доменных стенок намагниченность совершает неоднородную эллиптическую прецессию с нутационными колебаниями оси прецессии. Ширина доменных стенок  $d \sim 1/\beta \cos \theta_0 \ll l$ . Внутри каждой стенки проекция  $S_3$  резко изменяется от одного из своих квазиравновесных значений  $S_3 \approx \cos \theta_0$  до другого  $S_3 \approx -\cos \theta_0$ . «Центры тяжести» стенок колеблются около средних положений (см. рис. 3.16). Штриховые и сплошные стрелки на рисунке указывают на то, что левая и правая стенки уединенного домена колеблются поочередно.

Напомним, что в отсутствии волны уединенный домен так же, как доменная стенка, всегда неподвижен. Интересно и важно, что в результате взаимодействия с нелинейной волной домен начинает двигаться

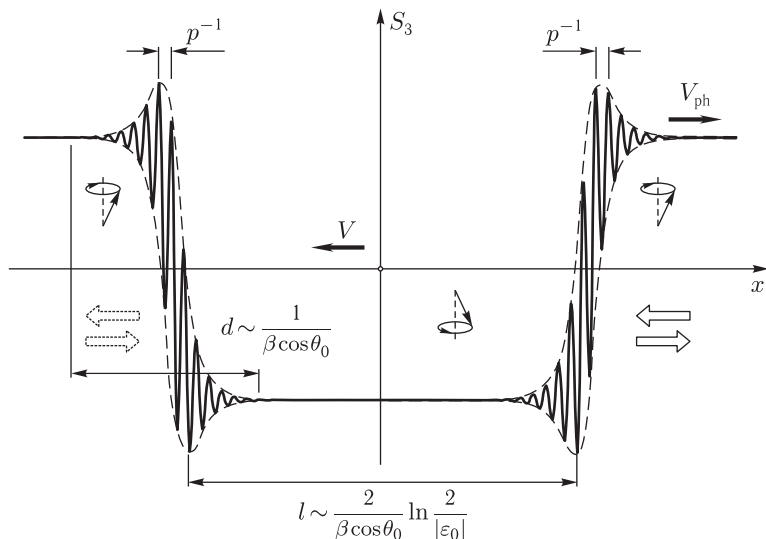


Рис. 3.16. Вынужденное движение уединенного домена в поле спиновой волны произвольной амплитуды



как целое навстречу волне, причем с той же скоростью, что и отдельная доменная стенка:

$$V = -p \operatorname{tg} \theta_0 \sin \theta_0.$$

Последнее свидетельствует о том, что скорость вынужденного движения доменных стенок не зависит от их хиральности. Важно, что скорость вынужденного движения доменных стенок и уединенных доменов можно контролировать, изменяя волновое число и амплитуду волны накачки.

### 3.9. Интегралы движения для солитонов на фоне волны

*Если по данному поводу нет закона, то он появится.*

*У. Гейтс*

Структурная устойчивость солитонов на фоне волны гарантируется нетривиальной серией законов сохранения, в число которых входят аналоги традиционных законов сохранения энергии и импульса. Приведем алгоритм построения интегралов движения для солитонов на фоне волны прецессии.

Рассмотрим вначале задачу о взаимодействии волны намагниченности с бризером. В этом случае аналитический в области  $\Gamma_-$  элемент  $a^*(u^*)$  матрицы перехода  $T(u)$  не зависит от времени. Поэтому он может использоваться в качестве производящей функции интегралов движения. Удобное для дальнейшего анализа представление функции  $a^*(u^*)$  имеет вид

$$a^*(u^*) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \left( \chi_1^{(0)}(x, t, u) \right)^{-1} \chi_2(x, t, u) \right]_{11}. \quad (3.9.1)$$

Покажем, что физически содержательные интегралы движения получаются из разложения функции  $\ln a^*(u^*)$  в асимптотический ряд по степеням  $(u - u_0)$ . Для этого необходимо найти разложения по степеням  $(u - u_0)$  решения  $\chi_2$ . Представим функцию  $\chi_2$  в виде

$$\chi_2 = \exp \left[ -\frac{i\sigma_3}{2} \varphi_+ \right] N [I + \Phi] \exp \left( \frac{\tau}{1} \sigma_3 \eta + Z \right), \quad (3.9.2)$$

где  $I$  — единичная матрица,  $\Phi$  — антидиагональная,  $Z$  — диагональная матричные функции от переменных  $x, t, u$  такие, что  $\Phi, Z \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Из условия  $\chi_2 \rightarrow \chi_2^{(0)}$  при  $x \rightarrow +\infty$ , находим вид матрицы  $N$ :

$$N = \begin{pmatrix} \beta(-u) & -\beta(u) \\ \beta(u) & \beta(-u) \end{pmatrix}.$$

Матрица  $N$  обладает свойствами:

$$\begin{aligned} N^{-1}(u) &= N^\dagger(u^*) [\beta(u)\beta^*(u^*) + \beta(-u)\beta^*(-u^*)]^{-1}, \\ N^{-1}\sigma_1 N &= w_1 \sin \theta_0 \tau^{-1} \sigma_3 + (w_3 \cos \theta_0 - p/2) \tau^{-1} \sigma_1, \\ N^{-1}\sigma_2 N &= \sigma_2, \\ N^{-1}\sigma_3 N &= (w_3 \cos \theta_0 - p/2) \tau^{-1} \sigma_3 - w_1 \sin \theta_0 \tau^{-1} \sigma_1. \end{aligned} \quad (3.9.3)$$

Используя формулы (3.9.3), после подстановки представления (3.9.2) во второе уравнение (3.7.6) получаем систему:

$$\begin{aligned} -i\tau\sigma_3 + \partial_x Z &= -iA_3\sigma_3 - i(A_1\sigma_1 + A_2\sigma_2)\Phi, \\ -i\tau\Phi\sigma_3 + \Phi\partial_x Z + \partial_x \Phi &= -i(A_1\sigma_1 + A_2\sigma_2) - iA_3\sigma_3\Phi. \end{aligned} \quad (3.9.4)$$

Функции  $A_i(x, t, u)$  в параметризации  $\mathbf{S} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$  имеют вид:

$$\begin{aligned} A_1 &= -\tau^{-1}(w_3 \cos \theta - p/2)w_1 \sin \theta_0 + \\ &\quad + w_1 \tau^{-1} \sin \theta \cos(\varphi - \varphi_+)(w_3 \cos \theta_0 - p/2), \\ A_2 &= w_1 \sin \theta \sin(\varphi - \varphi_+), \\ A_3 &= \tau^{-1}(w_3 \cos \theta - p/2)(w_3 \cos \theta_0 - p/2) + \\ &\quad + w_1^2 \tau^{-1} \sin \theta \cos(\varphi - \varphi_+) \sin \theta_0. \end{aligned}$$

Представим решение уравнений (3.9.4) и коэффициенты  $A_i(x, t, u)$ ,  $\tau(u)$  в виде рядов по степеням  $(u - u_0)$ :

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(u - u_0)^n, \quad Z = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(u - u_0)^n, \\ A_i &= \sum_{n=-1}^{\infty} A_i^{(n)}(u - u_0)^n, \quad \tau = \sum_{n=-1}^{\infty} \tau^{(n)}(u - u_0)^n. \end{aligned}$$

Коэффициенты  $\Phi_n$ ,  $Z_n$  определяются цепочкой рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} \partial_x \Phi_n - i \sum_{m=0}^{n+1} A_3^{(n-m)} [\Phi_m, \sigma_3] - \\ - i \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^{n+1} \Phi_{n-m} \left( A_1^{(m-k)} \sigma_1 + A_2^{(m-k)} \sigma_2 \right) \Phi_k + \\ + i \left( A_1^{(n)} \sigma_1 + A_2^{(n)} \sigma_2 \right) = 0, \\ Z_n = i\sigma_3 \int_x^{+\infty} \left[ A_3^{(n)} - \tau^{(n)} \right] dx' + \\ + i \int_x^{+\infty} \sum_{m=0}^{n+1} \left[ A_1^{(n-m)} \sigma_1 + A_2^{(n-m)} \sigma_2 \right] \Phi_m dx', \end{aligned}$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\Phi_0 = (1 + f_3)^{-1}(f_1\sigma_1 + f_2\sigma_2)\sigma_3$ ,

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & 0 & -\sin \theta_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_0 & 0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{S}_1 \\ \tilde{S}_2 \\ \tilde{S}_3 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{S}} = (\sin \theta \cos(\varphi - \varphi_+), \sin \theta \sin(\varphi - \varphi_+), \cos \theta).$$

С помощью рядов для функции  $\chi_2$ , используя представление (3.9.1), находим разложение функции  $\ln a^*(u^*)$  в ряд по степеням  $(u - u_0)$ :

$$\ln a^*(u^*) = \frac{i}{2}P - \frac{i\sqrt{k'}}{\beta \sin \theta_0} H(u - u_0) + \dots \quad (3.9.5)$$

Первые слагаемые представляют полевой импульс  $P$  и энергию  $H$  бризера. Под импульсом бризера понимаем разность между полным импульсом системы и импульсом волны намагнитченности (3.8.1):

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} [p \cos \theta_0 - \partial_x \varphi \cos \theta] dx. \quad (3.9.6)$$

Аналогично определяем энергию бризера:

$$H = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ (\partial_x \theta)^2 + (\partial_x \varphi)^2 \sin^2 \theta + \right. \\ \left. + \beta^2 \sin^2 \theta - (p^2 + \beta^2) \sin^2 \theta_0 \right] dx. \quad (3.9.7)$$

Используя соотношения (3.8.14), (3.8.21) и явное выражение (3.8.18) для коэффициента  $a^*(u^*)$ , находим:

$$P = -2i \ln a^*(u_0) = -2i \ln \frac{\varphi^*(u_0)}{\varphi(u_0)} = -4 \arg \varphi(u_0) \pmod{2\pi},$$

$$H = i \beta (k')^{-1/2} \sin \theta_0 \left. \frac{d \ln a^*(u^*)}{du} \right|_{u=u_0} = -8 \operatorname{Im} \tau(\mu). \quad (3.9.8)$$

Из формул (3.9.8) видно, что импульс и энергия бризера существенно зависят от параметров  $u_0$ ,  $k'$  волны намагнитченности (3.8.1). Это обстоятельство следует учитывать при теоретическом описании физических свойств системы, образованной волной и солитонами.

Кроме того, непосредственно из уравнений движения (3.7.1) следует еще один интеграл движения:

$$N_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} (S_3^{(0)} - S_3) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos \theta_0 - \cos \theta) dx.$$

При квазиклассическом квантовании энергии солитонов интеграл движения  $N_0$  определяет так называемое число спиновых отклонений [5]. Однако  $N_0$  не содержится в семействе сохраняющихся величин (3.9.5).

Для того чтобы найти явное выражение для  $N_0$ , заметим, что в точке  $u = -iK' + K/2$  справедливы равенства

$$\begin{aligned}\varphi(-iK' + K/2) &= w_1(-iK' + K/2) = 0, \\ w_3(-iK' + K/2) &= -i\frac{\beta}{2}, \quad \tau(-iK' + K/2) = -\frac{i\beta \cos \theta_0 - p}{2}.\end{aligned}$$

При этом матричные функции  $\chi_{1,2}^{(0)}$ ,  $\Psi_{\pm}$  в точке  $u = -iK' + K/2$  становятся диагональными. С учетом этих замечаний из второго уравнения (3.7.6) находим:

$$N_0 = \frac{2}{\beta} \ln \left[ \Psi_- \left( x, t, u = -iK' + \frac{K}{2} \right) \right]_{11} \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} = \frac{4}{\beta} \ln \left| \frac{k^2 \tilde{s} \tilde{c}}{(1 + \tilde{d})(\tilde{d} - k')} \right|.$$

Следуя аналогичной схеме, можно найти импульс и энергию доменной границы на фоне волны намагниченности. В этом случае в качестве производящей функции интегралов движения следует использовать функцию  $b(u)$ , которая допускает представление

$$b(u) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \left( \chi_1^{(0)}(x, t, u) \right)^{-1} \chi_2(x, t, u) \right]_{21}.$$

Используя уже найденные разложения для  $\chi_2$ , получаем:

$$\ln b(u) = \frac{i}{2} P - \frac{i\sqrt{k'}}{\beta \sin \theta_0} H(u - u_0) + \dots$$

Полевой импульс  $P$  и энергия  $H$  доменной стенки определяются теми же формулами (3.9.6), (3.9.7), что и для бризера.

С другой стороны, функция  $b(u)$  найдена нами явно (см. (3.7.26), (П.17)). Потому имеем:

$$P = -2i \ln \left( \frac{(i+1)(\operatorname{dn} u_0 - i\sqrt{k'})}{(i-1)(\operatorname{dn} u_0 + i\sqrt{k'})} \right) \pmod{2\pi}, \quad H = 2\beta \cos \theta_0. \quad (3.9.9)$$

Как уже упоминалось, частный случай взаимодействия уединенного домена с волной намагниченности получается из общего решения (3.8.20), описывающего бризер, в пределе  $\tilde{\mu} = 2iK' + \varepsilon$ ,  $|\varepsilon| \ll 1$ , где параметр  $|\varepsilon|^{-1}$  определяет протяженность домена (см. (3.8.23)). Нетрудно проверить, что в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$  энергия уединенного домена (3.9.8) сводится к сумме энергий (3.9.9) ограничивающих его доменных стенок.

## Глава 4

# ДИНАМИКА КВАЗИОДНОМЕРНОГО ФЕРРОМАГНЕТИКА С АНИЗОТРОПИЕЙ ТИПА «ЛЕГКАЯ ПЛОСКОСТЬ»

### 4.1. Солитоны на фоне волны намагниченности и метод «одевания»

*Аналогия и опыт суть две клюки, на  
которых мы тащимся по дороге умство-  
ваний.*

*В. Фридрих*

Построение солитонных решений интегрируемых моделей с разными асимптотическими условиями на пространственной бесконечности требует детального анализа свойств аналитичности матричных функций задачи Римана. В то же время солитонные решения с одинаковым асимптотическим поведением на бесконечности найти проще. Дело в том, что в этом случае выбор контура и мероморфных функций задачи Римана допускает некоторую степень произвола. В конечном счете при осуществлении процедуры «одевания» наиболее важны два момента: устранение дополнительных полюсов в «одевающих» уравнениях и учет редукций, гарантирующих верные трансформационные свойства новых решений. Это замечание оказывается конструктивным, так как позволяет сравнительно легко строить широкие классы точных решений интегрируемых моделей. Проиллюстрируем открывающуюся возможность на примере построения солитоноподобных решений квазиодномерной модели ферромагнетика (3.1.19) с анизотропией типа «легкая плоскость».

Нетрудно проверить, что уравнения легкоплоскостного ферромагнетика (3.1.19) имеют частное решение типа волны прецессии немалой амплитуды (рис. 4.1):

$$\mathbf{S}^{(0)} = (\cos \theta_0 \cos \varphi_0, \cos \theta_0 \sin \varphi_0, \sin \theta_0). \quad (4.1.1)$$

Здесь угол  $\theta_0 = \text{const}$  определяет амплитуду волны, фаза  $\varphi_0 = pz - \omega t$ ,  $p$  — волновое число, частота прецессии  $\omega = (p^2 - p^2) \sin \theta_0$ . Используем решение (4.1.1) в качестве «затравочного» и методом «одевания» построим новые солитоноподобные решения модели (3.1.19). Оказывается, что в результате мы получим аналитические решения, которые описывают взаимодействие нелокализованной волны (4.1.1)

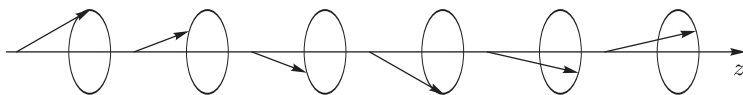


Рис. 4.1. Пространственно нелокализованная волна прецессии

с уединенными волнами [1, 2]. Причем это именно те уединенные волны, которые в отсутствии волны накачки (4.1.1) соответствуют типичным магнитным солитонам легкоплоскостного ферромагнетика. Взаимодействие волны накачки с солитонами изменяет их физические характеристики: ширину, скорость, энергию, импульс. При определенных значениях параметров волна разрушает магнитные солитоны.

Линейный анализ устойчивости нелинейной волны (4.1.1) приводит к выводу, что она устойчива лишь при волновых числах, удовлетворяющих ограничению

$$0 < p^2 < \rho^2. \quad (4.1.2)$$

Поэтому решения модели (3.1.19) с асимптотиками типа (4.1.1) при  $z \rightarrow \pm\infty$  будем рассматривать только при условии (4.1.2).

Кроме того, в этом разделе мы дадим полную классификацию солитоноподобных возбуждений, которые образуются в легкоплоскостном ферромагнетике в отсутствии спиновой волны, но при наличии направленного вдоль оси анизотропии внешнего магнитного поля. В работе [3] для изучения таких состояний привлекался метод Хироты.

Отметим, что существует возможность непосредственного сопоставления результатов теории с экспериментальными данными для квазиодномерных магнитных кристаллов с анизотропией типа «легкая плоскость» [4–9]. Типичным представителем таких кристаллов служит соединение  $\text{CsNiF}_3$ . Эксперименты по неупругому рассеянию нейтронов указывают на существование солитоноподобных возбуждений в  $\text{CsNiF}_3$ .

В дальнейшем анализе используется задача Римана с канонической нормировкой на единичную матрицу в точке  $\lambda = \infty$ . Для согласования канонической нормировки с  $U$ - $V$ -парой (3.1.15), (3.1.20) перейдем от вспомогательной линейной системы

$$\partial_z \varphi = U \varphi, \quad \partial_t \varphi = V \varphi \quad (4.1.3)$$

к калибровочно-эквивалентной системе

$$\partial_z \chi = \tilde{U}(\lambda) \chi, \quad \partial_t \chi = \tilde{V}(\lambda) \chi, \quad (4.1.4)$$

где  $\chi = g^\dagger \varphi$ ,

$$\tilde{U}(\lambda) = g^\dagger (U(\lambda) - U(\lambda = \infty)) g,$$

$$\tilde{V}(\lambda) = g^\dagger (V(\lambda) - V(\lambda = \infty)) g,$$

$$g = \exp \left[ -\frac{i\sigma_3 \rho}{2} \left( \int_{z_0}^z S_3(z', t) dz' + \int_{t_0}^t [\mathbf{S} \times \partial_z \mathbf{S}]_3 dt' \Big|_{z=z_0} \right) \right].$$

При наличии волны прецессии асимптотика решений модели (3.1.19) при  $z \rightarrow -\infty$  должна иметь вид

$$S_3 \rightarrow \tilde{S}_3 = \text{const}, \quad [\mathbf{S} \times \partial_z \mathbf{S}]_3 \rightarrow [\tilde{\mathbf{S}} \times \partial_z \tilde{\mathbf{S}}]_3 = \text{const}.$$

Поэтому формулу, определяющую  $g$ , можно записать проще:

$$g = \exp \left[ -\frac{i\sigma_3 \rho}{2} \left( \int_{-\infty}^z (S_3(z', t) - \tilde{S}_3) dz' + \tilde{S}_3 z + [\tilde{\mathbf{S}} \times \partial_z \tilde{\mathbf{S}}]_3 t \right) \right].$$

Здесь мы учли, что при  $z \rightarrow \pm\infty$  асимптотики новых решений, которые будут построены предлагаемой процедурой, хотя и принадлежат классу нелинейных волн вида (4.1.1), но не совпадают с «затравочным» решением (4.1.1).

При заданном решении (4.1.1) модели (3.1.19) вспомогательная линейная система (4.1.3) имеет решение:

$$\begin{aligned} f_0(\lambda) &= \exp \left( -\frac{i\sigma_3}{2} \varphi_0 \right) A(\lambda) \exp(\sigma_3 \eta(\lambda)), \\ A(\lambda) &= \begin{pmatrix} a(\lambda) + \kappa(\lambda) & -b(\lambda) \\ b(\lambda) & a(\lambda) + \kappa(\lambda) \end{pmatrix}, \\ a(\lambda) &= w_3(\lambda) \sin \theta_0 - p/2, \quad b(\lambda) = w_1(\lambda) \cos \theta_0, \\ \eta(\lambda) &= i\kappa(\lambda) [(2w_3(\lambda) + p \sin \theta_0) t - z], \quad \kappa^2(\lambda) = a^2(\lambda) + b^2(\lambda). \end{aligned}$$

Отсюда решение калибровочно-эквивалентной системы (4.1.4) есть

$$\chi_0(\lambda) = g_0^\dagger f_0(\lambda), \quad g_0 = \exp \left[ -\frac{i\rho\sigma_3}{2} (z \sin \theta_0 + t p \cos^2 \theta_0) \right]. \quad (4.1.5)$$

Будем искать новое решение вспомогательной линейной системы (4.1.4) в виде

$$\chi(\lambda) = \Psi(\lambda) \chi_0(\lambda).$$

Непосредственно из представления (4.1.4) следует, что матричная функция  $\Psi(\lambda)$  может быть выбрана нормированной на единичную матрицу в точке  $\lambda = \infty$  ( $\Psi(\lambda = \infty) = I$ ) и удовлетворяющей ограничениям

$$\Psi(\lambda) = \sigma_1 \Psi^* (-\lambda^*) \sigma_1, \quad \Psi^\dagger (\lambda^*) \Psi(\lambda) = I. \quad (4.1.6)$$

Новые матричные функции  $\tilde{U}(z, t, \lambda)$ ,  $\tilde{V}(z, t, \lambda)$  порождаются формулами

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= \partial_z \Psi(\lambda) \Psi^{-1}(\lambda) + \Psi(\lambda) \tilde{U}_0(\lambda) \Psi^{-1}(\lambda), \\ \tilde{V} &= \partial_t \Psi(\lambda) \Psi^{-1}(\lambda) + \Psi(\lambda) \tilde{V}_0(\lambda) \Psi^{-1}(\lambda). \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

Здесь  $\tilde{U}_0$ ,  $\tilde{V}_0$  — значения матричных функций  $\tilde{U}$  и  $\tilde{V}$  при  $\mathbf{S} = \mathbf{S}^{(0)}$ . Взяв вычет в точке  $\lambda = 1$  первого равенства (4.1.7), получаем важное соотношение:

$$S_k \sigma_k = g \Psi(\lambda = 1) g_0^\dagger S_k^{(0)} \sigma_k g_0 \Psi^\dagger(\lambda = 1) g^\dagger, \quad (4.1.8)$$

определяющее вектор намагниченности  $\mathbf{S}(z, t)$  через элементы матрицы  $\Psi(z, t, \lambda)$  и «затравочное» решение  $\mathbf{S}^{(0)}$ .

Для солитоноподобных состояний явный вид матричных функций  $\Psi(z, t, \lambda)$  можно найти в результате алгебраических вычислений по заданным редукциям (4.1.6) из требования отсутствия дополнительных полюсов в выражениях (4.1.7). Прямой проверкой нетрудно убедиться, что сформулированным условиям удовлетворяют мероморфные в комплексной  $\lambda$ -плоскости матричные функции следующего вида:

$$\Psi_{\alpha\beta}(\lambda) = \delta_{\alpha\beta} + \sum_{i,j=1}^n \frac{(m^i)_{\alpha} (m^j)_{\beta}^*}{\lambda - \lambda_j} \frac{\partial \ln \det D}{\partial d_{ji}}, \quad (4.1.9)$$

где  $D$  — матрица  $n \times n$  с элементами

$$d_{ij} = \frac{(\mathbf{m}^{i*} \cdot \mathbf{m}^j)}{\lambda_i - \lambda_j^*}.$$

Двумерные комплексные векторы  $\mathbf{m}^i$  и комплексные числа  $\lambda_j$  связаны между собой одним из двух возможных способов:

$$\begin{aligned} n &= 2N, \quad \lambda_{k+N} = -\lambda_k^* \quad (\lambda_k \neq -\lambda_k^*), \quad \mathbf{m}^{k+N} = \sigma_1 (\mathbf{m}^k)^*, \\ k &= 1, 2, \dots, N, \quad N = 1, 2, \dots; \\ n &= 1, 2, \dots, N, \quad \lambda_i^* = -\lambda_i, \quad (m^k)_1^* = (m^k)_2 \exp(i\varphi_k). \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

В формуле (4.1.10) величины  $\varphi_k$  — произвольные вещественные параметры.

При  $\lambda_k \neq -\lambda_k^*$  векторы  $\mathbf{m}^k$  имеют вид

$$\mathbf{m}^k = \chi_0(z, t, \lambda_k^*) \mathbf{c}^k, \quad (4.1.11)$$

где  $\mathbf{c}^k$  — произвольные постоянные комплексные векторы. Используя решение (4.1.5), находим явный вид векторов  $\mathbf{m}^k$ :

$$\begin{aligned} (m^k)_1 &= \exp(-iy) [(a(\lambda_k^*) + \kappa(\lambda_k^*)) \exp \gamma_k - b(\lambda_k^*) \exp(-\gamma_k)], \\ (m^k)_2 &= \exp(iy) [b(\lambda_k^*) \exp(\gamma_k) + (a(\lambda_k^*) + \kappa(\lambda_k^*)) \exp(-\gamma_k)], \\ y &= \frac{1}{2} (\rho \sin \theta_0 - p) [(p \sin \theta_0 + \rho)t - z], \\ \gamma_k &= \eta(\lambda_k^*) + \frac{1}{2} \ln \frac{(c^k)_1}{(c^k)_2}. \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

При чисто мнимых полюсах  $\lambda_k = -\lambda_k^*$  векторы  $\mathbf{m}^k$  по-прежнему определяются формулами (4.1.11), однако постоянные векторы  $\mathbf{c}^k$  уже не являются произвольными. Их необходимо подобрать так, чтобы выполнялись ограничения

$$(m^k)_1^* = (m^k)_2 \exp(i\varphi_k),$$



где фаза  $\varphi_k$  вещественна. Нетрудно проверить, что такое условие будет выполнено, если в формулах (4.1.12) положить

$$\frac{1}{2} \ln \frac{(c^k)_1}{(c^k)_2} = i \kappa (\lambda_k^*) \delta_k + \frac{\pi i}{4}, \quad \delta_k = \delta_k^* = \text{const.}$$

При этом параметры  $\kappa (\lambda_k^*)$  будут либо вещественными, либо чисто мнимыми числами.

Соотношение (4.1.8) порождает новый класс  $N$ -солитонных решений модели (3.1.19). Из «одевающего» уравнения (4.1.8) вначале находим компоненту  $S_3(z, t)$  поля намагниченности. Для этого достаточно знать матричную функцию  $\Psi(z, t, \lambda)$  (4.1.9). Расчет оставшихся компонент намагниченности сводится к простому интегрированию выражения для  $S_3(z, t)$  и алгебраическим операциям.

При наличии зависящего от времени внешнего магнитного поля, направленного вдоль оси анизотропии, решения модели легкоплоскостного ферромагнетика (3.1.9) ( $\xi = z, \tilde{\beta} = -\rho^2$ ), легко получить из решений модели (3.1.19) в отсутствии поля. Для этого достаточно воспользоваться преобразованием (3.1.10), которое приводит к дополнительной прецессии вектора намагниченности вокруг направления поля.

Отметим, что магнитные солитоны, полученные «одеванием» волны прецессии (4.1.1) не являются локализованными в пространстве. Более того, оказывается, что даже односолитонное решение уравнений легкоплоскостного ферромагнетика описывает несколько типов магнитных возбуждений. Изучению этих неоднородных состояний посвящены следующие разделы.

## 4.2. Рассеяние волны прецессии произвольной амплитуды на алгебраических солитонах и волнах поворота намагниченности. Разрушение солитонов

*Сложные системы приводят к неожиданным следствиям.*

*Одна из формулировок обобщенного принципа неопределенности Мерфи*

В этом разделе будут проанализированы магнитные возбуждения в ферромагнетике с анизотропией типа «легкая плоскость», которые получены с помощью матричной функции (4.1.9) с одним чисто мнимым полюсом  $\lambda_1 = -\lambda_1^*$ .

Обсудим сначала односолитонное решение, когда внешнее магнитное поле отсутствует:

$$\begin{aligned} S_3 &= -\frac{p}{\rho} - \frac{2i\kappa^2}{\rho(i a - b \operatorname{ch} 2\gamma)}, \quad \gamma = i\kappa[(2w_3 + p \sin \theta_0)t - z + \delta_1], \\ S_1 - iS_2 &= -\exp[i(\rho z \sin \theta_0 + \rho p t \cos^2 \theta_0)] \times \\ &\times \left[ \frac{2w_1}{\rho} \sin \theta_0 + \frac{\kappa \rho \operatorname{sh} 2\gamma + 2w_3(a \operatorname{ch} 2\gamma + i b)}{\rho(i a - b \operatorname{ch} 2\gamma)} \cos \theta_0 \right]. \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Здесь и далее мы для краткости опускаем аргумент  $\lambda_1^*$  у функций  $a(\lambda_1^*)$ ,  $b(\lambda_1^*)$ ,  $\kappa(\lambda_1^*)$ ,  $w_{1,3}(\lambda_1^*)$ .

Заметим, что, если в формулах (4.2.1) величина  $i\kappa(\lambda_1^*)$  вещественна (и для определенности отрицательна), тогда при  $z \rightarrow \pm\infty$  вне области, линейный размер которой характеризуется величиной  $d = |2\kappa|^{-1}$ , решение асимптотически приближается к волне прецессии:

$$\begin{aligned} S_3 &\rightarrow \sin \tilde{\theta}, \\ S_1 - iS_2 &\rightarrow \exp[i(\tilde{\omega}t - \tilde{p}z \pm \Delta\varphi/2)] \cos \tilde{\theta}, \\ \tilde{\omega} &= \sin \tilde{\theta}(\tilde{p}^2 - \rho^2), \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

которая по своей форме совпадает с «затравочным» решением (4.1.1). Амплитуда  $\sin \tilde{\theta}$ , волновое число  $\tilde{p}$  и сдвиг фазы  $\Delta\varphi$  волны прецессии (4.2.2) выражаются через параметры «затравочного» решения:

$$\begin{aligned} \sin \tilde{\theta} &= -\frac{p}{\rho}, \quad \tilde{p} = -\rho \sin \theta_0, \\ \frac{\Delta\varphi}{2} &= -\arctg \left[ \frac{2b}{i\kappa \rho \cos \theta_0} (w_1 \sin \theta_0 - w_3 a b^{-1} \cos \theta_0) \right]. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Следовательно, решение (4.2.1) можно интерпретировать как рассеяние волны намагниченности (4.2.2) на некотором локализованном магнитном возбуждении. Особенностью рассеяния является его безотражательный характер (при  $z \rightarrow -\infty$  имеем только падающую волну, при  $z \rightarrow +\infty$  — прошедшую). После прохождения через локализованное возбуждение волна (4.2.2) приобретает фазовый множитель, который определяет поворот вектора  $\mathbf{S}$  в плоскости  $(x_1, x_2)$  на угол  $\Delta\varphi = \text{const}$ .

Выразим ширину локализованного возбуждения  $d$  и сдвиг фазы  $\Delta\varphi$  через физические параметры задачи:

$$\begin{aligned} d &= \left[ \rho^2 \left( 1 - \frac{\tilde{p}^2}{\rho^2} \right) \cos^2 \tilde{\theta} - (V - V_0)^2 \right]^{-1/2}, \\ \Delta\varphi &= -2 \arctg \left( d [V \sin \tilde{\theta} - \tilde{p} (1 + \sin^2 \tilde{\theta})] \right). \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Здесь  $V$  и  $V_0$  — групповые скорости локализованного возбуждения и волны намагниченности (4.2.2) соответственно:

$$V = 2w_3 + \tilde{p} \sin \tilde{\theta}, \quad V_0 = \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \tilde{p}} = 2\tilde{p} \sin \tilde{\theta}. \quad (4.2.5)$$

Величина  $2w_3$  в формуле (4.2.5) равна скорости самолокализованного возбуждения в отсутствии волны (4.2.2) (при  $\tilde{p} = \tilde{\omega} = 0$ ), добавка численно равна плотности импульса волны:

$$p_0 = \tilde{p} \sin \tilde{\theta}. \quad (4.2.6)$$

Из (4.2.4) заключаем, что локализованное магнитное возбуждение существует только при  $0 \leq \tilde{p}^2 < \rho^2$ . Плотность энергии волны (4.2.2) имеет вид

$$w = \frac{1}{2} \left[ \cos^2 \tilde{\theta} \left( \frac{p_0^2}{\sin^2 \tilde{\theta}} - \rho^2 \right) + \rho^2 \right].$$

Следовательно, условие  $\tilde{p}^2 < \rho^2$  означает, что вклад обменной энергии мал по сравнению с энергией анизотропии:

$$\frac{p_0^2}{\sin^2 \tilde{\theta}} < \rho^2. \quad (4.2.7)$$

Если условие (4.2.7) выполнено, то локализованное возбуждение существует, когда его скорость  $V$  принадлежит интервалу

$$\min \{V_1, V_2\} < V < \max \{V_1, V_2\}, \quad V_{1,2} = V_0 \pm \rho \sqrt{1 + \tilde{p}^2 / \rho^2} \cos \tilde{\theta}.$$

Согласно (4.2.4), информацию о величине скорости локализованного возбуждения и его ширине содержит, фазовый сдвиг  $\Delta\varphi$ .

Обсудим вначале структуру локализованного возбуждения в отсутствии волны намагнитченности (4.2.2) (положим  $\tilde{p} = \tilde{\omega} = 0$ ). В этом случае

$$S_3 = -\frac{2i w_1}{\rho \operatorname{ch} 2\gamma}, \quad S_2 = \frac{2 w_3}{\rho \operatorname{ch} 2\gamma}, \quad S_1 = \operatorname{th} 2\gamma, \quad (4.2.8)$$

$$\gamma = i w_1 (2 w_3 t - z + \delta_1).$$

Решение (4.2.8) было найдено в [10] непосредственным интегрированием уравнений (3.1.19). Оно описывает волну поворота намагнитченности, движущуюся со скоростью  $2w_3$ , асимптотика которой при  $z \rightarrow \pm\infty$  однородна:  $S_{2,3} \rightarrow 0$ ,  $S_1 \rightarrow \pm 1$  (рис. 4.2).

Как показано в работе [11], в рассматриваемой нами одномерной модели решение (4.2.8) устойчиво относительно любых малых возмущений его формы. Оно становится неустойчивым при изменении самих уравнений движения, например при учете трехмерности ферромагнетика. Вследствие этого считаем, что волны поворота можно наблюдать в квазиодномерных магнитных кристаллах.

При  $\tilde{p} \neq 0$ ,  $\tilde{\omega} \neq 0$  фаза величины  $S_1 - iS_2$  изменяется и приобретает дополнительное слагаемое  $\tilde{\omega}t - \tilde{p}z$ , приводящее к фазовой модуляции волны поворота. В пределе  $z \rightarrow \pm\infty$  ни одна из компонент вектора  $\mathbf{S}$  не достигает максимального значения, равного единице.

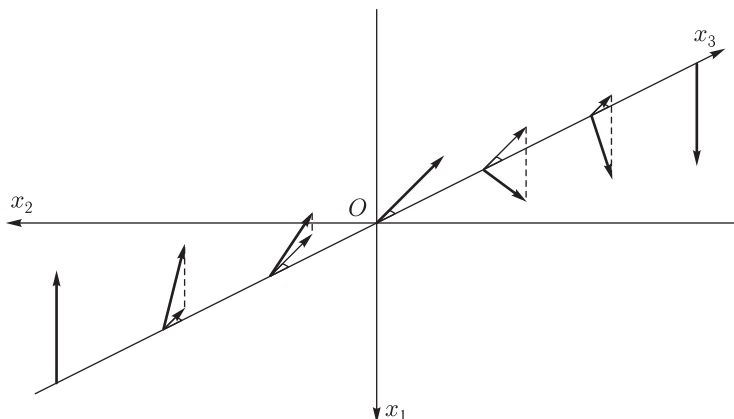


Рис. 4.2. Распределение намагниченности в волне поворота (4.2.8). Проекция вектора  $\mathbf{S}$  на плоскость образует угол  $r$  с осью  $Ox_3$ :  $\cos r = -2iw_1/\rho$ ,  $\sin r = 2w_3/\rho$

Плотность энергии (импульса), соответствующая решению (4.2.1), разбивается на сумму двух слагаемых [1, 2], причем первое совпадает с плотностью энергии (импульса) волны (4.2.2), а второе мы интерпретируем как плотность энергии (импульса) локализованного магнитного возбуждения. Отметим, что несмотря на указанную аддитивность выполняется лишь «ослабленный принцип асимптотической суперпозиции», так как остается зависимость энергии (импульса) от параметров волны прецессии (4.2.2). Это обстоятельство нужно учитывать, например, при описании термодинамических свойств рассматриваемых коллективных возбуждений.

Полная энергия локализованного возбуждения имеет вид

$$E = \frac{2}{d}. \quad (4.2.9)$$

Согласно (4.2.4), (4.2.9) с увеличением волнового числа  $|\tilde{p}|$  ( $\tilde{p}^2 < \rho^2$ ) ширина  $d$  локализованного возбуждения неограниченно увеличивается, а его энергия уменьшается. Происходит расплывание локализованного возбуждения по мере увеличения полевого импульса (4.2.6) волны прецессии. При заданных параметрах  $\tilde{p}$  и  $\sin \theta$  волны накачки (4.2.2) в локализованном возбуждении сконцентрирована максимальная энергия, если его скорость совпадает с групповой скоростью волны.

Отметим, что экспоненциальная зависимость от пространственной координаты и времени, характерная при  $\kappa^2 = a^2 + b^2 < 0$  для локализованного магнитного возбуждения, в пределе  $ia - b \rightarrow 0$  или, что то же самое, при

$$i\lambda_1 \rightarrow \frac{\cos \theta_0 \pm \sqrt{1 - (p/\rho)^2}}{\sin \theta_0 - p/\rho}$$

вырождается в рациональную. В этом пределе решение (4.2.1) имеет вид

$$S_3 = -\frac{p}{\rho} + \frac{4ib}{\rho(1-4b^2\sigma^2)}, \quad \sigma = (2w_3 + p \sin \theta_0)t - z + \delta_1,$$

$$S_1 - iS_2 = \exp[\rho i(z \sin \theta_0 + p t \cos^2 \theta_0)] \left[ -\frac{2w_1}{\rho} \sin \theta_0 + \right. \quad (4.2.10)$$

$$\left. + \frac{4ib\sigma\rho + 2iw_3(1+4b^2\sigma^2)}{(1-4b^2\sigma^2)\rho} \cos \theta_0 \right]$$

и описывает рассеяние без отражения волны намагниченности (4.2.2) на алгебраическом солитоне.

При  $p_0^2/\sin^2 \tilde{\theta} > \rho^2$  локализованного возбуждения не существует ( $\kappa^2 = a^2 + b^2 > 0$ ), так как кинетическая энергия волны прецессии (4.2.2) больше энергии анизотропии, ответственной за его образование. В этом случае решение (4.2.1) можно представить как «наложение» двух нелокализованных волн намагниченности с характеристиками

$$(2w_3 + p \sin \theta_0)t - z = \text{const}, \quad \rho z \sin \theta_0 + \rho p t \cos^2 \theta_0 = \text{const}.$$

При распространении первой из них изменяются все компоненты вектора  $\mathbf{S}$ , а при распространении второй — только  $S_1$  и  $S_2$ . Этот результат согласуется с условием (4.1.2), согласно которому волна прецессии неустойчива относительно длинноволновых модуляций при  $\tilde{p}^2 > \rho^2$ .

Обсудим нелинейные возбуждения ферромагнетика в присутствии магнитного поля, перпендикулярного «легкой плоскости»:  $\mathbf{H} = (0, 0, H)$ . Решения уравнений Ландау–Лифшица (3.1.9)  $\xi = z$ ,  $\tilde{\beta} = -\rho^2$  при наличии магнитного поля с помощью преобразования (3.1.10) нетрудно получить из рассмотренных выше решений (4.2.1) и (4.2.10). В частности, можно воспроизвести результаты работ [12–15], где найдены решения с однородной асимптотикой при  $z \rightarrow \pm\infty$ , описывающие волны поворота и алгебраические солитоны в постоянном магнитном поле ( $H = \text{const}$ ) без бегущей волны накачки. Для этого в соотношениях (4.2.1), (4.2.10) следует положить  $\tilde{p} = 0$  и учесть, что в магнитном поле равновесные значения намагниченности при  $z \rightarrow \pm\infty$  определяются соотношениями

$$\sin \tilde{\theta} = \frac{H}{\rho^2} \quad (|H| < \rho^2), \quad \sin \tilde{\theta} = \text{sign} H \quad (|H| > \rho^2). \quad (4.2.11)$$

Во избежание недоразумений напомним, что в данном случае волновое число  $\tilde{p}$  и амплитуда  $\sin \tilde{\theta}$  волны накачки (4.2.2) отличаются от аналогичных характеристик у «затравочного» решения (см. формулы (4.1.1), (4.2.2), (4.2.3)).

Окончательный результат удобно выразить через физические параметры задачи: скорость солитона  $V$  и величину магнитного поля  $H$ .

Условие  $\text{Re}(i\kappa) \neq 0$ , определяющее область существования самолокализованных возбуждений, сводится к ограничению

$$|H| < H_c = \rho\sqrt{\rho^2 - V^2} \leq \rho^2. \quad (4.2.12)$$

Учитывая (4.2.11), (4.2.12), из (3.1.10), (4.2.1) находим

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{H}{\rho^2} + \frac{A^2 - (H/\rho^2)^2}{H/\rho^2 + A \operatorname{ch} 2\gamma}, \\ S_1 - iS_2 &= \frac{1}{H/\rho^2 + A \operatorname{ch} 2\gamma} \left[ \frac{\operatorname{sh} 2\gamma}{\rho d} - \frac{iV}{\rho} \left( \frac{H}{\rho^2} \operatorname{ch} 2\gamma + A \right) \right], \\ d^{-1} &= \sqrt{\rho^2 - V^2 - H^2/\rho^2}, \quad 2\gamma = d^{-1}(x - Vt + \delta_1), \\ V &= 2w_3, \quad A = -\operatorname{sign}(i w_1) \sqrt{1 - V^2/\rho^2}. \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

В формулах (4.2.13) величина  $A$  равняется значению  $S_3$  в центре солитона, при  $H = 0$  (4.2.13) совпадает с волной поворота (4.2.8). При этом знак величины  $A$  не играет большой роли. В присутствии магнитного поля характер решения существенно зависит от направления проекции  $A$ : по полю  $AH > 0$  или против поля  $AH < 0$  (см. рис. 4.3). В первом случае по мере увеличения  $H$  ( $H \rightarrow H_c$ ,  $H < H_c$ ) ширина волны поворота неограниченно увеличивается, а ее амплитуда стремится к нулю. Если  $AH < 0$ , то с ростом  $H$  увеличивается амплитуда и ширина солитона, и в пределе  $H \rightarrow H_c$  решение (4.2.13) вырождается в алгебраический солитон [12]:

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{H}{\rho^2} \left( 1 - \frac{2\rho^2}{\rho^2 + H^2\sigma^2} \right), \quad \sigma = z - Vt + \delta_1, \\ S_1 - iS_2 &= -\frac{\rho^2}{\rho^2 + H^2\sigma^2} \left[ \frac{2H\sigma}{\rho} + \frac{iV}{\rho} \left( 1 - \frac{H^2\sigma^2}{\rho^2} \right) \right], \\ V &= \operatorname{sign} w_3 \sqrt{\rho^2 - H^2/\rho^2}. \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

Исходя из результатов работы [11], мы предполагаем, что в рамках одномерной модели решение (4.2.13) устойчиво, по крайней мере в области малых магнитных полей.

Приведем аргументы работ [13, 14, 16], которые позволяют понять причину существования волн поворота (4.2.13) только в определенном интервале магнитных полей при  $|H| < \rho^2$ . В этой области значений  $H$  спектр линейных спин-волновых мод (магнонов) имеет вид [17, 18]

$$\varepsilon = |p| \sqrt{p^2 + \rho^2 - H^2/\rho^2}, \quad (4.2.15)$$

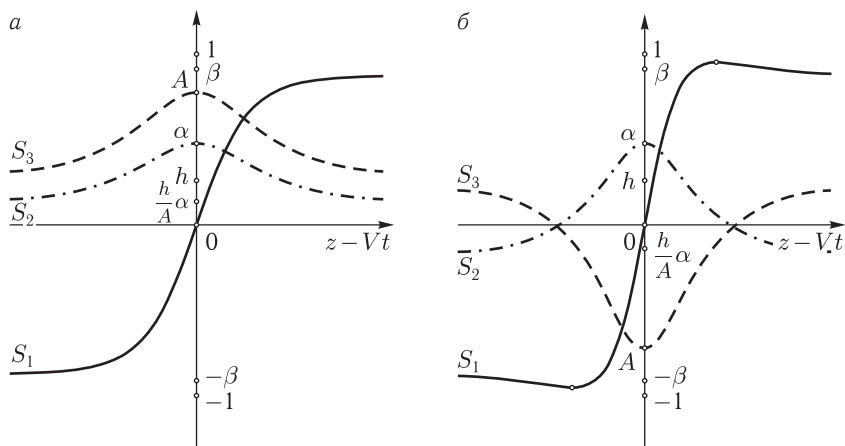


Рис. 4.3. Проекция намагниченности как функции координат для волны поворота (4.2.13) в магнитном поле: а) при  $AH > 0$ , б) при  $AH < 0$ ;  $\alpha = \sqrt{1 - A^2}$ ,  $\beta = \sqrt{1 - h^2/A^2}$ ,  $h = H/\rho^2$  ( $H > 0$ )

где  $p$  — импульс. Когда  $|H| \ll \rho^2$ , закон дисперсии (4.2.15) является линейным по импульсу. Сравнение (4.2.15) с законом дисперсии нелинейных возбуждений (4.2.13) показывает, что энергия  $E$  солитона (4.2.8) меньше энергии магнона с тем же импульсом. В частности, при  $H = 0$  имеем

$$E = 2\rho \left| \sin \frac{p}{2} \right| < \varepsilon \cong \rho|p|. \quad (4.2.16)$$

Однако по мере увеличения поля ( $|H| \rightarrow \rho^2$ ,  $|H| < \rho^2$ ) магноны с линейным законом дисперсии непрерывно переходят в магноны с квадратичным законом дисперсии так, что выше некоторого поля  $|H|$  солитон (4.2.13) становится нестабильным.

Как известно [19, 20], если постоянное магнитное поле  $|H| \geq \rho^2$ , направленное вдоль оси анизотропии  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ , имеет заданную область неоднородности, то в этом поле при наложении однородного переменного магнитного поля, перпендикулярного вектору  $\mathbf{n}$ , происходит весьма эффективное возбуждение бегущих спиновых волн. Мы полагаем, что этим способом можно возбудить не только малоамплитудную спиновую волну, но и (при  $|H| < \rho^2$ ) волну прецессии (4.2.2) большой амплитуды. При условии малости поля накачки величина угла  $\tilde{\theta}$  определяется соотношением  $\sin \tilde{\theta} \cong H/\rho^2$ .

Решения уравнений легкоплоскостного ферромагнетика, описывающие в постоянном магнитном поле взаимодействие бегущей волны прецессии

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= (\cos \tilde{\theta} \cos \tilde{\varphi}, \cos \tilde{\theta} \sin \tilde{\varphi}, \sin \tilde{\theta}), \\ \sin \tilde{\theta} &= \frac{H}{\rho^2}, \quad \tilde{\varphi} = \tilde{p}z - \tilde{p}^2 t \sin \tilde{\theta}, \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

с волнами поворота (4.2.13), (4.2.14), получаются из формул (3.1.10), (4.2.1), (4.2.10), где следует учесть, что  $\tilde{p} \neq 0$ ,  $\sin \tilde{\theta} = H/\rho^2$ .

Отметим, что существование солитонов (4.2.8), (4.2.13) в поле волны намагниченности (4.2.2) или (4.2.17) говорит в пользу устойчивости этих возбудений.

Мы полагаем, что измерение сдвига фазы, приобретаемого волной прецессии после взаимодействия с солитонами, можно использовать для обнаружения и изучения солитонов в ферромагнетике с анизотропией типа «легкая плоскость».

### 4.3. Бризеры на фоне волны прецессии

*Новые системы плодят новые проблемы.*

*Основная теорема Мерфи*

Рассмотрим магнитные возбуждения легкоплоскостного ферромагнетика, которые могут быть получены при использовании матричной функции (4.1.9) с двумя комплексными полюсами  $\lambda_1$  и  $-\lambda_1^*$  ( $\lambda_1 \neq -\lambda_1^*$ ).

В отсутствии внешнего магнитного поля мы получаем односолитонное решение модели (3.1.19) следующего вида:

$$\begin{aligned} S_3 &= \sin \theta_0 (1 - 2|\beta|^2) - \cos \theta_0 (\alpha\beta + \alpha^*\beta^*), \\ S_1 - iS_2 &= \exp[i(-\varphi_0 + \Phi(z, t))] \times \\ &\quad \times [2\alpha^*\beta \sin \theta_0 - \cos \theta_0 (\beta^2 - \alpha^{*2})], \\ \Phi(z, t) &= 2 \operatorname{arctg} \left[ \frac{(\lambda_1 - \lambda_1^*) (|m_1|^2 - |m_2|^2)}{i(\lambda_1 + \lambda_1^*) (|m_1|^2 + |m_2|^2)} \right], \\ \alpha &= \frac{|m_1|^2 \lambda_1^* (1 - \lambda_1^2) + |m_2|^2 \lambda_1 (1 - \lambda_1^{*2})}{|1 - \lambda_1^2| (|m_1|^2 \lambda_1^* + |m_2|^2 \lambda_1)}, \\ \beta &= - \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_1^{*2}) m_1 m_2 \exp(2iy)}{|1 - \lambda_1^2| (|m_1|^2 \lambda_1 + |m_2|^2 \lambda_1^*)}. \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

Здесь вектор  $\mathbf{m} = (m_1, m_2)$  определяется соотношениями (4.1.12).

Пусть  $\operatorname{Re}(i\kappa) \neq 0$  (для определенности  $\operatorname{Re}(i\kappa) < 0$ ), тогда при  $z \rightarrow \pm\infty$  решение (4.3.1) вне области с характерным размером порядка  $|2\operatorname{Re}(i\kappa)|^{-1}$  приближается к асимптотическим значениям:

$$\begin{aligned} S_3 &\rightarrow \sin \theta_0, \quad S_1 - iS_2 \rightarrow \exp \left[ i \left( -\varphi_0 \pm \frac{\Delta\varphi}{2} \right) \right] \cos \theta_0, \\ \frac{\Delta\varphi}{2} &= 2 \operatorname{arctg} \left[ \frac{(\lambda_1 - \lambda_1^*) (|a + \kappa|^2 - |b|^2)}{i(\lambda_1 + \lambda_1^*) (|a + \kappa|^2 + |b|^2)} \right] + \\ &\quad + \frac{1}{i} \ln \frac{(\kappa + a) b^* (|\kappa + a|^2 \lambda_1^* + |b|^2 \lambda_1)}{(\kappa^* + a^*) b (|\kappa + a|^2 \lambda_1 + |b|^2 \lambda_1^*)}. \end{aligned} \quad (4.3.2)$$



В отличие от ранее рассмотренной задачи, здесь волновое число  $p$  и амплитуда  $\sin \theta_0$  волны накачки (4.3.2) совпадают с таковыми для «затраченного» решения (4.1.1). Решение (4.3.1) описывает взаимодействие волны накачки с пульсирующим пространственно локализованным возмущением — бризером. Как и в рассматриваемом ранее примере, существует определенная аналогия между прохождением волны (4.3.2) через бризер и прохождением луча света через прозрачную пластинку с некоторым показателем преломления. Волна намагнитченности (4.3.2) после прохождения через бризер приобретает фазовый множитель, который определяет поворот компонент  $S_1$ ,  $S_2$  в плоскости  $(x_1, x_2)$  на угол  $\Delta\varphi$ .

Для выявления структуры бризера (4.3.1) проанализируем его в отсуствии волны прецессии (при  $\sin \theta_0 = p = 0$ ). Тогда

$$\begin{aligned} S_3 &= 2 \sin 2\delta (\operatorname{ch} 2\varepsilon - \cos 2\delta)^{-1} \tau [\sin s \operatorname{ch} y \cos \delta \operatorname{sh} \varepsilon + \\ &\quad + \operatorname{sh} y \cos s \sin \delta \operatorname{ch} \varepsilon], \\ S_2 &= \tau (\operatorname{ch} 2\varepsilon - \cos 2\delta)^{-1} [\sin^2 2\delta \sin s \operatorname{sh} y + \\ &\quad + \operatorname{ch} y \cos s \sin 2\delta \operatorname{sh} 2\varepsilon], \\ S_1 &= \tau \left( \sin^2 \delta \cos^2 s - \cos^2 \delta \operatorname{ch}^2 y + \frac{2 \cos^2 \delta \sin^2 \delta}{\operatorname{sh}^2 \varepsilon + \sin^2 \delta} \right), \\ y &= \frac{2\rho \operatorname{ch} \varepsilon \sin \delta}{\operatorname{ch} 2\varepsilon - \cos 2\delta} (z - Vt) + y_0, \quad V = \frac{2\rho \operatorname{th} \varepsilon (\operatorname{ch}^2 \varepsilon + \cos^2 \delta)}{\operatorname{ch} 2\varepsilon - \cos 2\delta}, \\ s &= \frac{2\rho \cos \delta \operatorname{sh} \varepsilon}{\operatorname{ch} 2\varepsilon - \cos 2\delta} \left( z - \frac{2\rho \operatorname{cth} \varepsilon (\operatorname{sh}^2 \varepsilon - \sin^2 \delta) t}{\operatorname{ch} 2\varepsilon - \cos 2\delta} \right) + s_0, \\ \tau^{-1} &= \operatorname{ch}^2 y \cos^2 \delta + \cos^2 s \sin^2 \delta. \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Здесь  $\lambda_1 = \exp(\varepsilon + i\delta)$  ( $\lambda_1 \neq -\lambda_1^*$ ),  $y_0$ ,  $s_0$ ,  $\varepsilon$ ,  $\delta$  — вещественные параметры. Величина  $V$  имеет смысл скорости движения бризера как целого.

В центре солитона (при  $y = 0$ ) проекция  $S_1$  изменяется в пределах

$$\frac{\sin^2 \delta - \operatorname{sh}^2 \varepsilon}{\sin^2 \delta + \operatorname{sh}^2 \varepsilon} \leq S_1|_{y=0} \leq \frac{\operatorname{ch}^2 \varepsilon \sin^2 \delta - \operatorname{sh}^2 \varepsilon \cos^2 \delta}{\sin^2 \delta + \operatorname{sh}^2 \varepsilon}.$$

В случае  $\varepsilon = 0$  намагнитченность в центре солитона не зависит от времени и равна своему равновесному значению:  $\mathbf{S} = (1, 0, 0)$  (см. рис. 4.4). При этом скорость бризера равна нулю и решение (4.3.3) приобретает простой вид:

$$\begin{aligned} S_3 &= 2\tau \cos \delta \operatorname{sh} y \cos s, \quad S_2 = 2\tau \cos^2 \delta \operatorname{sh} y \sin s, \\ S_1 &= \tau [-\cos^2 \delta (\operatorname{sh}^2 y - 1) + \sin^2 \delta \cos^2 s], \\ \tau^{-1} &= \cos^2 \delta \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 \delta \cos^2 s, \\ y &= \frac{\rho z}{\sin \delta} + y_0, \quad s = \frac{\rho^2 t \cos \delta}{\sin^2 \delta} + s_0. \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Проекция  $S_1$  обращается в нуль в точках с координатами

$$z = \pm z_0(t) - y_0 \rho^{-1} \sin \delta, \quad (4.3.5)$$

где

$$z_0(t) = \rho^{-1} \sin \delta \operatorname{Arsh} [1 + \operatorname{tg}^2 \delta \cos^2 s]^{1/2}. \quad (4.3.6)$$

Расстояние  $d = 2|z_0(t)|$  между точками (4.3.5) примем за характерный размер бризера. Согласно (4.3.6) размер бризера является периодической функцией времени и изменяется в пределах

$$2\rho^{-1}|\sin \delta| \operatorname{Arsh} 1 \leq d \leq 2\rho^{-1}|\sin \delta| \operatorname{Arsh} (|\cos \delta|^{-1}).$$

Проекции  $S_3$ ,  $S_2$  описываются нечетными функциями параметра  $y$ , которые достигают своих экстремальных значений в точках с координатами (4.3.5). Отсюда следует, что если в данный момент времени  $t$  функция  $S_\alpha(z, t)$  ( $\alpha = 2, 3$ ) принимает максимальное значение в точке с координатой  $z = z_0(t) - y_0 \rho^{-1} \sin \delta$ , то одновременно в точке с координатой  $z = -z_0(t) - y_0 \rho^{-1} \sin \delta$  ее значение минимально.

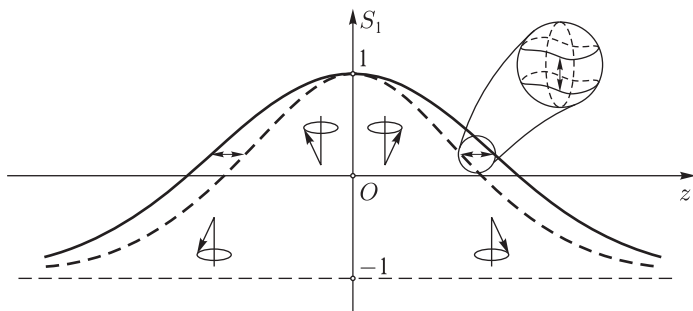


Рис. 4.4. Характер колебаний намагниченности в бризере (4.3.4)

С течением времени периодически изменяется размер бризера, и одновременно вектор намагниченности в солитоне совершает эллиптическую прецессию вокруг оси  $Ox_1$ . Фазы прецессии в областях  $y > 0$  и  $y < 0$  отличаются на  $\pi$  (рис. 4.4).

Пульсирующий солитон (4.3.4) является простейшим представителем целого класса мультисолитонных решений уравнений ферромагнетика с анизотропией типа «легкая плоскость». Его энергия

$$E = \frac{4\rho}{\sin \delta} \quad (4.3.7)$$

больше суммы энергии двух волн поворота (ср. формулы (4.2.16) и (4.3.7)). Поэтому при определенных условиях возможен распад бризера на две волны поворота. Проанализируем такую возможность.

При  $\cos \delta \ll 1$  частота  $\omega = \rho^2 \cos \delta / \sin^2 \delta$ , с которой колеблется намагниченность в бризере, близка к нулю. В момент времени  $t$ , когда  $\cos s = 1$ , выражение (4.3.4) представляет суперпозицию двух волн поворота, отличающихся знаком проекции  $S_3$ . Расстояние между волнами порядка  $2\rho^{-1} \sin \delta \ln(2 \operatorname{tg} \delta) \gg 1$ . В пределе  $\delta \rightarrow \pi/2$  при  $s_0 = \pi/2$  решение (4.3.4) принимает вид

$$\begin{aligned} S_3 &\approx -\frac{2\rho^2 t \operatorname{sh} y}{\operatorname{ch}^2 y + (\rho^2 t)^2}, & S_2 &\approx \frac{2 \operatorname{sh} y}{\operatorname{ch}^2 y + (\rho^2 t)^2}, \\ S_1 &= \frac{1 + (\rho^2 t)^2 - \operatorname{sh}^2 y}{\operatorname{ch}^2 y + (\rho^2 t)^2}, \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

где  $y = \rho z + y_0$ . При  $t = 0$  (4.3.8) представляет локализованное возмущение, которое в рамках рассматриваемых приближений совпадает с бризером (4.3.4). При больших  $t$  ( $t \rightarrow +\infty$ ) решение (4.3.8) описывает суперпозицию двух волн поворота, разнесенных на расстояние порядка  $2\rho^{-1} \ln(2\rho^2 t)$ . Таким образом, при малой величине частоты  $\omega$  (при  $\delta \approx \pi/2$ ) пульсирующий солитон нестабилен. Выражение (4.3.8) (при  $t > 0$ ) описывает процесс его распада на две волны поворота.

При  $\varepsilon \neq 0$  поведение намагниченности в бризере существенно отличается от описанного выше. В интервале  $0 < \operatorname{sh}^4 \varepsilon \leq \sin^2 \delta$  проекция  $S_1$  имеет вид, приведенный на рис. 4.5а. «Верхушка» солитона кругообразно движется со временем по кривой 1–2–3–4. Значение  $|\varepsilon| = \operatorname{Arcsh}(\sqrt{|\sin \delta|})$  является критическим. При  $\operatorname{sh}^4 \varepsilon > \sin^2 \delta$  проекция  $S_1$  приобретает второй максимум (см. рис. 4.5б). Во всех случаях при  $z \rightarrow \pm\infty$  намагниченность стремится к равновесному значению  $\mathbf{S} = (-1, 0, 0)$ .

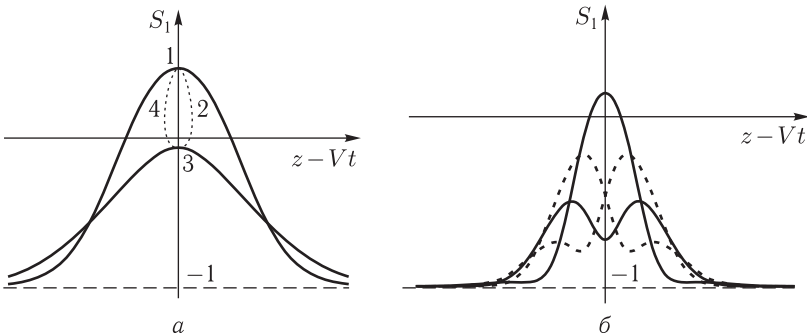


Рис. 4.5. Проекция  $S_1$  намагниченности бризера (4.3.3) при  $0 < |\varepsilon| \leq \operatorname{Arcsh}(\sqrt{|\sin \delta|})$  (а) и при  $|\varepsilon| > \operatorname{Arcsh}(\sqrt{|\sin \delta|})$  (б). Экстремум движется по кривой 1–2–3–4 по часовой стрелке при  $\operatorname{th} \varepsilon / \operatorname{tg} \delta < 0$  и против часовой стрелки при  $\operatorname{th} \varepsilon / \operatorname{tg} \delta > 0$ . В случае (а) абсциссы точек 2 и 4:  $(z - Vt)_{2,4} \approx \pm(\operatorname{th}^2 \varepsilon (\sin^2 \delta + \operatorname{sh}^2 \varepsilon))(\rho \cos \delta (\operatorname{ch}^2 \varepsilon + \cos^2 \delta))^{-1}$

При наличии магнитного поля бризерные решения уравнений легкоплоскостного ферромагнетика легко получить из (4.3.1) с помощью преобразования (3.1.10). В постоянном магнитном поле в отсутствии бегущей волны намагниченности ( $p = 0$ ) следует учесть, что равновесное значение намагниченности при  $z \rightarrow \pm\infty$  определяется соотношениями (4.2.11) (в данном случае  $\theta = \theta_0$ ).

С ростом поля происходит поворот оси прецессии вектора  $\mathbf{S}$  и уменьшение амплитуды нутаций намагниченности в бризере. В области малых  $H$  ( $|H| < \rho^2$ ) аналитическое выражение для бризера, центр которого совершает периодические колебания, но в среднем не смещается, получено в работе [15], непосредственным интегрированием уравнений Ландау–Лифшица. Это решение описывается формулами (3.1.10), (4.2.11), (4.3.1) при  $p = 0$  и частном выборе параметра  $\lambda = \lambda_1 = \exp i\delta$ .

В достаточно сильном магнитном поле  $|H| > \rho^2$  при  $p = 0$  решение (3.1.10), (4.2.11), (4.3.1) переходит в прецессионный солитон, найденный в работах [12, 13]:

$$\begin{aligned} \arctg \frac{S_2}{S_1} &= \frac{\sin 2\varepsilon}{\sin 2\delta} y - t \left( H - \frac{2\rho^2 \operatorname{ch} 2\varepsilon}{\operatorname{ch} 2\varepsilon - \cos 2\delta} \right) + \\ &\quad + \arctg (\operatorname{th} y \operatorname{tg} \delta \operatorname{ctg} \varepsilon) + \arg \left( \frac{c_1}{c_2} \right), \\ S_3 &= 1 - \frac{\sin^2 2\delta}{(\operatorname{ch} 2\varepsilon - \cos 2\delta)(\operatorname{sh}^2 y + \cos^2 \delta)}, \\ y &= \frac{\rho \sin 2\delta}{\operatorname{ch} 2\varepsilon - \cos 2\delta} (z - Vt) + \ln \left| \frac{c_1}{c_2} \right|, \quad V = \frac{2\rho \operatorname{sh} 2\varepsilon}{\operatorname{ch} 2\varepsilon - \cos 2\delta}. \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

В формулах (4.3.9) вещественные параметры  $\varepsilon$ ,  $\delta$  связаны с полюсом матричной функции (4.1.9):  $\lambda_1 = \exp(\varepsilon + i\delta)$ . Согласно [13, 15] прецессионный солитон (4.3.9) можно интерпретировать как связанное состояние магнонов с квадратичным законом дисперсии [17]:

$$\varepsilon = p^2 - \rho^2 + H, \quad H \geq \rho^2.$$

В пределе  $\delta \rightarrow \pi/2$ ,  $\varepsilon = 0$ ,  $H = \rho^2$  прецессионный солитон (4.3.9) вырождается в алгебраический (4.2.14), скорость движения которого равна нулю.

При  $H > \rho^2$ ,  $p \neq 0$ , решение (3.1.10), (4.2.11), (4.3.1) описывает рассеяние спиновой волны малой амплитуды,

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= (\cos \theta_0 \cos \varphi_0, \cos \theta_0 \sin \varphi_0, \sin \theta_0), \\ \varphi_0 &\approx pz - t(p^2 - \rho^2 + H), \quad \sin \theta_0 \cong 1, \end{aligned}$$

на прецессионном солитоне (4.3.9).

Отметим, что существование нескольких типов магнитных солитонов в области слабых магнитных полей ( $|H| < \rho^2$ ) связано с вырождением основного состояния легкоплоскостного ферромагнетика при  $|H| < \rho^2$ . Сильное магнитное поле ( $|H| > \rho^2$ ) снимает вырождение основного состояния и приводит к более простым солитоноподобным возбуждениям.

#### 4.4. Приложение модели легкоплоскостного ферромагнетика для анализа солитонов в спиральных структурах

*Насколько я знаю, все физические результаты a priori имеют свой источник в симметрии.*

Г. Вейль

Особую категорию составляют магнитные кристаллы, основное состояние которых представляет геликоидальную магнитную структуру. Возможны различные механизмы возникновения таких структур. В магнитных кристаллах без центра инверсии образование геликоидальных структур может быть связано с неоднородными релятивистскими взаимодействиями, которые теоретически описываются инвариантами Лифшица в разложении свободной энергии магнетика [21–23]. Следуя [24, 25], покажем, что интегрируемая модель ферромагнетика с анизотропией типа «легкая плоскость» изоморфна одной из моделей магнетиков с геликоидальной структурой.

Рассмотрим квазиодномерный ферромагнитный кристалл без центра инверсии, плотность энергии которого имеет вид

$$w = \frac{\alpha}{2} (\partial_{z'} \mathbf{M})^2 + \frac{\tilde{\beta}}{2} M_3^2 - \kappa (M_1 \partial_{z'} M_2 - M_2 \partial_{z'} M_1). \quad (4.4.1)$$

Здесь  $\mathbf{M}(z', t')$  — намагниченность на единицу длины вдоль оси  $Ox_3$ ;  $z'$ ,  $t'$  — пространственно-временные координаты,  $\mathbf{M}^2 = M_0^2 = \text{const}$ ,  $\alpha > 0$  — обменная постоянная,  $\tilde{\beta} = \rho^2 > 0$  — постоянная анизотропии типа «легкая плоскость»,  $\kappa$  — постоянная при инварианте Лифшица,  $|\kappa| \ll \alpha/a$ , где  $a$  — постоянная решетки.

Условия  $\alpha > 0$ ,  $\tilde{\beta} > 0$  теперь не обеспечивают устойчивости однородного основного состояния. Устойчивому основному состоянию магнитного кристалла соответствует распределение намагниченности типа геликоидальной магнитной структуры:

$$\mathbf{M} = M_0 (\cos pz', \sin pz', 0), \quad (4.4.2)$$

где  $p = \kappa/\alpha$ . Период геликоидальной структуры много больше кристаллографических периодов:  $2\pi/|p| = 2\pi\alpha/|\kappa| \gg a$  и обычно несоизмерим с ними.

Как и ранее, перейдем к безразмерным переменным:

$$\mathbf{M} = -M_0 \mathbf{S}, \quad z = \alpha^{-1/2} z', \quad t = \gamma M_0 t', \quad g = \kappa \alpha^{-1/2}.$$

В них уравнения Ландау–Лифшица геликоидального ферромагнетика приобретают вид

$$\partial_t \mathbf{S} = [\mathbf{S} \times \partial_z^2 \mathbf{S}] - \rho^2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}) [\mathbf{S} \times \mathbf{n}] + 2g \partial_z \mathbf{S} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}), \quad \mathbf{S}^2 = 1. \quad (4.4.3)$$

Для дальнейшего анализа полезно переписать уравнения (4.4.3) в параметризации  $\mathbf{S}$  углами  $\theta, \varphi$ :

$$\mathbf{S} = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta), \quad (4.4.4)$$

тогда они примут вид

$$\begin{aligned} \cos \theta \partial_t \varphi &= -\partial_z^2 \theta - \sin \theta \cos \theta (\partial_z \varphi - g)^2 + \\ &\quad + (\rho^2 + g^2) \sin \theta \cos \theta, \\ \partial_t \sin \theta &= \partial_z [\cos^2 \theta (\partial_z \varphi - g)]. \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

Замечательно, что после преобразования

$$\tilde{\varphi} = \varphi - gz, \quad \tilde{\rho}^2 = \rho^2 + g^2$$

уравнения (4.4.5) переходят в уравнения Ландау–Лифшица для ферромагнетика с анизотропией типа «легкая плоскость». При этом постоянной анизотропии легкоплоскостного ферромагнетика будет величина  $\tilde{\rho}^2 = \rho^2 + g^2$ , а распределение намагниченности определится углами  $\theta, \tilde{\varphi}$ :

$$\tilde{\mathbf{S}} = (\cos \theta \cos \tilde{\varphi}, \cos \theta \sin \tilde{\varphi}, \sin \theta). \quad (4.4.6)$$

Таким образом, солитонные решения модели ферромагнетика (4.4.1) с геликоидальной структурой (4.4.2) можно найти, выбирая подходящие решения модели ферромагнетика с анизотропией типа «легкая плоскость». А именно: нужно использовать решения (4.4.6) легкоплоскостного ферромагнетика с постоянной анизотропии  $\tilde{\rho}^2 = \rho^2 + g^2$  и асимптотиками

$$\tilde{\mathbf{S}} \rightarrow (\cos \tilde{\varphi}_{\pm}, \sin \tilde{\varphi}_{\pm}, 0), \quad \tilde{\varphi}_{\pm} = \text{const}$$

при  $z \rightarrow \pm\infty$ . Тогда после замены  $\tilde{\varphi} \rightarrow \varphi = \tilde{\varphi} + gz$  решения (4.4.6) перейдут в точные решения (4.4.4) модели (4.4.3), описывающие нелинейные возбуждения ферромагнетика с геликоидальной структурой.

Так, решение типа волны поворота (4.2.8) преобразуется в решение, которое описывает движущийся со скоростью  $V = \tilde{\rho} \cos r$  ( $|V| < \tilde{\rho}$ ) солитон в спиральной структуре:

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{\sin r}{\text{ch } \eta}, \quad S_1 + i S_2 = \left( \text{th } \eta + \frac{i \cos r}{\text{ch } \eta} \right) \exp(igz), \\ \eta &= \tilde{\rho} \sin r (z - t \tilde{\rho} \cos r). \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Здесь  $r$  — вещественный параметр. Солитон (4.4.7) связан с пространственно локализованным изменением фазы магнитной спирали и выходом магнитных моментов из базисной плоскости ( $x_1, x_2$ ) (см. рис. 4.6). При одном и том же импульсе энергия солитона (4.4.7) лежит ниже энергии линейной спиновой волны [22], распространяющейся в геликоидальной структуре вдоль оси анизотропии.

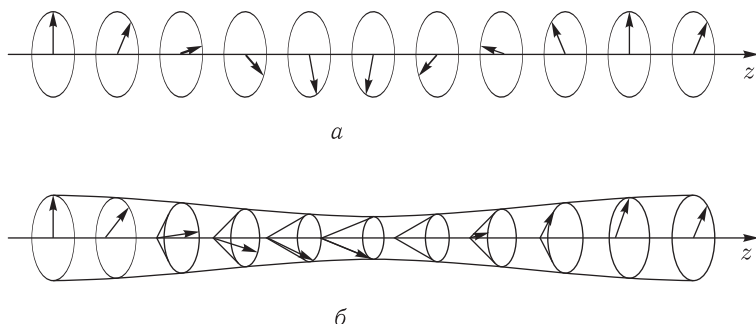


Рис. 4.6. Солитон в спиральной структуре: а) основное состояние; б) уединенная волна поворота на фоне геликоидальной структуры

В присутствии внешнего магнитного поля, направленного вдоль оси анизотропии, простая спиральная структура переходит в коническую. Соответствующие решения легко найти, воспользовавшись формулами (3.1.10), (4.2.11). Согласно полученным ранее результатам, на фоне конической спиральной структуры возможно формирование двух типов волн поворота, энергия которых снова будет меньше энергии линейной спин-волновой моды с тем же импульсом.

## Глава 5

# ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ФЕРРОМАГНЕТИКА С ДВУХОСНОЙ МАГНИТНОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

### 5.1. Прямая и обратная задачи для уравнений Ландау–Лифшица анизотропного ферромагнетика

*Метод необходим для отыскания истины.*

*Р. Декарт*

В данном разделе изложена схема интегрирования уравнения (3.1.14) методом обратной задачи рассеяния для двух типов граничных условий:

$$\mathbf{S} \rightarrow (0, 0, 1) \quad \text{при} \quad x \rightarrow +\infty, \quad \mathbf{S} \rightarrow (0, 0, \varepsilon) \quad \text{при} \quad x \rightarrow -\infty. \quad (5.1.1)$$

Поскольку случай  $\varepsilon = 1$  не содержит решений типа доменных границ, ниже он называется нетопологическим (НТ), топологическому (Т) случаю соответствует  $\varepsilon = -1$ . Численные расчеты, частные решения, существование  $U$ – $V$ -пары, доказательство полной интегрируемости (см. ссылки в разд. 2.1) поставили вопрос о решении задачи Коши для этого уравнения. Основная трудность, несмотря на наличие  $U$ – $V$ -пары, связана с тем, что представление (3.1.15), (3.1.21) дает новый тип спектральных задач (эллиптическая  $U$ – $V$ -пара), неизвестных ранее. Процедура получения точных решений для такого рода задач была впервые предложена в наших работах [1, 2] для  $SU(2)$  асимметричной киральной модели. Для модели двухосного ферромагнетика (3.1.14) процедура «одевания» была независимо найдена в работах [4–6] для НТ-случая:  $\mathbf{S} \rightarrow (0, 0, 1)$  при  $|x| \rightarrow \infty$  и в [3] для произвольного «затравочного» решения.

Отметим, что в работах [4–7] предложена конкретная процедура решения регулярной задачи Римана, основанная на системе сингулярных уравнений с ядром Коши на торе и, следовательно, дано решение обратной задачи рассеяния для НТ-случая.

Несколько позже была предложена другая процедура «одевания» [8], «стартующая» с работ [9, 10]. Не вдаваясь в сравнение двух процедур «одевания», заметим, что дальнейшее развитие и модификация второго метода (см. обзор [11, 12]) привела к конечнозонному интегрированию уравнения (3.1.14) при  $J_1 = J_2 \neq J_3$  [13] и при  $J_1 \neq J_2 \neq J_3$  [14, 15] с привлечением результатов работ [16, 17]. Однако задача



Коши с граничными условиями (5.1.1) не только не была решена для Т случая, но и отсутствовало решение прямой задачи рассеяния для НТ случая.

В настоящем разделе изложены результаты работ [18, 19] и получено решение прямой задачи рассеяния при  $\varepsilon = \pm 1$ . Используя аналог преобразования Фурье на торе, удается построить замкнутую схему интегрирования, основанную на уравнениях Гельфанда–Левитана–Марченко. Это позволяет решить задачу Коши для уравнения (3.1.14) методом обратной задачи рассеяния.

### 5.1.1. Преобразования прямой задачи рассеяния

Рассмотрим вначале прямую задачу рассеяния. Удобно объединить случаи НТ и Т и определить две фундаментальные матрицы решений системы (2.1.2), (3.1.15), (3.1.21) (матрицы Йоста), которые имеют следующее асимптотическое поведение:

$$\begin{aligned}\Phi &\rightarrow \exp[-i w_3(\lambda) x \varepsilon \sigma_3] \quad \text{при } x \rightarrow -\infty; \\ \Psi &\rightarrow \exp[-i w_3(\lambda) x \sigma_3] \quad \text{при } x \rightarrow +\infty.\end{aligned}$$

Тогда из редукций для  $\Psi(\lambda)$ ,  $\Phi(\lambda)$ :

$$\begin{aligned}\Phi^*(\lambda) &= \sigma_2 \Phi(\lambda^*) \sigma_2, \quad \Phi(\lambda + 2K) = \sigma_3 \Phi(\lambda) \sigma_3, \\ \Phi(\lambda + 2iK') &= \sigma_3 \Phi^*(\lambda^*) \sigma_3; \\ \Psi^*(\lambda) &= \sigma_2 \Psi(\lambda^*) \sigma_2, \quad \Psi(\lambda + 2K) = \sigma_3 \Psi(\lambda) \sigma_3, \\ \Psi(\lambda + 2iK') &= \sigma_3 \Psi^*(\lambda^*) \sigma_3\end{aligned}\tag{5.1.2}$$

следует, что матрица перехода  $T(\lambda)$ , введенная обычным образом,

$$\Phi(\lambda, x) = \Psi(\lambda, x) T(\lambda) \quad (\text{Im} \lambda = 0, 2K'),\tag{5.1.3}$$

имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}T(\lambda) &= \begin{pmatrix} a(\lambda) & -b^*(\lambda^*) \\ b(\lambda) & a^*(\lambda^*) \end{pmatrix}, \quad \det T(\lambda) = 1; \\ a(\lambda + 2K) &= a(\lambda), \quad b(\lambda + 2K) = -b(\lambda), \\ a(\lambda + 2iK') &= a^*(\lambda^*), \quad b(\lambda + 2iK') = -b^*(\lambda^*).\end{aligned}\tag{5.1.4}$$

Для решения прямой задачи рассеяния необходимо найти зависимость от спектрального параметра  $\lambda$  в ядрах треугольного представления матриц Йоста. Она угадывается решением первого из уравнений (2.1.2) по теории возмущений (вблизи решения  $\mathbf{S} = (0, 0, 1)$  до третьего порядка включительно). Соответствующие рассуждения и выкладки аналогичны использовавшимся в третьей главе и не приводятся здесь.

Перейдем сразу к строгим доказательствам. Покажем, что матричные решения  $\Phi$ ,  $\Psi$  спектральной задачи (2.1.2), (3.1.15), (3.1.21) имеют следующие треугольные представления:

$$\begin{aligned} \Phi(x, \lambda) = & k_3(x) \exp[-i \varepsilon w_3(\lambda) x \sigma_3] + \\ & + \int_{-\infty}^x dy \left( k_5(x, y) + \sum_{\alpha=1}^2 k_{\alpha}(x, y) w_{\alpha} \sigma_{\alpha} + \right. \\ & \left. + k_4(x, y) w_1 w_2 \sigma_3 \right) \exp(-i \varepsilon w_3 y \sigma_3); \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

$$\begin{aligned} \Psi(x, \lambda) = & l_3(x) \exp[-i w_3(\lambda) x \sigma_3] + \\ & + \int_x^{+\infty} dy \left( l_5(x, y) + \sum_{\alpha=1}^2 l_{\alpha}(x, y) w_{\alpha} \sigma_{\alpha} + \right. \\ & \left. + l_4(x, y) w_1 w_2 \sigma_3 \right) \exp(-i w_3 y \sigma_3), \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

где

$$\begin{aligned} k_3(x) = & \sqrt{\frac{1 + \varepsilon S_3(x)}{2}} \times \\ & \times \cos \left( \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x dy [1 - \varepsilon S_3(y)] \partial_y \arctg \left[ \frac{S_1(y)}{S_2(y)} \right] \right), \\ \frac{k_1(x, x) + i k_2(x, x)}{k_3(x) + k_{4,y}(x, x)} = & -i \frac{S_1(x) + i S_2(x)}{1 + \varepsilon S_3(x)}; \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

$$\begin{aligned} l_3(x) = & \sqrt{\frac{1 + S_3(x)}{2}} \times \\ & \times \cos \left( \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} dy [1 - S_3(y)] \partial_y \arctg \left[ \frac{S_1(y)}{S_2(y)} \right] \right), \\ \frac{l_1(x, x) + i l_2(x, x)}{l_3(x) - l_{4,y}(x, x)} = & i \frac{S_1(x) + i S_2(x)}{1 + S_3(x)}. \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

Здесь через  $k_{4,x}(x, y)$ ,  $k_{4,y}(x, y)$  и т. д. обозначены соответственно  $\partial_x k_4(x, y)$ ,  $\partial_y k_4(x, y)$  и т. д.

Вследствие редукций (5.1.2), ядра  $k_5(x, y)$ ,  $l_5(x, y)$  — вещественные;  $k_{\alpha}(x, y)$ ,  $l_{\alpha}(x, y)$  ( $\alpha = 1, 2, 4$ ) — чисто мнимые. Несингулярность функций (5.1.5), (5.1.6) в полюсах коэффициентов  $w_j(\lambda)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) требует следующих нулевых условий на диагонали  $x = y$ :

$$k_4(x, x) = l_4(x, x) = 0.$$

Отметим важное обстоятельство. В ядра треугольных представлений (5.1.5), (5.1.6) зависимость от спектрального параметра входит

через функции 1,  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w_1 w_2$ . Наличие таких функций не является случайным: они образуют базис в пространстве всех полиномов от  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w_3$ , где учтены связи (3.1.16) и два элемента эквивалентны, если отличаются множителем  $w_3$ . Подобная конструкция ядер из коэффициентов  $U$ – $V$ -пары уже использовалась в третьей главе и неявно содержится в решениях более простых прямых задач рассеяния, известных ранее. Ясно, что такой выбор зависимости ядер от спектрального параметра всегда приводит к определенным дифференциальным уравнениям для матричных коэффициентов. Действительно, подставляя (5.1.5) в первое уравнение (2.1.2), мы получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} k_{1,x}(x, y) + S_2(x)k_{4,yy}(x, y) - \varepsilon S_3(x)k_{1,y}(x, y) &= \\ &= -i S_1(x)k_5(x, y) + \rho^2(k')^2 S_2(x)k_4(x, y), \\ k_{2,x}(x, y) - S_1(x)k_{4,yy}(x, y) - \varepsilon S_3(x)k_{2,y}(x, y) &= \\ &= -i S_2(x)k_5(x, y) - \rho^2 S_1(x)k_4(x, y), \\ k_{4,x}(x, y) + \varepsilon S_3(x)k_{4,y}(x, y) &= S_1(x)k_2(x, y) - S_2(x)k_1(x, y), \\ k_{5,x}(x, y) + \varepsilon S_3(x)k_{5,y}(x, y) - i \sum_{\alpha=1}^2 S_{\alpha}(x)k_{\alpha,yy}(x, y) &= \\ &= -i S_1(x)\rho^2 k_1(x, y) - i \rho^2(k')^2 S_2(x)k_2(x, y) \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

и условия на диагонали:

$$\begin{aligned} k_{3,x}(x) + k_5(x, x)(1 - \varepsilon S_3(x)) + i \sum_{\alpha=1}^2 S_{\alpha}(x)k_{\alpha,y}(x, y)|_{y=x} &= 0, \\ i \sum_{\alpha=1}^2 k_{\alpha}(x, x)S_{\alpha}(x) &= (1 - \varepsilon S_3(x))k_3(x), \quad k_4(x, x) = 0, \\ k_1(x, x)S_2(x) - S_1(x)k_2(x, x) &= (1 - \varepsilon S_3(x))k_{4,y}(x, y)|_{y=x}. \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

Для исследования однозначной разрешимости этой системы удобно ввести вспомогательные переменные  $q_1$ ,  $q_2$ :

$$q_1 = S_1 k_2 - S_2 k_1, \quad q_2 = S_1 k_1 + S_2 k_2.$$

Тогда переменные  $q_1$  и  $k_5$ , вследствие трех первых уравнений (5.1.9), выражаются через  $q_2$  и  $k_4$  и их производные:

$$\begin{aligned} k_5(x, y) &= \frac{i}{S_{\perp}^2} \left( q_{2,x}(x, y) - \varepsilon S_3(x)q_{2,y}(x, y) + \right. \\ &\quad \left. + \rho^2 k^2 S_1(x)S_2(x)k_4(x, y) + q_1(x, y) \partial_x \arctg \left[ \frac{S_1(x)}{S_2(x)} \right] - \right. \\ &\quad \left. - q_2(x, y) \frac{1}{2} \partial_x \ln S_{\perp}^2(x) \right), \quad S_{\perp}^2 = S_1^2 + S_2^2; \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

$$q_1(x, y) = k_{4,x}(x, y) + \varepsilon S_3(x)k_{4,y}(x, y). \quad (5.1.12)$$

Подстановка (5.1.11), (5.1.12) в систему (5.1.9), (5.1.10) приводит последнюю к системе двух линейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{aligned} q_{2,xx} - q_{2,yy} - \varepsilon S_{3,x} q_{2,y} + (\partial_x + \varepsilon S_3 \partial_y) \left[ \rho^2 k^2 S_1 S_2 k_4 + \right. \\ \left. + q_1 \partial_x \arctg \left( \frac{S_1}{S_2} \right) - \frac{1}{2} q_2 \partial_x \ln S_{\perp}^2 \right] - i S_{\perp}^4 k_5 \partial_x S_{\perp}^2 = \\ = \rho^2 [q_1 k^2 S_1 S_2 - q_2 (S_1^2 + (k')^2 S_2^2)], \quad (5.1.13) \\ k_{4,xx} - k_{4,yy} = -\varepsilon S_{3,x} k_{4,y} + \frac{1}{2} q_1 \partial_x \ln S_{\perp}^2 + \\ + q_2 \partial_x \arctg \left( \frac{S_1}{S_2} \right) - (S_1^2 + (k')^2 S_2^2) k_4 \rho^2 \end{aligned}$$

и обыкновенному дифференциальному уравнению

$$2i k_{3,x} + i k_3 \frac{\varepsilon S_{3,x}}{1 + \varepsilon S_3} + \left( \partial_x \arctg \frac{S_1}{S_2} \right) (\partial_x + \varepsilon S_3 \partial_y) k_4(x, y)|_{y=x} = 0 \quad (5.1.14)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} k_4(x, x) = 0, \quad k_4(x, -\infty) = q_2(x, -\infty) = 0, \\ q_2(x, x) = i(S_3 - 1)k_3(x). \end{aligned}$$

Из условия  $\det \Phi(\lambda) = 1$  с учетом представления (5.1.5) можно вывести важное соотношение:

$$\det \Phi(\lambda = 0) = k_3^2(x) - k_{4,y}^2(x, x) - k_1^2(x, x) - k_2^2(x, x) = 1,$$

которое, с учетом уравнений (5.1.10), сводится к простому алгебраическому соотношению между  $k_3(x)$  и  $k_{4,y}(x, x)$ , позволяющему решить уравнение (5.1.14) в явном виде. Мы получаем

$$\begin{aligned} k_3(x) = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon S_3}{2}} \cos \varphi, \quad i k_{4,y}(x, x) = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon S_3}{2}} \sin \varphi, \\ \partial_x \varphi(x) = -\frac{1}{2} (1 - \varepsilon S_3) \partial_x \arctg \frac{S_1}{S_2}. \end{aligned}$$

Для доказательства существования решений уравнений (5.1.13), (5.1.14) введем новые координаты

$$\xi = \frac{x + y}{2}, \quad \eta = \frac{x - y}{2}$$

и переменные

$$v_k = k_{4,\xi}, \quad v_q = q_{2,\xi}, \quad u_k = k_{4,\eta}, \quad u_q = q_{2,\eta}.$$

Тогда решение системы (5.1.13), (5.1.14) эквивалентно задаче Коши–Гурса для гиперболической системы из шести уравнений с переменными

$k_4, v_k, u_k, q_2, u_q, v_q$ . Граничные условия заданы на характеристике  $\eta = 0$  и прямой  $\xi + \eta = -\infty$ . Из теории характеристик [20, 21] следует, что решение существует и единственно.

Аналогичное исследование можно провести и для матрицы  $\Psi$ . В этом случае система уравнений для ядер  $l_\mu(x, y)$  ( $\mu = 1, 2, 4, 5$ ) и  $l_3(x)$ , а также условия на диагонали получаются из соотношений (5.1.9), (5.1.10) с  $\varepsilon = 1$  формальной заменой:

$$k_\mu(x, y) \rightarrow -l_\mu(x, y), \quad k_3(x) \rightarrow l_3(x).$$

Представление (5.1.5)–(5.1.8) и уравнения (5.1.11)–(5.1.14) дают полное решение прямой задачи рассеяния.

Представления (5.1.5), (5.1.6) оказываются полезными для доказательства аналитических свойств решений Йоста. Пусть при  $|x| \rightarrow \infty$  распределение намагниченности достаточно быстро стремится к своим предельным значениям. Тогда аналитическим продолжением по параметру  $\lambda$  и условием, что операторы в представлениях (5.1.5), (5.1.6) являются сжимающими, устанавливаются области аналитичности столбцов матриц Йоста и элементов матрицы перехода.

При  $\varepsilon = 1$  мы получаем, что функции

$$\Psi_{\alpha 1} \exp(i w_3 x), \quad \Phi_{\alpha 2} \exp(-i w_3 x) \quad (\alpha = 1, 2)$$

допускают аналитическое продолжение в область

$$D_- = \{\lambda \mid 0 < \operatorname{Im} \lambda < 2K'\},$$

тогда как функции

$$\Psi_{\alpha 2} \exp(-i w_3 x), \quad \Phi_{\alpha 1} \exp(i w_3 x), \quad a(\lambda)$$

аналитически продолжаются в область

$$D_+ = \{\lambda \mid -2K' < \operatorname{Im} \lambda < 0\}.$$

В силу редукций (5.1.4), нули  $\lambda_n^{(1)}$  функции  $a(\lambda)$  разбиваются на две группы:

$$\begin{aligned} \lambda &= u_j - iK', \quad u_j - iK' + 2K, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\ \lambda &= u_s - iK' \pm i\theta_s, \quad u_s - iK' \pm i\theta_s + 2K, \quad s = 1, 2, \dots, m; \end{aligned}$$

где  $0 < u_j < 2K$ ,  $0 < \theta_s < K'$ .

Из (5.1.3) следует, что при  $\lambda = \lambda_n^{(1)}$  функции  $\Phi_{\alpha 1}$ ,  $\Psi_{\alpha 2}$  пропорциональны:

$$\Phi_{\alpha 1}(\lambda_n^{(1)}) = b_n^{(1)} \Psi_{\alpha 2}(\lambda_n^{(1)}).$$

При  $\varepsilon = 1$  данными рассеяния будет набор:

$$r^{(1)} = \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} \quad (\operatorname{Im} \lambda = 0, 2K'), \quad \{\lambda_n^{(1)}\}, \quad \{b_n^{(1)}\},$$

эволюционная зависимость которого определяется уравнениями

$$\partial_t a = 0, \quad \partial_t b = -4i w_1(\lambda) w_2(\lambda) b, \quad \partial_t b_n^{(1)} = -4i w_1(\lambda_n^{(1)}) w_2(\lambda_n^{(1)}) b_n^{(1)}.$$

В случае  $\varepsilon = -1$  функции  $\Phi_{\alpha 1} \exp(-i w_3 x)$ ,  $\Psi_{\alpha 1} \exp(-i w_3 x)$ ,  $b(\lambda)$  допускают аналитическое продолжение в область  $D_-$ . В области  $D_-$  нули  $\lambda = \lambda_n^{(-1)}$  функции  $b(\lambda)$ , вследствие редукций (5.1.4), разбиваются на две группы:

$$u_j + iK', \quad u_j + iK' + 2K, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad (5.1.15)$$

$$u_s + iK' \pm i\theta_s, \quad u_s + iK' \pm i\theta_s + 2K, \quad s = 1, 2, \dots, m,$$

где  $0 < u_j < 2K$ ,  $0 < \theta_s < K'$ . Функции  $\Phi_{\alpha 2} \exp(i w_3 x)$ ,  $\Psi_{\alpha 2}(-i w_3 x)$  могут быть аналитически продолжены в область  $D_+$ .

Зависимость данных рассеяния

$$r^{(-1)} = \frac{a(\lambda)}{b(\lambda)} \quad (\text{Im} \lambda = 0, 2K'), \quad \{\lambda_n^{(-1)}\}, \quad \{b_n^{(-1)}\}$$

от времени определяется уравнениями:

$$\partial_t b = 0, \quad \partial_t a = -4i w_1(\lambda) w_2(\lambda) a,$$

$$\partial_t b_n^{(-1)} = -4w_1(\lambda_n^{(-1)}) w_2(\lambda_n^{(-1)}) b_n^{(-1)},$$

где  $b_n^{(-1)}$  — коэффициент пропорциональности в соотношении

$$\Phi_{\alpha 1}(\lambda_n^{(-1)}) = b_n^{(-1)} \Psi_{\alpha 1}(\lambda_n^{(-1)}).$$

### 5.1.2. Обратное спектральное преобразование

Перейдем к решению обратной задачи. Для  $U$ - $V$ -пар, рациональным образом зависящих от спектрального параметра  $\lambda$ , обратная задача всегда использует преобразование Фурье, если функции Йоста в асимптотике являются неприводимыми представлениями группы сдвигов по переменной  $x$ . В нашем случае ключом решения задачи является преобразование Фурье, описанное далее.

Пусть  $\Gamma_\varepsilon$  — замкнутый контур следующего вида (см. рис. 5.1):

$$\Gamma_\varepsilon = \{\lambda \mid 0 < \text{Re} \lambda < 4K, \text{Im} \lambda = 0; \quad 0 < -\varepsilon \text{Im} \lambda < 2K', \text{Re} \lambda = 4K;$$

$$4K > \text{Re} \lambda > 0, \text{Im} \lambda = -2\varepsilon K'; \quad 2K' > -\varepsilon \text{Im} \lambda > 0, \text{Re} \lambda = 0\}.$$

Тогда интеграл по контуру  $\Gamma_\varepsilon$  от двоякопериодических функций  $q(\lambda)$  с периодами  $4K$ ,  $4iK'$  редуцируется к интегралу по интервалу  $0 < \lambda < 2K$  следующим образом:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} d\lambda q(\lambda) \exp(i w_3 x) = \int_0^{2K} d\lambda \bar{q}(\lambda) \exp(i w_3 x),$$

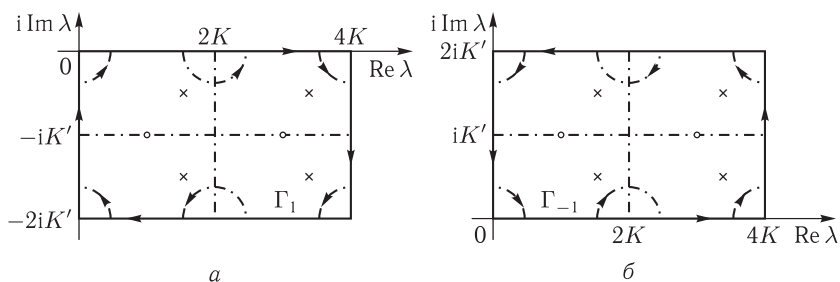


Рис. 5.1. Контуры интегрирования  $\Gamma_1$  ( $\varepsilon = 1$ ) (а) и  $\Gamma_{-1}$  ( $\varepsilon = -1$ ) (б) (сплошная линия) и система контуров  $C_i^{(\varepsilon)}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) (штриховая линия), используемые при выводе уравнений обратной задачи рассеяния. Расположение «доменных» (о) и «бризерных» (х) нулей функций  $a(\lambda)$  ( $\varepsilon = 1$ ) (а) и  $b(\lambda)$  ( $\varepsilon = -1$ ) (б)

где

$$\bar{q}(\lambda) = q(\lambda) + q(\lambda + 2K) - q(-\lambda + 2iK') - q(-\lambda + 2K + 2iK').$$

Заметим, что функции  $w_1, w_2, w_3$  обладают свойствами:

$$\begin{aligned} w_s(\lambda + 2K) &= -w_s(\lambda) \quad (s = 1, 2), & w_3(\lambda + 2K) &= w_3(\lambda), \\ w_1(\lambda + 2iK') &= w_1(\lambda), & w_j(\lambda + 2iK') &= -w_j(\lambda) \quad (j = 2, 3) \end{aligned}$$

и потому

$$\begin{aligned} \overline{w_s} &= \overline{w_s w_3} = \overline{w_s^2 w_j} = 0 \quad (s, j = 1, 2, 3); \\ \overline{w_1 w_2} &= 4 w_1 w_2 = -4 \rho \frac{dw_3}{d\lambda}; \\ \int_{\Gamma_\varepsilon} d\lambda w_1 w_2 \exp[i w_3(\lambda) x] &= 8\pi\rho \delta(x). \end{aligned} \tag{5.1.16}$$

Для вывода уравнений обратной задачи рассеяния рассмотрим одно из соотношений (5.1.3) в виде

$$\Phi_{\alpha 1}(x, \lambda) \exp(i w_3 \varepsilon y) = [\Psi_{\alpha 1}(x, \lambda) a(\lambda) + b(\lambda) \Psi_{\alpha 2}(x, \lambda)] \exp(i w_3 \varepsilon y), \quad y \geq x. \tag{5.1.17}$$

Умножим (5.1.17) на  $\tau(\lambda)/a(\lambda)$  при  $\varepsilon = 1$  или на  $\tau(\lambda)/b(\lambda)$  при  $\varepsilon = -1$ , где  $\tau(\lambda) = w_3, w_1, w_2, w_1 w_2$  и проинтегрируем по контуру  $\Gamma_\varepsilon$ . Подставим в правую часть вместо  $\Psi$  ее представление (5.1.6). Контурное интегрирование в левой части заменим на интеграл по замкнутому

контур  $\tilde{\Gamma}_\varepsilon + \sum_{i=1}^4 C_i^{(\varepsilon)}$  минус интеграл по  $\sum_{i=1}^4 C_i^{(\varepsilon)}$ . Система контуров  $C_i^{(\varepsilon)}$  определяется следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} C_1^{(\varepsilon)} &= \{ \lambda \mid \lambda = r \exp(i\varepsilon\varphi), \pi \leq \varphi \leq 2\pi \}, \\ C_2^{(\varepsilon)} &= \{ \lambda \mid \lambda = 2K + r \exp(i\varepsilon\varphi), \pi \leq \varphi \leq 2\pi \}, \\ C_3^{(\varepsilon)} &= \{ \lambda \mid \lambda = r \exp(i\varepsilon\varphi) + 2K - 2i\varepsilon K', 0 \leq \varphi \leq \pi \}, \\ C_4^{(\varepsilon)} &= \{ \lambda \mid \lambda = -2iK'\varepsilon + r \exp(i\varepsilon\varphi), 0 \leq \varphi \leq \pi \}. \end{aligned}$$

Из-за аналитичности в области  $D_\varepsilon$  интегралы по контуру

$$\tilde{\Gamma}_\varepsilon + \sum_{i=1}^4 C_i^{(\varepsilon)}$$

от функций

$$\begin{aligned} \tau(\lambda) a^{-1}(\lambda) \Phi_{\alpha 1} \exp(i w_3 y) \quad (\text{при } \varepsilon = 1), \\ \tau(\lambda) b^{-1}(\lambda) \Phi_{\alpha 1} \exp(-i w_3 y) \quad (\text{при } \varepsilon = -1) \end{aligned}$$

равны вычетам этих функций в нулях функций  $a(\lambda)$  и  $b(\lambda)$  соответственно.

Интегралы по системе контуров  $\sum_{i=1}^4 C_i^{(\varepsilon)}$  сокращаются с сингулярными вкладами от правой части. Проследим, как это происходит.

Заметим вначале, что из представлений (5.1.5) и (5.1.6) и леммы Римана–Лебега следует:

$$\begin{aligned} \Phi \exp(i\varepsilon w_3 x \sigma_3) |_{\lambda=0} &= k_3(x) + k_{4,y}(x, x) \sigma_3 - \\ &\quad - \varepsilon k_2(x, x) \sigma_1 + k_1(x, x) \sigma_2 \varepsilon, \\ \Psi \exp(i w_3 x \sigma_3) |_{\lambda=0} &= l_3(x) - l_{4,y}(x, x) \sigma_3 - \\ &\quad - l_1(x, x) \sigma_2 - l_2(x, x) \sigma_1. \end{aligned} \quad (5.1.18)$$

Тогда из (5.1.7), (5.1.8), (5.1.18) можно получить важное соотношение для функций  $a(\lambda) = \Phi_{11}\Psi_{22} - \Phi_{21}\Psi_{12}$ ,  $b(\lambda) = \Psi_{11}\Phi_{21} - \Phi_{11}\Psi_{21}$  при  $\lambda = 0$ :

$$b(0) = 0 \quad (\varepsilon = 1); \quad a(0) = 0 \quad (\varepsilon = -1). \quad (5.1.19)$$

Рассмотрим случай  $\varepsilon = 1$ . Умножим уравнение (5.1.17) на  $w_1 w_2 a^{-1}(\lambda)$  и проинтегрируем по контуру  $\Gamma_1$ . Сингулярный член в правой части равен

$$8\pi\rho\delta_{\alpha 1} [l_3(x) - l_{4,y}(x, x)] \delta(x - y). \quad (5.1.20)$$



Сингулярный член в левой части с учетом формул (5.1.2), (5.1.4), (5.1.17)–(5.1.19) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
 - \int_{\sum C_i^{(1)}} d\lambda \frac{w_1 w_2}{a(\lambda)} \Phi_{\alpha 1}(x, \lambda) \exp(i w_3 y) = \\
 = \sum_{\lambda=0, 2K, -2iK', 2K-2iK'} \frac{\Phi_{\alpha 1}(x, \lambda)}{a(\lambda)} \times \\
 \times \exp(i w_3 x) \lim_{r \rightarrow 0} \int_{-r}^r d\lambda \left( -\frac{\rho^2}{\lambda^2} \right) \exp \left[ \frac{i\rho}{\lambda} (y-x) \right] = \\
 = 8\pi\rho \delta(y-x) \delta_{\alpha 1} \operatorname{Re} [\Psi_{11}(x, \lambda) \exp(i w_3 x)]|_{\lambda=0},
 \end{aligned}$$

который совпадает с (5.1.20). Сокращение других сингулярных членов происходит подобным образом.

Несингулярные члены дают уравнения типа Гельфанда–Левитана–Марченко. С учетом свойств симметрии коэффициентов  $w_i$  (5.1.16) и редукций (5.1.4) окончательный результат сводится к четырем уравнениям (последняя «ловушка» избегается интегрированием по частям слагаемых  $l_4 w_1 w_2$  в (5.1.6)):

$$\begin{aligned}
 & \int_x^{+\infty} ds [l_1(x, s) F_{1,y}^\varepsilon(s+y) - i\varepsilon l_2(x, s) F_{2,y}^\varepsilon(s+y)] = \varepsilon l_{4,y}(x, y), \\
 & \int_x^{+\infty} ds [l_1(x, s) \Pi_{1,y}^\varepsilon(s+y) - i\varepsilon l_2(x, s) \Pi_{2,y}^\varepsilon(s+y)] = i\varepsilon l_5(x, y), \\
 & l_3(x) F_1^\varepsilon(s+y) + \int_x^{+\infty} ds [l_5(x, s) F_1^\varepsilon(x+y) - \\
 & \quad - i l_{4,s}(x, s) \Pi_1^\varepsilon(s+y)] = i\varepsilon l_2(x, y), \\
 & l_3(x) F_2^\varepsilon(x+y) + \int_x^{+\infty} ds [l_5(x, s) F_2^\varepsilon(s+y) - \\
 & \quad - i l_{4,s}(x, s) \Pi_2^\varepsilon(s+y)] = l_1(x, y).
 \end{aligned} \tag{5.1.21}$$

Система (5.1.21) связывает ядра  $l_1/l_3$ ,  $l_2/l_3$ ,  $l_{4,s}/l_3$ ,  $l_5/l_3$  с ядрами  $F_i^\varepsilon(x)$ ,  $\Pi_i^\varepsilon$  ( $i = 1, 2$ ), которые определяются через данные рассеяния:

$$\begin{aligned}
 F_i^\varepsilon(x) = -\frac{i\varepsilon}{4\rho} \sum_n r_n^{(\varepsilon)} w_i(\lambda_n^{(\varepsilon)}) \exp(i\varepsilon w_3(\lambda_n^{(\varepsilon)}) x) - \\
 - \frac{1}{8\pi\rho} \int_{\Gamma_\varepsilon} d\lambda w_i(\lambda) r^{(\varepsilon)}(\lambda) \exp(i w_3(\lambda) \varepsilon x),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_i^\varepsilon(x) = & -\frac{i\varepsilon}{4\rho} \sum_n r_n^{(\varepsilon)} w_i(\lambda_n^{(\varepsilon)}) w_1(\lambda_n^{(\varepsilon)}) w_2(\lambda_n^{(\varepsilon)}) \times \\ & \times w_3^{-1}(\lambda_n^{(\varepsilon)}) \exp(i w_3(\lambda_n^{(\varepsilon)}) x) - \frac{1}{8\pi\rho} \int_{\Gamma_\varepsilon} d\lambda r^{(\varepsilon)}(\lambda) w_3^{-1}(\lambda) \times \\ & \times w_i(\lambda) w_1(\lambda) w_2(\lambda) \exp(i\varepsilon w_3 x). \end{aligned}$$

Здесь

$$r^{(1)}(\lambda) = \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)}, \quad r_n^{(1)} = \frac{b_n^{(1)}}{a_n}; \quad r^{(-1)}(\lambda) = \frac{a(\lambda)}{b(\lambda)}, \quad r_n^{(-1)} = \frac{b_n^{(-1)}}{b_n},$$

где  $a_n^{-1}$  ( $b_n^{-1}$ ) — вычеты функции  $a^{-1}(\lambda)$  ( $b^{-1}(\lambda)$ ) в нулях  $\lambda_n^{(\varepsilon)}$ .

Решение уравнений (5.1.21) при заданных ядрах определяет, согласно (5.1.8), комплексную функцию  $S_+/(1+S_3)$  и, следовательно, функцию  $\mathbf{S}$ , а также функции Йоста по формулам (5.1.5)–(5.1.8). Заметим, что представление решений уравнений Ландау–Лифшица в виде  $S_+/(1+S_3)$  наиболее удобно и ранее использовалось в методе Хироты [22–24]. Здесь и далее  $S_+ = S_1 + iS_2$ .

Солитонные решения системы (5.1.21) соответствуют безотражательным потенциалам:

$$r^{(\varepsilon)}(\lambda) \equiv 0.$$

Рассмотрим простейший случай, когда  $\varepsilon = -1$  и коэффициент  $b(\lambda)$  имеет нули (5.1.15) ( $n = 1, m = 0$ ). Тогда из (5.1.21) мы получаем

$$\begin{aligned} l_1(x, y) &= \frac{i}{2\rho} w_2(\lambda_1) r_1^{(-1)} l_3(x) \exp(-i w_3(\lambda_1)(x+y)), \\ l_2(x, y) &= -\frac{1}{2\rho} w_1(\lambda_1) r_1^{(-1)} l_3(x) \exp(-i w_3(\lambda_1)(x+y)), \\ l_5(x, y) &= l_4(x, y) = 0 \quad (\lambda_1 = u_1 + iK'), \end{aligned}$$

где, вследствие редукций (5.1.2), параметр  $r_1^{(-1)}$  — чисто мнимый. Решение следует из (5.1.8) и описывает доменную границу:

$$\begin{aligned} \frac{S_+}{1+S_3} &= \frac{1}{2\rho} r_1^{(-1)} (w_2(\lambda_1) - w_2(\lambda_1)) \times \\ &\times \exp[-2i w_3(\lambda_1)x + 4i w_1(\lambda_1)w_2(\lambda_1)t]. \end{aligned}$$

Более детально солитонные решения будут проанализированы в следующем разделе при обсуждении процедуры «одевания».

Доказательство существования и единственности решений системы (5.1.21) проведем только для случая  $\varepsilon = 1$  и в отсутствие солитонного сектора. Положим неоднородную часть в уравнениях (5.1.21)

равной нулю. Умножим каждое из уравнений последовательно на  $\varepsilon l_{4,y}$ ,  $i\varepsilon l_5$ ,  $-i\varepsilon l_2$ ,  $l_1$ . Результаты сложим и проинтегрируем по  $y$ . Получим

$$\begin{aligned} & \int_x^{+\infty} dy [l_1^2(x, y) + l_2^2(x, y) + l_{4,y}^2(x, y) - l_5^2(x, y)] = \\ & = \int_x^{+\infty} ds \int_x^{+\infty} dy [l_5(x, s) l_1(x, y) (F_2^\varepsilon(s+y) + i\varepsilon \Pi_{1,y}^\varepsilon(s+y)) + \\ & + l_5(x, s) l_2(x, y) (-i\varepsilon F_1^\varepsilon(s+y) + \Pi_{2,y}^\varepsilon(s+y)) + \\ & + l_2(x, y) l_{4,s}(x, s) (-\varepsilon \Pi_1^\varepsilon(s+y) - i F_{2,y}^\varepsilon(s+y)) + \\ & + l_1(x, s) l_{4,y}(x, y) (\varepsilon F_{1,y}^\varepsilon(s+y) - i \Pi_2^\varepsilon(s+y))]. \end{aligned} \quad (5.1.22)$$

В силу равенства Парсеваля для разложения в интеграл Фурье:

$$\begin{aligned} & \int_x^{+\infty} dy l_a^2(x, y) = \frac{\rho}{2\pi} \int_0^{2K} d\lambda w_1(\lambda) w_2(\lambda) |l_a(x, \lambda)|^2, \\ l_a(x, \lambda) &= \int_x^{+\infty} dy l_a(x, y) \exp(i w_3 y), \quad a = 1, 2, (4, y), 5 \quad (0 < \lambda < 2K), \end{aligned}$$

действительную часть соотношения (5.1.22) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \int_0^{2K} d\lambda \left[ w_1 w_2 \left( |l_1(x, \lambda)|^2 + |l_2(x, \lambda)|^2 + |l_{4,y}(x, \lambda)|^2 + |l_5(x, \lambda)|^2 \right) - \right. \\ & - ((1 - w_1^2) w_1^{-1} |l_5(x, \lambda)| |l_1(x, \lambda)| \cos(\varphi_{l_5} + \varphi_{l_1} + \varphi_r - 3\pi/2) + \\ & + |l_5(x, \lambda)| |l_2(x, \lambda)| \cos(\varphi_{l_5} + \varphi_{l_2} + \varphi_r) (1 - w_2^2) w_2^{-1} + \\ & + |l_2(x, \lambda)| |l_{4,y}(x, \lambda)| \cos(\varphi_{l_2} + \varphi_{4,y} + \varphi_r) (w_3^2 - w_1^2) w_3^{-1} w_1^{-1} + \\ & + |l_1(x, \lambda)| |l_{4,y}(x, \lambda)| \cos(\varphi_{l_1} + \varphi_{l_{4,y}} + \varphi_r + \pi/2) \times \\ & \left. \times (w_3^2 - w_2^2) w_2^{-1} w_3^{-1} \right] |r^{(1)}|^2 = 0, \end{aligned}$$

где  $\varphi_r = \arg r^{(1)}$ ,  $\varphi_{l_a} = \arg l_a$  ( $a = 1, 2, (4, y), 5$ ). Отсюда следует, что при

$$|r^{(1)}(\lambda)| < \min \left\{ \left| \frac{w_\alpha}{1 - w_\alpha^2} \right|, \left| \frac{w_\beta w_3}{w_\beta^2 - w_3^2} \right| \right\}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad (5.1.23)$$

однородная система, соответствующая (5.1.21), не имеет ненулевых решений в  $L_2(x, \infty)$ . Согласно теореме Фредгольма об альтернативах [25],

это означает, что при условии (5.1.23) решение линейной системы (5.1.21) существует и единственно.

Уравнения (5.1.7), (5.1.8), (5.1.21) являются основными в методе обратной задачи рассеяния и позволяют проследить за эволюцией начального распределения намагниченности.

## 5.2. Метод «одевания» на торе. Солитонные решения с асимптотиками $\mathbf{S} \rightarrow (0, 0, 1)$ при $x \rightarrow \pm\infty$

*Усложнять просто, упрощать сложно.*

*Закон Мерфи*

В этом разделе изложим метод интегрирования уравнений Ландау–Лифшица:

$$\partial_t \mathbf{S} = [\mathbf{S} \times \partial_x^2 \mathbf{S}] + [\mathbf{S} \times J\mathbf{S}], \quad \mathbf{S}^2 = 1; \\ J = \text{diag}(J_1, J_2, J_3), \quad J_3 > J_2 > J_1, \quad (5.2.1)$$

основанный на задаче Римана для двоякопериодических функций от спектрального параметра.

Как уже отмечалось, процедура «одевания» для двухосного ферромагнетика была предложена в работах [3–8]. Однако в этих работах не построено решение для изолированной доменной границы, а приведенные солитонные решения, которые описывают бризер и рассеяние двух доменных границ с противоположными хиральностями, не проанализированы. Непосредственным интегрированием уравнений (5.2.1) найдено много точных решений [26]. Однако их связь с методом обратной задачи рассеяния указана в [8] только для наиболее простых случаев. Далее в этой главе мы модифицируем технику работ [4–7] и обсудим перечисленные вопросы. В целях замкнутости изложения некоторые формулы данного раздела повторяют формулы предыдущего.

Для определенности будем предполагать, что распределение намагниченности при  $|x| \rightarrow \infty$  достаточно быстро стремится к равновесным значениям:

$$\mathbf{S} \rightarrow (0, 0, 1) \quad \text{при} \quad x \rightarrow +\infty; \quad \mathbf{S} \rightarrow (0, 0, \varepsilon) \quad \text{при} \quad x \rightarrow -\infty, \quad (5.2.2)$$

где  $\varepsilon = \pm 1$ .

Уравнения ферромагнетика (5.2.1) эквивалентны условию совместности (3.1.15) системы линейных дифференциальных уравнений для матричной функции  $\varphi$ :

$$\partial_x \varphi = U \varphi, \quad \partial_t \varphi = V \varphi. \quad (5.2.3)$$

Согласно формулам (3.1.15), (3.1.21) матрицы  $U(\lambda, x, t)$  и  $V(\lambda, x, t)$  выражаются в терминах компонент вектора  $\mathbf{S}(x, t)$  с коэффициентами

$w_\alpha(\lambda)$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ), которые параметризуются эллиптическими функциями Якоби с модулем

$$k = \sqrt{\frac{J_2 - J_1}{J_3 - J_1}}.$$

При этом матрицы  $\varphi(\lambda)$ ,  $U(\lambda)$ ,  $V(\lambda)$  оказываются двоякопериодическими функциями с периодами  $4K(k)$ ,  $4iK'(k)$ , где  $K$ ,  $K'$  — полные эллиптические интегралы первого рода.

Фундаментальные решения вспомогательной линейной системы (5.2.3)  $\varphi_\pm(\lambda)$  зададим асимптотическими условиями

$$\begin{aligned}\varphi_+ &\rightarrow \chi_2^{(0)} \equiv \exp(-i\sigma_3 [w_3(\lambda)x - 2w_1(\lambda)w_2(\lambda)t]), & x \rightarrow +\infty; \\ \varphi_- &\rightarrow \chi_1^{(0)} \equiv \exp(-i\varepsilon\sigma_3 [w_3(\lambda)x - 2w_1(\lambda)w_2(\lambda)t]), & x \rightarrow -\infty.\end{aligned}$$

Здесь параметр  $\lambda$  принадлежит контуру

$$\Gamma = \{\lambda \mid |\operatorname{Re} \lambda| \leq 2K, \operatorname{Im} \lambda = 0, 2K'\}.$$

Ввиду двоякопериодичности функций  $\varphi_\pm(\lambda)$  свойства их аналитичности достаточно проанализировать в пределах фундаментального прямоугольника, который изображен на рис. 5.2.

На контуре  $\Gamma$  решения Йоста  $\varphi_\pm(\lambda)$  имеют осциллирующее поведение при  $|x| \rightarrow \infty$ , поэтому множество  $\Gamma$  соответствует непрерывному спектру задачи рассеяния.

При  $\lambda \in \Gamma$  базисные решения связаны друг с другом:

$$\varphi_-(\lambda) = \varphi_+(\lambda) T(\lambda). \quad (5.2.4)$$

Матрица перехода  $T(\lambda)$  зависит только от спектрального параметра  $\lambda$ .

Решения Йоста удовлетворяют ограничениям:

$$\begin{aligned}\varphi_\pm(\lambda + 2K) &= \sigma_3 \varphi_\pm(\lambda) \sigma_3, \\ \varphi_\pm^*[(\lambda - 2iK')^*] &= \sigma_3 \varphi_\pm(\lambda) \sigma_3, \\ \varphi_\pm^*(\lambda^*) &= \sigma_2 \varphi_\pm(\lambda) \sigma_2.\end{aligned} \quad (5.2.5)$$

Идею доказательства соотношений (5.2.5) поясним на примере первого из них. Функции  $\varphi_\pm(\lambda + 2K)$  и  $\sigma_3 \varphi_\pm(\lambda) \sigma_3$  удовлетворяют одним и тем же дифференциальным уравнениям, так как

$$U(\lambda + 2K) = \sigma_3 U(\lambda) \sigma_3, \quad V(\lambda + 2K) = \sigma_3 V(\lambda) \sigma_3.$$

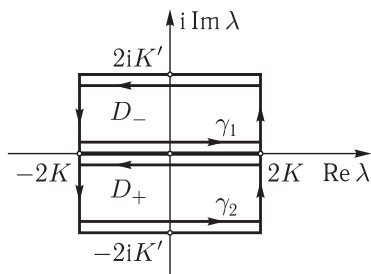


Рис. 5.2. Фундаментальный прямоугольник в  $\lambda$ -плоскости. Жирные линии — контур  $\Gamma$ . Стороны прямоугольника:  $|\operatorname{Re} \lambda| \leq 2K$ ,  $\operatorname{Im} \lambda = \pm 2K'$  рассматриваются как эквивалентные

Кроме того, они имеют одинаковые асимптотики, поскольку

$$w_3(\lambda + 2K) = w_3(\lambda), \quad w_1(\lambda + 2K) w_2(\lambda + 2K) = w_1(\lambda) w_2(\lambda).$$

В силу единственности решений линейных дифференциальных уравнений с одинаковыми асимптотическими условиями, равенство

$$\varphi_{\pm}(\lambda + 2K) = \sigma_3 \varphi_{\pm}(\lambda) \sigma_3$$

должно быть справедливым при любых  $x, t$ .

Редукции (5.2.5) позволяют конкретизировать вид матрицы  $T(\lambda)$ :

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & -b^*(\lambda^*) \\ b(\lambda) & a^*(\lambda^*) \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} a(\lambda + 2K) &= a(\lambda), & b(\lambda + 2K) &= -b(\lambda), \\ a^*[(\lambda - 2iK')^*] &= a(\lambda), & b^*[(\lambda - 2iK')^*] &= -b(\lambda). \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

Поскольку  $\text{Sp } U(\lambda) = 0$ ,  $\det \varphi_{\pm}(\lambda)$  не зависит от  $x$ . Отсюда получаем  $\det \varphi_{\pm}(\lambda) = \det \chi_{2,1}^{(0)} = 1$  и, как следствие,

$$\det T = a(\lambda) a^*(\lambda^*) + b(\lambda) b^*(\lambda^*) = 1. \quad (5.2.7)$$

Дальнейший анализ зависит от знака параметра  $\varepsilon$ .

Рассмотрим сначала случай  $\varepsilon = 1$ , при котором распределение намагниченности имеет одинаковое асимптотическое поведение на бесконечности:

$$\mathbf{S} \rightarrow (0, 0, 1) \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Привлекая стандартные аргументы, нетрудно показать, что столбцы  $\varphi_+^{(1)}(\lambda)$ ,  $\varphi_-^{(2)}(\lambda)$  решений Йоста аналитически продолжаются с контура  $\Gamma$  в область

$$D_- = \{\lambda \mid \text{Im} w_3 < 0\} \equiv \{\lambda \mid |\text{Re} \lambda| \leq 2K, 0 < \text{Im} \lambda < 2K'\},$$

а столбцы  $\varphi_-^{(1)}(\lambda)$ ,  $\varphi_+^{(2)}(\lambda)$  — в область

$$D_+ = \{\lambda \mid \text{Im} w_3 > 0\} \equiv \{\lambda \mid |\text{Re} \lambda| \leq 2K, -2K' < \text{Im} \lambda < 0\}.$$

Полезно ввести новые фундаментальные решения  $F_+(\lambda)$  и  $F_-(\lambda)$  системы (5.2.3), которые будут аналитическими функциями в областях  $D_+$  и  $D_-$  соответственно:

$$F_+ = (\varphi_-^{(1)}, \varphi_+^{(2)}), \quad F_- = (\varphi_+^{(1)}, \varphi_-^{(2)}).$$

На контуре  $\Gamma$  базисные решения  $F_+$ ,  $F_-$ ,  $\varphi_+$ ,  $\varphi_-$  связаны между собой теми же соотношениями (3.6.34), что и в ферромагнетике

с анизотропией типа «легкая ось». Их следствиями, в частности, будут представления для коэффициентов  $a(\lambda)$  и  $a^*(\lambda^*)$ :

$$a(\lambda) = \det F_+(\lambda), \quad a^*(\lambda^*) = \det F_-(\lambda).$$

Отсюда заключаем, что коэффициент  $a(\lambda)$  ( $a^*(\lambda^*)$ ) аналитически продолжается с контура  $\Gamma$  в область  $D_+$  ( $D_-$ ).

В областях своей аналитичности функции  $a(\lambda)$  и  $a^*(\lambda^*)$  могут иметь конечное число нулей, которые соответствуют дискретному спектру задачи рассеяния. Предположим для определенности, что все нули функции  $a(\lambda)$  являются простыми. Тогда, в силу редукций (5.2.6), они должны иметь вид

$$\begin{aligned} \lambda &= u_j - iK', \quad u_j - iK' + 2K, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\ \lambda &= u_s - iK' \pm i\theta_s, \quad u_s - iK' \pm i\theta_s + 2K, \quad s = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

где  $0 < u_j < 2K$ ,  $0 < \theta_s < K'$ .

Далее мы увидим, что каждая пара нулей вида (5.2.8) описывает доменную границу. Доменная граница связывает разные равновесные состояния намагниченности. В нашей задаче распределения намагниченности при  $|x| \rightarrow \infty$  одинаковы. Поэтому доменные границы либо отсутствуют, либо появляются парами с противоположными хиральностями так, чтобы не изменить однородное распределение намагниченности на бесконечности:  $n = 2r$ , где  $r = 1, 2, \dots$

Для дальнейшего анализа удобно выделить из функций  $F_{\pm}(\lambda)$  «затравочное» решение  $\chi_2^{(0)}(\lambda)$  и ввести новые матричные функции  $\Psi_{\pm}(\lambda)$ :

$$F_-(\lambda) = \Psi_-(\lambda)\chi_2^{(0)}(\lambda), \quad \frac{F_+(\lambda)}{a(\lambda)} = \Psi_+(\lambda)\chi_2^{(0)}(\lambda).$$

Из равенств (3.6.34) нетрудно получить условие связи функций  $\Psi_{\pm}(\lambda, x, t)$  на контуре  $\Gamma$ :

$$\Psi_-(\lambda, x, t) = \Psi_+(\lambda, x, t)G(\lambda, x, t), \quad (5.2.9)$$

где

$$\begin{aligned} G(\lambda, x, t) &= \chi_2^{(0)}(\lambda, x, t)G_0(\lambda)\left(\chi_2^{(0)}(\lambda, x, t)\right)^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -b^*(\lambda^*, x, t) \\ -b(\lambda, x, t) & 1 \end{pmatrix}, \\ b(\lambda, x, t) &= b(\lambda) \exp[2i(w_3(\lambda)x - 2w_1(\lambda)w_2(\lambda)t)]. \end{aligned}$$

Мы пришли к классической задаче Римана (5.2.9) на римановой поверхности. В данном случае эта поверхность — тор, так как все функции в формуле (5.2.9) двоякопериодичны по спектральному параметру  $\lambda$ .

Ограничения (5.2.5) легко перенести на новые матричные функции:

$$\begin{aligned}\Psi_{\pm}(\lambda + 2K) &= \sigma_3 \Psi_{\pm}(\lambda) \sigma_3, \\ \Psi_{\pm}^*[(\lambda - 2iK')^*] &= \sigma_3 \Psi_{\pm}(\lambda) \sigma_3, \\ \Psi_{-}^*(\lambda^*) &= \sigma_2 \Psi_{+}(\lambda) \sigma_2 a(\lambda).\end{aligned}\quad (5.2.10)$$

Первые два соотношения (5.2.10) могут быть продолжены с контура  $\Gamma$  в области аналитичности функций  $\Psi_{\pm}(\lambda)$ . Последнее равенство справедливо только на контуре  $\Gamma$ , где оно может быть переписано в форме, более удобной для дальнейшего анализа:

$$\Psi_{+}^{-1}(\lambda) = \Psi_{-}^{\dagger}(\lambda^*). \quad (5.2.11)$$

Учитывая редукцию (5.2.11), соотношение (5.2.9) можно записать в терминах одной лишь функции  $\Psi_{-}$ :

$$\Psi_{-}^{\dagger}(\lambda^*) \Psi_{-}(\lambda) = G(\lambda), \quad \lambda \in \Gamma. \quad (5.2.12)$$

Левая часть формулы (5.2.12) представляет дифференцируемую в окрестности точки  $\lambda = 0$  функцию. В правой части равенства недиагональные элементы матрицы  $G(\lambda)$  при  $x, t \neq 0$  не дифференцируемы в точке  $\lambda = 0$ , так как коэффициенты  $w_i(\lambda)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) имеют в этой точке сингулярность. Противоречия можно избежать лишь при ограничении  $b(\lambda = 0) = 0$  или, что эквивалентно, при условии, что матричная функция  $\Psi_{-}(\lambda)$  унитарна в точке  $\lambda = 0$ :

$$\Psi_{-}^{\dagger}(\lambda = 0) \Psi_{-}(\lambda = 0) = I. \quad (5.2.13)$$

Ввиду связи (5.2.11) матричная функция  $\Psi_{+}(\lambda)$  должна обладать таким же свойством:

$$\Psi_{+}^{\dagger}(\lambda = 0) \Psi_{+}(\lambda = 0) = I. \quad (5.2.14)$$

Функция  $\Psi_{-}(\lambda, x, t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\partial_x \Psi_{-} = U \Psi_{-} - i w_3 \Psi_{-} \sigma_3.$$

Отсюда следует равенство:

$$U(\lambda) = \partial_x \Psi_{-}(\lambda) \Psi_{-}^{-1}(\lambda) - i w_3(\lambda) \Psi_{-}(\lambda) \sigma_3 \Psi_{-}^{-1}(\lambda),$$

левая и правая части которого имеют простые полюсы в точке  $\lambda = 0$  (см. формулы (3.1.15), (3.1.21)). Приравнявая вычеты в этих полюсах, получаем рабочую формулу для расчета намагниченности в ферромагнетике с двухосной анизотропией:

$$S_k \sigma_k = \Psi_{-}(\lambda = 0) \sigma_3 \Psi_{-}^{\dagger}(\lambda = 0). \quad (5.2.15)$$

Здесь мы учли соотношение (5.2.13). Формула (5.2.15) станет конструктивной, если найти решение  $\Psi_{-}(\lambda, x, t)$  задачи Римана (5.2.9) на торе.

Отличительная особенность задачи Римана на торе — в том, что структура матричной функции  $\Psi_{-}(\lambda)$  в значительной мере фиксируется свойствами симметрии (5.2.10).



### 5.2.1. Бризеры двухосного ферромагнетика

Обсудим солитонные решения модели, которые получаются при условии

$$b(\lambda) = b^*(\lambda) \equiv 0.$$

В этом случае имеем

$$\Psi_-^\dagger(\lambda^*) \Psi_-(\lambda) = \Psi_-(\lambda) \Psi_-^\dagger(\lambda^*) = I.$$

В силу соотношения  $\det \Psi_-(\lambda) = a^*(\lambda^*)$  нули функции  $\Psi_-(\lambda)$  совпадают с нулями коэффициента  $a^*(\lambda^*)$  и расположены в точках

$$u_j + iK', \quad u_j + iK' + 2K, \quad j = 1, 2, \dots, 2r; \quad (5.2.16)$$

$$u_s + iK' \pm i\theta_s, \quad u_s + iK' \pm i\theta_s + 2K, \quad s = 1, 2, \dots, m, \quad (5.2.17)$$

где  $0 < u_j < 2K$ ,  $0 < \theta_s < K'$ . Поскольку матрицы  $\Psi_-(\lambda)$  и  $\Psi_-^\dagger(\lambda^*)$  являются взаимно обратными, функция  $\Psi_-^\dagger(\lambda^*)$  должна иметь полюсы в точках (5.2.16), (5.2.17).

Построим простейшую мероморфную функцию  $\Psi_-^\dagger(\lambda^*)$ , которая имеет четыре полюса (5.2.17). Ее разложение по дзета-функциям Вейерштрасса имеет вид (см. приложение)

$$\Psi_-^\dagger(\lambda^*) = A_0 + A\zeta_1 + B\zeta_2 + C\zeta_3 + D\zeta_4, \quad (5.2.18)$$

где

$$\begin{aligned} \zeta_i &= \zeta(\lambda - \mu_i), \quad \mu_1 = u_1 + iK' + i\theta, \quad \mu_2 = u_1 + iK' - i\theta, \\ \mu_3 &= \mu_1 + 2K, \quad \mu_4 = \mu_2 + 2K. \end{aligned}$$

Периоды функций Вейерштрасса —  $4K$ ,  $4iK'$ .

При операции  $f(\lambda) \rightarrow f(\lambda + 2K)$  дзета-функции Вейерштрасса преобразуются друг через друга с точностью до аддитивного члена:

$$\zeta_1 \rightarrow \zeta_3 + 2\eta_1, \quad \zeta_2 \rightarrow \zeta_4 + 2\eta_1, \quad \zeta_3 \rightarrow \zeta_1, \quad \zeta_4 \rightarrow \zeta_2, \quad (5.2.19)$$

а после преобразования

$$f(\lambda) \rightarrow f^*[(\lambda - 2iK')^*]$$

переходят друг в друга:

$$\zeta_1 \rightarrow \zeta_2, \quad \zeta_2 \rightarrow \zeta_1, \quad \zeta_3 \rightarrow \zeta_4, \quad \zeta_4 \rightarrow \zeta_3. \quad (5.2.20)$$

Учитывая формулы (5.2.19), (5.2.20), из двух первых условий симметрии (5.2.10) выражаем матрицы  $B$ ,  $C$ ,  $D$  через  $A$ :

$$B = \sigma_3 A^* \sigma_3, \quad C = \sigma_3 A \sigma_3, \quad D = A^*.$$

При этом необходимо, чтобы матрица  $A_0$  имела следующую структуру:

$$A_0 = \begin{pmatrix} r_1 & -\eta_1 A_{12} + \eta_1 A_{12}^* \\ -\eta_1 A_{21} + \eta_1 A_{21}^* & r_2 \end{pmatrix},$$

где  $r_1, r_2$  — вещественные параметры.

Матричная функция (5.2.18) должна иметь периоды  $4K, 4iK'$ . Это возможно, только если сумма вычетов функции  $\Psi_-^\dagger(\lambda^*)$  в ее полюсах  $\mu_i$  равна нулю (см. приложение):

$$A + \sigma_3 A^* \sigma_3 + \sigma_3 A \sigma_3 + A^* = 0. \quad (5.2.21)$$

Условие (5.2.21) будет выполнено, если диагональные элементы матрицы  $A$  — мнимые числа:

$$A_{11} = -A_{11}^*, \quad A_{22} = -A_{22}^*. \quad (5.2.22)$$

Дальнейшие вычисления проведем, предполагая справедливость равенств (5.2.22). Окончательный результат подтвердит их правильность.

Редукции конкретизировали алгебраическую структуру матричной функции (5.2.18). Положим  $A = \tilde{A}R$ , где  $R = \text{diag}(r_1, r_2)$ ,  $r_1, r_2 \neq 0$ , и представим полученный результат в форме, удобной для дальнейшего анализа:

$$\Psi_-^\dagger(\lambda^*) = \tilde{\Psi}^\dagger(\lambda^*) R,$$

где

$$\tilde{\Psi}^\dagger = I + \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11}\varphi(\lambda) & \tilde{A}_{12}\alpha(\lambda) + \tilde{A}_{12}^*\beta(\lambda) \\ \tilde{A}_{21}\alpha(\lambda) + \tilde{A}_{21}^*\beta(\lambda) & \tilde{A}_{22}\varphi(\lambda) \end{pmatrix},$$

$$\varphi(\lambda) = \zeta_1 - \zeta_2 + \zeta_3 - \zeta_4, \quad \alpha(\lambda) = \zeta_1 - \zeta_3 - \eta_1, \quad \beta(\lambda) = \zeta_4 - \zeta_2 + \eta_1.$$

Условия отсутствия полюсов в произведении матричных функций:

$$\Psi_-(\lambda)\Psi_+^\dagger(\lambda^*) \equiv R\tilde{\Psi}(\lambda)\tilde{\Psi}^\dagger(\lambda^*)R = I \quad (5.2.23)$$

эквивалентны одному независимому матричному уравнению:

$$\tilde{A}^\dagger \tilde{\Psi}^\dagger(\lambda^*)|_{\lambda=\mu_1^*} = 0. \quad (5.2.24)$$

Оно имеет нетривиальное решение только при условии вырожденности матрицы  $\tilde{A}$ :

$$\tilde{A}_{\alpha\beta} = m_\alpha X_\beta. \quad (5.2.25)$$

Учитывая, что  $\beta(\mu_1^*) = 0$ , из (5.2.24), (5.2.25) находим

$$X_1 = -\frac{m_1^*}{|m_2|^2 \alpha(\mu_1^*) + |m_1|^2 \varphi(\mu_1^*)}, \quad X_2 = -\frac{m_2^*}{|m_1|^2 \alpha(\mu_1^*) + |m_2|^2 \varphi(\mu_1^*)}.$$

Величины  $\alpha(\mu_1^*)$ ,  $\varphi(\mu_1^*)$  оказались чисто мнимыми числами, поэтому условие (5.2.22) удовлетворяется.

Матрица  $R^2 = \text{diag}(r_1^2, r_2^2)$  может быть выражена через  $\tilde{\Psi}(\alpha)$  из соотношения (5.2.23):

$$R^{-2} = \tilde{\Psi}(\lambda)\tilde{\Psi}^\dagger(\lambda). \quad (5.2.26)$$

По построению правая часть равенства (5.2.26) не зависит от  $\lambda$  и является положительно определенной диагональной матрицей. Удобное представление для  $R$  получается из (5.2.26) при  $\lambda = 0$ . Уравнение (5.2.26) определяет матрицу  $R$  с точностью до множителя  $N = \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ , где  $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1$ . Отмеченная неоднозначность несущественна для построения решений модели ферромагнетика.

Используя тождества

$$\alpha(\lambda) = \zeta_1 - \zeta_3 - \eta_1 = \frac{1}{2} \frac{\text{dn} v}{\text{sn} v \text{cn} v} \Big|_{v=(\lambda-\mu_1)/2} = \frac{1 + \text{dn} v}{2 \text{sn} v} \Big|_{v=\lambda-\mu_1},$$

$$\beta(\lambda) = \zeta_4 - \zeta_2 + \eta_1 = -\frac{k^2}{4\alpha^*(\lambda^*)}, \quad \varphi(\lambda) - \varphi(\mu_1^*) = -\frac{\alpha(\mu_1^*)\alpha(\lambda)}{\alpha^*(\lambda^*)},$$

представим матрицу  $\Psi_-^\dagger(\lambda)N$  в терминах функций Якоби от модуля  $k = \sqrt{(J_2 - J_3)/(J_3 - J_1)}$ :

$$\Psi_-^\dagger(\lambda^*)N = r \begin{pmatrix} i\alpha(\mu_1^*) \left[ |m_2|^2 + |m_1|^2 \frac{\alpha(\lambda)}{\alpha^*(\lambda^*)} \right] & -i \left[ m_1 m_2^* \alpha(\lambda) + \frac{k^2 m_2 m_1^*}{4\alpha^*(\lambda^*)} \right] \\ -i \left[ m_1^* m_2 \alpha(\lambda) + \frac{k^2 m_2^* m_1}{4\alpha^*(\lambda^*)} \right] & i\alpha(\mu_1^*) \left[ |m_1|^2 + |m_2|^2 \frac{\alpha(\lambda)}{\alpha^*(\lambda^*)} \right] \end{pmatrix}, \quad (5.2.27)$$

где

$$r^{-2} = -\alpha^2(\mu_1^*)(|m_1|^4 + |m_2|^4) + \delta |m_1 m_2|^2 + \frac{k^2}{4} [m_1^2 (m_2^*)^2 + m_2^2 (m_1^*)^2].$$

При вычислении матрицы  $R^{-2} = r^{-2}I$  появляется комбинация эллиптических функций:

$$\delta = \alpha(\lambda)\alpha^*(\lambda^*) - \frac{\alpha_1^2(\mu_1^*)[\alpha^2(\lambda) + (\alpha^*(\lambda^*))^2] - k^2/16}{\alpha(\lambda)\alpha^*(\lambda^*)}.$$

Разложением по дзета-функциям (см. приложение) нетрудно проверить, что это выражение не зависит от переменной  $\lambda$ . Полагая для определенности  $\lambda = 0$ , получаем следующее представление для параметра  $\delta$ :

$$\delta = |\alpha(0)|^2 - \frac{\alpha^2(\mu_1^*)[\alpha^2(0) + (\alpha^*(0))^2] - k^2/16}{|\alpha(0)|^2}.$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= \det \Psi_-^\dagger(\lambda^*) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{\alpha(\lambda)}{\alpha^*(\lambda^*)} \equiv \\ &\equiv -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{\operatorname{cn}(\lambda - v) - i \operatorname{sn}(\lambda - v)}{\operatorname{cn}(\lambda - v^*) + i \operatorname{sn}(\lambda - v^*)} \Big|_{v=u_1+i\theta_1}. \end{aligned} \quad (5.2.28)$$

Алгебраическая структура коэффициента  $a(\lambda)$  будет более наглядной, если воспользоваться разложением функции  $a(\lambda)$  по сигма-функциям Вейерштрасса с периодами  $4K$ ,  $4iK'$ :

$$a(\lambda) \sim \frac{\sigma(\lambda - \mu_2^*) \sigma(\lambda - \mu_4^*)}{\sigma(\lambda - \mu_1) \sigma(\lambda - \mu_3)} \exp(-2\eta_3 \lambda).$$

Как и ранее, эволюция векторов  $\mathbf{m} = (m_1, m_2)$  определяется уравнениями, обеспечивающими отсутствие лишних полюсов в выражениях

$$\begin{aligned} U &= \Psi_-(\lambda) \left[ -\partial_x \Psi_-^\dagger(\lambda^*) - i w_3(\lambda) \sigma_3 \Psi_-^\dagger(\lambda^*) \right], \\ V &= \Psi_-(\lambda) \left[ -\partial_t \Psi_-^\dagger(\lambda^*) + 2i w_1(\lambda) w_2(\lambda) \sigma_3 \Psi_-^\dagger(\lambda^*) \right]. \end{aligned} \quad (5.2.29)$$

Решение этих уравнений имеет вид

$$\mathbf{m} = \chi_2^{(0)}(\mu_1, x, t) \mathbf{c}, \quad (5.2.30)$$

где  $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$  — произвольный постоянный комплексный вектор.

С помощью формул (5.2.15), (5.2.27), (5.2.30) находим бризерное решение уравнений двухосного ферромагнетика:

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{A^2(\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 \varepsilon) - B_-^2 - k^2 \cos^2 \varphi}{A^2(\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 \varepsilon) + B_-^2 + k^2 \cos^2 \varphi}, \\ S_1 + i S_2 &= \pm \frac{2iA \operatorname{ch}(y + i\varepsilon) [B_+ \cos \varphi + iB_- \sin \varphi]}{A^2(\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 \varepsilon) + B_-^2 + k^2 \cos^2 \varphi}, \end{aligned} \quad (5.2.31)$$

где

$$\begin{aligned} A &= 2i\alpha(\mu_1^*), \quad B_\pm = |\alpha(0)| \pm \frac{k^2}{4|\alpha(0)|}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2i} \ln \frac{\alpha^*(0)}{\alpha(0)}, \\ y &= \ln \left| \frac{m_2}{m_1} \right| = \ln \left| \frac{c_2}{c_1} \right| + i(w_3 - w_3^*)x - 2i(w_1 w_2 - w_1^* w_2^*)t, \\ \varphi &= \frac{1}{i} \ln \frac{m_1^* m_2}{|m_1 m_2|} = \arg \frac{c_2}{c_1} + (w_3 + w_3^*)x - 2(w_1 w_2 + w_1^* w_2^*)t. \end{aligned}$$

Здесь и далее мы не указываем аргумент  $\mu_1$  у функций  $w_\alpha(\mu_1)$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ).

Модель двухосного ферромагнетика в пределе  $k \rightarrow 0$  переходит в модель ферромагнетика с анизотропией типа «легкая ось». Поэтому

в пределе  $k \rightarrow 0$ ,  $\mu_1 = \text{const}$ , решение (5.2.31) переходит в решение (3.4.20), (3.4.22), описывающее прецессирующий солитон в легкоосном ферромагнетике. Напомним, что внутренняя структура солитона в легкоосном ферромагнетике существенно зависела от знака частоты прецессии. Знак определял направление прецессии вектора  $\mathbf{S}$  вокруг оси анизотропии. В двухосном ферромагнетике решение (5.2.31) описывает не только прецессию намагниченности в солитоне, но и его пульсации. Во избежание путаницы, определим положительную частоту колебаний намагниченности в бризере (5.2.31):

$$\omega = 2 |w_1 w_2 + w_1^* w_2^*|.$$

В общем случае решение (5.2.31) описывает пространственно локализованное возбуждение, которое движется как целое со скоростью

$$V = \frac{2(w_1 w_2 - w_1^* w_2^*)}{w_3 - w_3^*}. \quad (5.2.32)$$

Наиболее резкие изменения намагниченности в бризере происходят в областях с характерным размером порядка  $\kappa^{-1}$ :

$$\kappa = |w_3 - w_3^*|.$$

При малых  $\kappa$  имеем малоамплитудный солитон. Как и в легкоосном ферромагнетике, малоамплитудный солитон в двухосном ферромагнетике можно представить как линейную спиновую волну, локализованную в пространстве. Однако если в легкоосном ферромагнетике это волна прецессии с  $S_3 \approx \text{const}$ , то в двухосном магнетике изменяется не только фаза  $\varphi = \text{arctg}(S_2/S_1)$  спиновой волны, но и величина  $S_3$ . Проекция  $S_3$  параметра порядка дополнительно периодически модулирована с характерным расстоянием порядка  $p^{-1}$  (см. рис. 5.3):

$$p = |w_3 + w_3^*|.$$

Периодический рельеф движется по гребню солитона со скоростью

$$V_{\text{ph}} = \frac{\omega}{p}.$$

Расстояние между огибающими на рис. 5.3 порядка  $\kappa$ .

В общем случае в системе отсчета, связанной с солитоном, проекция  $S_3$  колеблется как целое с размахом  $2a [b(1+b)]^{-1}$ , где

$$a = \frac{2A^2}{k^2} (\text{ch}^2 y - \sin^2 \varepsilon), \quad b = \frac{1}{k^2} [A^2 (\text{ch}^2 y - \sin^2 \varepsilon) + B_-^2].$$

Кроме того, с ростом  $\kappa$  градиенты огибающей солитона становятся большими и периодический рельеф практически неразличим. Заметим,

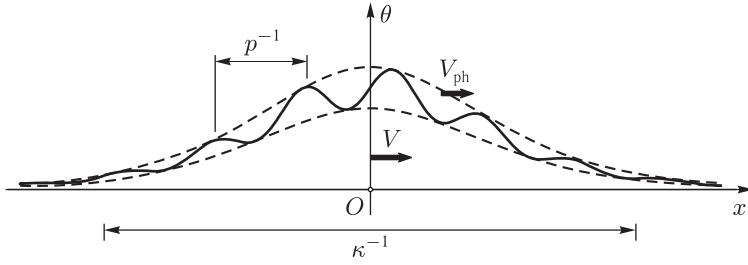


Рис. 5.3. Распределение намагниченности в малоамплитудном солитоне,  $S_3 = \cos \theta$

что при этом скорость движения рельефа  $V_{ph}$  совпадает со скоростью  $V$  солитона при  $u_1 = K/2$ ,  $u_1 = 3K/2$ .

Для того чтобы понять структуру решения (5.2.31), рассмотрим неподвижные магнитные солитоны [26]. Скорость (5.2.32) солитона обращается в нуль при  $u_1 = K$  или при  $u_1 = 0$ . Проанализируем вначале первую возможность.

При

$$u_1 = K, \quad K' < \tilde{\theta} \equiv \theta_1 + K' < 2K'$$

распределение намагниченности имеет вид

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{A^2 \operatorname{ch}^2 y - B^2 - k^2 \cos^2 \varphi}{A^2 \operatorname{ch}^2 y + B^2 + k^2 \cos^2 \varphi}, \\ S_1 + iS_2 &= \frac{2i \varepsilon A \operatorname{ch} y [ik' \operatorname{cn}(\tilde{\theta}, k') \sin \varphi + \operatorname{dn}(\tilde{\theta}, k') \cos \varphi]}{A^2 \operatorname{ch}^2 y + B^2 + k^2 \cos^2 \varphi}. \end{aligned} \quad (5.2.33)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A &= \frac{\operatorname{dn}(\tilde{\theta}, k') \operatorname{cn}(\tilde{\theta}, k')}{\operatorname{sn}(\tilde{\theta}, k')}, \quad B = k' \operatorname{cn}(\tilde{\theta}, k'), \\ y &= y_0 + 2\rho k' \operatorname{sn}(\tilde{\theta}, k') x, \quad \varphi = \varphi_0 - 4\rho^2 k' \operatorname{cn}(\tilde{\theta}, k') \operatorname{dn}(\tilde{\theta}, k') t \end{aligned}$$

и  $y_0, \varphi_0$  — вещественные параметры,  $\varepsilon^2 = 1$ .

Вдали от граничных значений параметра  $\tilde{\theta} = K', 2K'$  распределение  $S_3$  пульсирует с большой амплитудой (рис. 5.4 а). Вектор  $\mathbf{S}$  совершает прецессию вокруг оси  $Ox_3$  с частотой

$$\omega = -4\rho^2 k' \operatorname{cn}(\tilde{\theta}, k') \operatorname{dn}(\tilde{\theta}, k'),$$

которая изменяется в пределах  $0 \leq \omega \leq 4\rho^2 k'$ . Когда  $\omega \rightarrow 4\rho^2 k' = \sqrt{(J_3 - J_1)(J_3 - J_2)}$  (при  $\tilde{\theta} \rightarrow 2K'$ ), параметр  $\kappa = 2\rho k' \operatorname{sn}(\tilde{\theta}, k')$  стремится к нулю и решение (5.2.33) переходит в выражение для линейных спиновых волн с волновым числом  $p = 0$ . При малых  $\kappa$  проекция  $S_3$

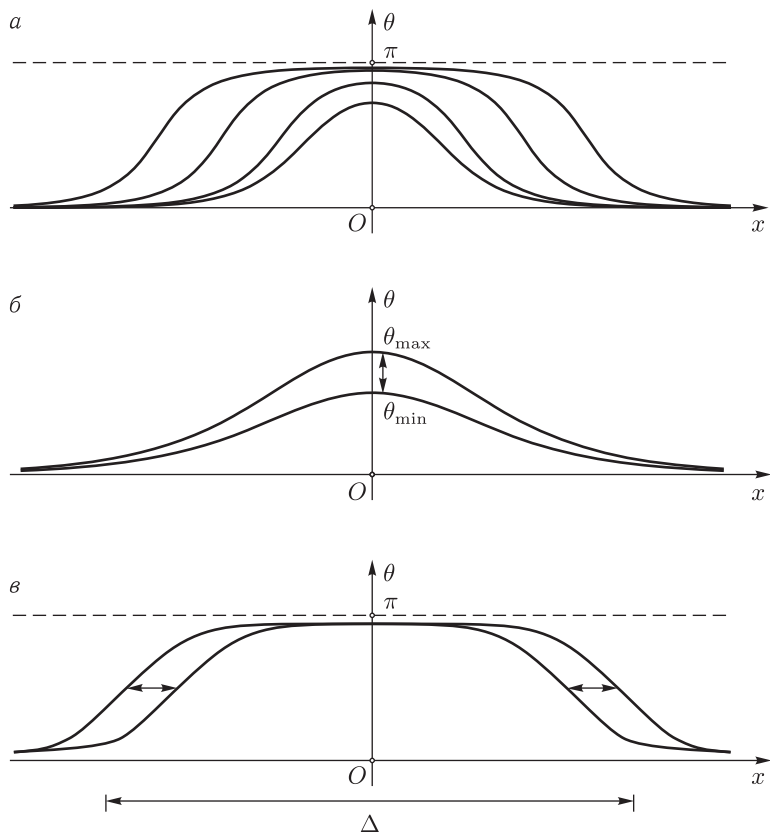


Рис. 5.4. Пульсации неподвижного солитона при  $K' < \tilde{\theta} < 2K'$  (а), колебания намагниченности в малоамплитудном солитоне (б) и солитоне с предельно большой амплитудой (в),  $S_3 = \cos \theta$

имеет стандартный солитонный вид, но ее значение в центре солитона (при  $y = 0$ ) периодически изменяется со временем (рис. 5.4 б).

Наиболее интересно поведение солитона (5.2.33) при малых частотах ( $\tilde{\theta} \cong K'$ ), где наиболее ярко проявляется двухосность ферромагнетика. Хотя, как и в одноосном магнетике, при малой частоте прецессии бризер (5.2.33) можно рассматривать как связанное состояние двух доменных границ (рис. 5.4 в), теперь эти границы начинают колебаться друг относительно друга. Солитон как будто «дышит». Примем за характерный размер бризера расстояние между точками, где проекция  $S_3$  обращается в нуль. Эти точки являются корнями уравнения

$$\operatorname{ch}^2 y = \frac{1}{A^2} (B^2 + k^2 \cos^2 \varphi) \geq 1. \quad (5.2.34)$$

Полезно выразить характерный размер бризера через физические параметры задачи  $\kappa$  и  $\omega$  [26]:

$$\Delta = \frac{2}{\kappa} \text{Arch} \left[ \frac{\kappa^2}{\omega} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{J_2 - J_1}{2\omega} \right)^2} + \frac{J_2 - J_1}{2\omega} \cos 2\varphi \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.2.35)$$

Через эти же параметры выразим угол  $\theta$ , определяющий проекцию  $S_3 = \cos \theta$ :

$$\text{tg}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\kappa^2}{\omega \text{ch}^2 y} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{J_2 - J_1}{2\omega} \right)^2} + \frac{J_2 - J_1}{2\omega} \cos 2\varphi \right). \quad (5.2.36)$$

Формулы (5.2.35), (5.2.36) показывают, что распределение намагниченности и характер колебаний доменных границ в бризере существенно зависят от соотношения параметров  $\kappa$ ,  $J_2 - J_1$  и  $\omega$ . Угол  $\theta$  в центре солитона (при  $y = 0$ ) не достигает предельного значения  $\theta = \pi$ . Чем больше расхождение доменных границ при колебаниях, тем больше изменение проекции  $S_3$  в центре бризера.

При  $J_2 - J_1 \ll \omega \ll \kappa^2$  амплитуда пульсаций бризера мала по сравнению с шириной ( $\sim \kappa^{-1}$ ) ограничивающих его доменных границ:

$$\Delta_{\max} - \Delta_{\min} \cong \frac{J_2 - J_1}{\kappa \omega} \ll \frac{1}{\kappa}.$$

При этом средний размер перемагниченной области,

$$\frac{\Delta_{\max} + \Delta_{\min}}{2} \cong \frac{1}{\kappa} \ln \frac{4\kappa^2}{\omega} \gg \frac{1}{\kappa} \approx \frac{1}{\sqrt{J_3 - J_2}},$$

много больше ширины доменных границ, и он совпадает с размером солитона в легкоосном ферромагнетике.

При  $(J_2 - J_1) \gg 2\omega$  размах относительных колебаний доменных границ увеличивается. Минимальный размер солитона не зависит от частоты:

$$\Delta_{\min} \approx \frac{2}{\kappa} \text{Arch} \frac{\kappa}{\sqrt{J_2 - J_1}},$$

но максимальный размер возрастает с ее понижением:

$$\Delta_{\max} \cong \frac{2}{\kappa} \text{Arch} \left[ \frac{\kappa^2}{J_2 - J_1} + \frac{\kappa^2 (J_2 - J_1)}{\omega^2} \right]^{\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{\kappa} \ln \frac{4\kappa^2 (J_2 - J_1)}{\omega^2}.$$

При таких параметрах бризер (5.2.33) существенно отличается от прецессионного солитона в легкоосном ферромагнетике: амплитуда его пульсаций становится очень большой.

Когда средний размер солитона велик, вблизи точек  $y_{1,2}$  ( $y_1 > 0$ ,  $y_2 = -y_1$ ), являющихся корнями уравнения (5.2.34), распределение



намагниченности (5.2.33) имеет вид, типичный для изолированных доменных границ:

$$S_3 \cong \pm \operatorname{th} \xi, \quad S_1 + iS_2 = i\varepsilon \frac{ik' \operatorname{cn}(\tilde{\theta}, k') \sin \varphi + \operatorname{dn}(\tilde{\theta}, k') \cos \varphi}{\operatorname{ch} \xi \sqrt{B^2 + k^2 \cos^2 \varphi}}, \quad (5.2.37)$$

где  $\xi = y - y_{1,2}$ ,  $\varepsilon^2 = 1$ . Формулы (5.2.37) показывают, что доменные стенки, замыкающие солитон, в процессе колебаний относительно общего «центра тяжести» периодически переходят из блоховских в неелевские и обратно. При максимальном удалении ( $\varphi = \pi n$ ,  $n$  — целое число) стенки чисто блоховские, а при максимальном сближении ( $\varphi = \pi/2 + \pi n$ ) — чисто неелевские.

В пределе  $\varphi_0 = -\pi/2$ ,  $\tilde{\theta} \rightarrow K'$  решение (5.2.33) приобретает вид

$$S_3 = \frac{k^2 \operatorname{ch}^2 y - k'^2 - \tilde{\varphi}^2}{k^2 \operatorname{ch}^2 y + k'^2 + \tilde{\varphi}^2}, \quad S_1 + iS_2 = \frac{2i\varepsilon \operatorname{ch} y (ik' + \tilde{\varphi})}{k^2 \operatorname{ch}^2 y + k'^2 + \tilde{\varphi}^2}, \quad (5.2.38)$$

где  $y = 2\rho k'x + y_0$ ,  $\tilde{\varphi} = 4\rho^2 k^2 k't$ . Выражение (5.2.38) описывает распад бризера на две доменные границы (см. рис. 5.5). При  $t \rightarrow +\infty$  ограничивающие бризер доменные границы удаляются друг от друга по логарифмическому закону:

$$\Delta \sim \frac{2}{\kappa} \ln t.$$

При этом их относительная скорость  $2V = 2 \ln t / (\kappa t)$  стремится к нулю и возбуждение (5.2.38) вырождается в две неподвижные блоховские границы. Можно сказать, что решение (5.2.38) описывает рассеяние двух блоховских доменных границ, при котором их скорость на бесконечности обращается в нуль. При таком процессе направления намагниченности в доменных границах изменяется на  $\pi$ .

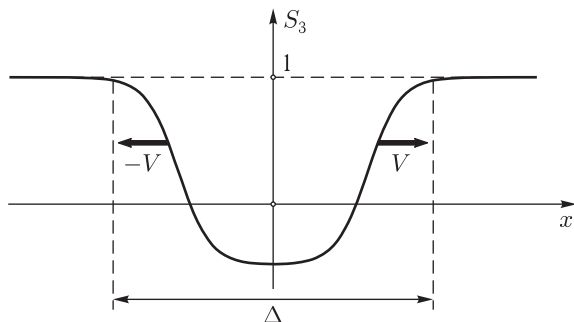


Рис. 5.5. Распад бризера на две доменные границы, удаляющиеся друг от друга ( $t \gg 1$ )

Непосредственным интегрированием уравнений Ландау–Лифшица было найдено [26] еще одно явное решение, также соответствующее неподвижному бризеру:

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{A^2 \operatorname{sh}^2 y - B^2 - k^2 \operatorname{sn}^2(\tilde{\theta}, k') \cos^2 \varphi}{A^2 \operatorname{sh}^2 y + B^2 + k^2 \operatorname{sn}^2(\tilde{\theta}, k') \cos^2 \varphi}, \\ S_1 + iS_2 &= \pm \frac{2A \operatorname{sh} y [iB \sin \varphi + \operatorname{dn}(\tilde{\theta}, k') \cos \varphi]}{A^2 \operatorname{sh}^2 y + B^2 + k^2 \operatorname{sn}^2(\tilde{\theta}, k') \cos^2 \varphi}, \end{aligned} \quad (5.2.39)$$

где

$$\begin{aligned} y &= y_0 + \frac{2\rho x}{\operatorname{sn}(\tilde{\theta}, k')}, \quad \varphi = \varphi_0 + \frac{4\rho At}{\operatorname{sn}^2(\tilde{\theta}, k')}, \\ A &= \operatorname{dn}(\tilde{\theta}, k') \operatorname{cn}(\tilde{\theta}, k'), \quad B = \operatorname{cn}(\tilde{\theta}, k'), \end{aligned}$$

$y_0, \varphi_0$  — вещественные параметры. Это решение следует из общей формулы (5.2.31) при значениях параметров

$$u_1 = 0, \quad K' < \tilde{\theta} \equiv K' + \theta_1 < 2K'.$$

Решение (5.2.39) описывает прецессию вектора  $\mathbf{S}$  вокруг оси  $Ox_3$  с частотой

$$\omega = \frac{4\rho^2 \operatorname{dn}(\tilde{\theta}, k') |\operatorname{cn}(\tilde{\theta}, k')|}{\operatorname{sn}^2(\tilde{\theta}, k')} > 4\rho^2 = J_3 - J_1.$$

В отличие от предыдущего случая прецессия осуществляется по часовой стрелке (напомним, что  $\operatorname{sn}(\tilde{\theta}, k') < 0$ ).

Решение (5.2.39) является обобщением решения (3.4.33) для ферромагнетика с анизотропией типа «легкая ось». Бризер (5.2.39) имеет примерно такой же вид, как и солитон, изображенный на рис. 5.4 в. Однако в центре бризера (5.2.39) (при  $y = 0$ ) его проекция  $S_3$  теперь достигает значения  $S_3 = -1$  ( $\theta = \pi$ ). Как и в одноосном ферромагнетике, фазы прецессии в бризере (5.2.39) при  $y > 0$  и  $y < 0$  различаются на  $\pi$ . Характер относительных колебаний связанных границ в бризере (5.2.39) отличается от такового в бризере (5.2.33). При максимальном удалении доменные границы являются чисто неелевскими, а при максимальном сближении — блоховскими.

В пределе  $\varphi_0 = -\pi/2$ ,  $\omega \rightarrow 0$  ( $\tilde{\theta} \rightarrow K'$ ) решение (5.2.39) приобретает вид

$$S_3 = \frac{k^2 \operatorname{sh}^2 y - 1 - \tilde{\varphi}^2}{k^2 \operatorname{sh}^2 y + 1 + \tilde{\varphi}^2}, \quad S_1 + iS_2 = \mp \frac{2k \operatorname{sh} y (i + \tilde{\varphi})}{k^2 \operatorname{sh}^2 y + 1 + \tilde{\varphi}^2}, \quad (5.2.40)$$

где  $y = y_0 + 2\rho x$ ,  $\tilde{\varphi} = 4\rho^2 k^2 t$ . Выражение (5.2.40) описывает распад бризера на две чисто неелевские доменные границы, имеющие на бесконечности нулевую скорость.

### 5.2.2. Взаимодействие двух доменных стенок

Проанализируем солитонное решение, описывающее столкновение двух доменных границ. Для получения такого решения построим мероморфную двоякопериодическую матричную функцию  $\Psi_-^\dagger(\lambda^*)$  с полюсами типа (5.2.16) в четырех точках фундаментального прямоугольника:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= u_1 + iK', & \mu_2 &= \mu_1 + 2K, & \nu_1 &= u_2 + iK', \\ \nu_2 &= \nu_1 + 2K \pmod{(4K, 4iK')}.\end{aligned}$$

Разложим функцию  $\Psi_-^\dagger(\lambda^*)$  по дзета-функциям Вейерштрасса:

$$\Psi_-^\dagger(\lambda^*) = A_0 + A\zeta_1 + A_1\zeta_2 + B\zeta_3 + B_1\zeta_4, \quad (5.2.41)$$

где

$$\zeta_1 = \zeta(\lambda - \mu_1), \quad \zeta_2 = \zeta(\lambda - \mu_2), \quad \zeta_3 = \zeta(\lambda - \nu_1), \quad \zeta_4 = \zeta(\lambda - \nu_2).$$

Периоды дзета-функций  $-4K, 4iK'$ .

Редукции (5.2.10) конкретизируют вид матриц в представлении (5.2.41):

$$\begin{aligned}A_1 &= \sigma_3 A \sigma_3, & A^* &= \sigma_3 A \sigma_3, & B_1 &= \sigma_3 B \sigma_3, & B^* &= \sigma_3 B \sigma_3, \\ A_0 &= \begin{pmatrix} r_1 & -\eta_1(A_{12} + B_{12}) \\ -\eta_1(A_{21} + B_{21}) & r_2 \end{pmatrix},\end{aligned} \quad (5.2.42)$$

где  $r_1, r_2$  — вещественные параметры.

Условие двоякопериодичности функции (5.2.41) эквивалентно равенству

$$\text{diag}(A + B) = 0. \quad (5.2.43)$$

Дальнейшие вычисления, как и ранее, проведем в предположении справедливости соотношения (5.2.43). Окончательный результат подтвердит его правильность.

С учетом формул (5.2.42), (5.2.43), матричную функцию (5.2.41) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\Psi_-^\dagger(\lambda^*) &= \tilde{\Psi}^\dagger(\lambda^*) R, & R &= \text{diag}(r_1, r_2), & (r_1, r_2 &\neq 0), \\ \tilde{\Psi}^\dagger(\lambda^*) &= \left[ I + \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11}\chi(\lambda) & \tilde{A}_{12}\alpha_1(\lambda) + \tilde{B}_{21}\alpha_2(\lambda) \\ \tilde{A}_{21}\alpha_1(\lambda) + \tilde{B}_{21}\alpha_2(\lambda) & \tilde{A}_{22}\chi(\lambda) \end{pmatrix} \right] R,\end{aligned}$$

где

$$\chi(\lambda) = \zeta_1 + \zeta_2 - \zeta_3 - \zeta_4, \quad \alpha_1(\lambda) = \zeta_1 - \zeta_2 - \eta_1, \quad \alpha_2(\lambda) = \zeta_3 - \zeta_4 - \eta_1.$$

Рассматриваемая задача имеет нетривиальное решение только тогда, когда матрицы  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$  вырождены. Положим

$$\tilde{A}_{\alpha\beta} = m_\alpha X_\beta, \quad \tilde{B}_{\alpha\beta} = n_\alpha Y_\beta.$$

Далее мы увидим, что условия (5.2.42), (5.2.43) будут выполнены, если

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= (\tilde{m}_1, i\tilde{m}_2), \quad \mathbf{n} = (\tilde{n}_1, i\tilde{n}_2), \\ \tilde{m}_1 X_1 &= -\tilde{n}_1 Y_1, \quad \tilde{m}_2 X_2 = -\tilde{n}_2 Y_2, \end{aligned} \quad (5.2.44)$$

где  $\tilde{m}_i, \tilde{n}_i$  ( $i = 1, 2$ ) — вещественные параметры.

Векторы  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$  находим из условия отсутствия полюсов в произведении матричных функций (5.2.23), которое сводится к двум независимым матричным уравнениям:

$$\tilde{A}^\dagger \tilde{\Psi}^\dagger(\lambda^*)|_{\lambda=\mu_1^*} = 0, \quad \tilde{B}^\dagger \tilde{\Psi}^\dagger(\lambda^*)|_{\lambda=\nu_1^*} = 0.$$

Их решения имеют вид

$$\begin{aligned} X_1 &= -\tilde{n}_1 \gamma^{-1}, \quad Y_1 = \tilde{m}_1 \gamma^{-1}, \\ \gamma &= \tilde{n}_1 \tilde{m}_1 \chi(\nu_1^*) + \tilde{n}_2 \tilde{m}_2 \alpha_1(\nu_1^*); \\ X_2 &= i\tilde{n}_2 \delta^{-1}, \quad Y_2 = -i\tilde{m}_2 \delta^{-1}, \\ \delta &= \tilde{n}_1 \tilde{m}_1 \alpha_1(\nu_1^*) + \tilde{n}_2 \tilde{m}_2 \chi(\nu_1^*). \end{aligned} \quad (5.2.45)$$

При записи формулы (5.2.45) учли, что

$$\chi(\nu_1^*) = \chi(\mu_1^*), \quad \alpha_1(\nu_1^*) = -\alpha_2(\mu_1^*).$$

Поскольку величины  $\chi(\nu_1^*)$  и  $\alpha_1(\nu_1^*)$  — вещественны, условие (5.2.42) удовлетворяется. Ограничения (5.2.43) также оказываются выполненными.

Зависимость от переменных  $x$ ,  $t$  векторов  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{n}$  определяется из требования отсутствия лишних полюсов в соотношениях (5.2.29). Это дает

$$\mathbf{m} = \chi_2^{(0)}(\mu_1, x, t) \mathbf{c}, \quad \mathbf{n} = \chi_2^{(0)}(\nu_1, x, t) \mathbf{d},$$

где  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{d}$  — постоянные комплексные векторы. Поскольку  $\chi_2^{(0)}(\mu_1)$  и  $\chi_2^{(0)}(\nu_1)$  — вещественные диагональные матрицы, равенства (5.2.44) будут справедливы при выборе

$$\mathbf{c} = (c_1, i c_2), \quad \mathbf{d} = (d_1, i d_2),$$

где  $c_i, d_i$  ( $i = 1, 2$ ) — вещественные числа. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{m}_1 &= \exp[-\varphi(u_1)] c_1, \quad \tilde{m}_2 = \exp \varphi(u_1) c_2, \\ \tilde{n}_1 &= \exp[-\varphi(u_2)] d_1, \quad \tilde{n}_2 = \exp \varphi(u_2) d_2, \\ \varphi(u) &= \rho x \operatorname{dn} u - 2(\rho k)^2 t \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u. \end{aligned} \quad (5.2.46)$$

Элементы диагональной матрицы  $R$  (с точностью до знака) определяются равенством (5.2.26), правая часть которого содержит независимую от  $\lambda$  комбинацию эллиптических функций. Удобная для дальнейшего анализа параметризация матрицы  $R$  получится, если в правой части равенства (5.2.26) положить  $\lambda = 0$ .

Справедливы тождества:

$$\begin{aligned}\chi(\lambda) - \chi(\nu_1^*) &= -\frac{\alpha_1(\lambda)\alpha_2(\lambda)}{\alpha_1(\nu_1)}, \\ \alpha_1(\lambda) &= f(\lambda - \mu_1), \quad \alpha_2(\lambda) = f(\lambda - \nu_1), \\ f(\lambda - \mu) &= \frac{dn\nu}{2\operatorname{sn}\nu \operatorname{cn}\nu} \Big|_{\nu=(\lambda-\mu)/2} = \frac{1+dnv}{2\operatorname{sn}v} \Big|_{v=\lambda-\mu}.\end{aligned}$$

В данной задаче параметр  $\mu_1(\nu_1)$  специфичен:  $\mu_1 = u_1 + iK'$ , поэтому функции  $\alpha_{1,2}$  имеют дополнительные трансформационные свойства:

$$f(\lambda - \mu_1) = \frac{k}{2} [\operatorname{sn}(\lambda - u_1) + i \operatorname{cn}(\lambda - u_1)], \quad \alpha_{1,2}^*(\lambda^*) \alpha_{1,2}(\lambda) = \frac{k^2}{4}.$$

Используя эти тождества, представим матричную функцию

$$\Psi_-^\dagger(\lambda^*) N, \quad N = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \quad (\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1),$$

в терминах функций Якоби от модуля  $k = \sqrt{(J_2 - J_1)/(J_3 - J_1)}$ :

$$\begin{aligned}\Psi_-^\dagger(\lambda^*) N &= \\ &= r \begin{pmatrix} \alpha_1(\lambda)\alpha_2(\lambda)\tilde{n}_1\tilde{m}_1 + k^2\tilde{n}_2\tilde{m}_2/4 & i\alpha_1(\nu_1)[\tilde{m}_1\tilde{n}_2\alpha_1(\lambda) - \tilde{n}_1\tilde{m}_2\alpha_2(\lambda)] \\ i\alpha_1(\nu_1)[- \tilde{m}_2\tilde{n}_1\alpha_1(\lambda) + \tilde{n}_2\tilde{m}_1\alpha_2(\lambda)] & \alpha_1(\lambda)\alpha_2(\lambda)\tilde{n}_2\tilde{m}_2 + k^2\tilde{n}_1\tilde{m}_1/4 \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{5.2.47}$$

где

$$r^{-2} = \frac{k^2}{4} \left( \frac{k^2}{4} (\tilde{n}_1^2\tilde{m}_1^2 + \tilde{n}_2^2\tilde{m}_2^2) + \alpha_1^2(\nu_1) (\tilde{m}_2^2\tilde{n}_1^2 + \tilde{n}_2^2\tilde{m}_1^2) + \frac{\delta}{2} \tilde{n}_1\tilde{n}_2\tilde{m}_1\tilde{m}_2 \right).$$

При вычислении  $r$  появляется не зависящая от переменной  $\lambda$  комбинация эллиптических функций:

$$\frac{\delta}{2} = \alpha_1(\lambda)\alpha_2(\lambda) + \alpha_1^*(\lambda^*)\alpha_2^*(\lambda^*) - \alpha_1^2(\nu_1) \left( \frac{\alpha_1(\lambda)}{\alpha_2(\lambda)} + \frac{\alpha_2(\lambda)}{\alpha_1(\lambda)} \right).$$

Отсюда, полагая  $\lambda = 0$ , находим:

$$\delta = k^2 (\operatorname{sn}u_1\operatorname{sn}u_2 - \operatorname{cn}u_1\operatorname{cn}u_2) - 4\alpha_1^2(\nu_1) (\operatorname{sn}u_1\operatorname{sn}u_2 + \operatorname{cn}u_1\operatorname{cn}u_2).$$

При этом

$$\begin{aligned}a(\lambda) &= \det \Psi_-^\dagger(\lambda^*) = 4\varepsilon_1\varepsilon_2 k^{-2} \alpha_1(\lambda)\alpha_2(\lambda) \equiv -\varepsilon_1\varepsilon_2 \times \\ &\times [\operatorname{cn}(\lambda - u_1) - i \operatorname{sn}(\lambda - u_1)] [\operatorname{cn}(\lambda - u_2) - i \operatorname{sn}(\lambda - u_2)].\end{aligned}\tag{5.2.48}$$

Солитонное решение, построенное с помощью формул (5.2.15), (5.2.46), (5.2.47), имеет вид

$$\begin{aligned} S_3 &= D^{-1} [k^2 \operatorname{ch}(y_1 + y_2) - 4\alpha_1^2(\nu_1) \operatorname{ch}(y_2 - y_1) + \Delta], \\ S_1 - i S_2 &= 4i\varepsilon D^{-1} \alpha_1(\nu_1) k [\operatorname{sn} u_2 \operatorname{sh} y_1 - \operatorname{sn} u_1 \operatorname{sh} y_2 + \\ &\quad + i(\operatorname{cn} u_1 \operatorname{ch} y_2 - \operatorname{cn} u_2 \operatorname{ch} y_1)]. \end{aligned} \quad (5.2.49)$$

Здесь  $\varepsilon = \pm 1$ ,

$$\begin{aligned} D &= k^2 \operatorname{ch}(y_1 + y_2) + 4\alpha_1^2(\nu_1) \operatorname{ch}(y_2 - y_1) + \delta, \\ \Delta &= \delta + 4\alpha_1^2(\nu_1) (\operatorname{sn} u_1 \operatorname{sn} u_2 + \operatorname{cn} u_1 \operatorname{cn} u_2), \\ y_{1,2} &= 2\rho x \operatorname{dn} u_{1,2} - (2\rho k)^2 t \operatorname{sn} u_{1,2} \operatorname{cn} u_{1,2} + y_{1,2}^{(0)}, \\ y_1^{(0)} &= \ln \frac{c_2}{c_1}, \quad y_2^{(0)} = \ln \frac{d_2}{d_1}. \end{aligned}$$

Выражение (5.2.49) описывает рассеяние двух доменных границ (рис. 5.6). Ширина  $s$ -й доменной границы — порядка  $\kappa_s^{-1}$ , где  $\kappa_s = 2\rho \operatorname{dn} u_s$  ( $s = 1, 2$ ), а ее скорость  $v_s$  определяется соотношением

$$v_s = 2\rho k^2 \frac{\operatorname{sn} u_s \operatorname{cn} u_s}{\operatorname{dn} u_s} \quad (0 < u_s < 2K).$$

Для выяснения природы взаимодействия доменных стенок удобно «сесть» на одну из них и наблюдать, как изменяется вторая. Математически это соответствует переходу в систему отсчета, движущуюся

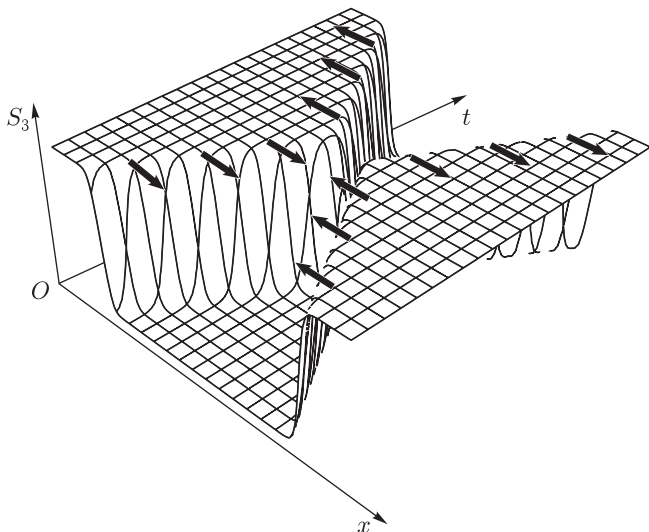


Рис. 5.6. Рассеяние двух доменных границ (5.2.49). Стрелками показаны направления движения границ

со скоростью  $v_1$  первой доменной границы. Вводя новую переменную  $\xi = x - v_1 t$ , получаем

$$y_1 = \kappa_1 \xi + y_1^{(0)}, \quad y_2 = \kappa_2 [\xi - (v_2 - v_1)t] + y_2^{(0)}.$$

Пусть для определенности  $0 < v_1 < v_2$ .

В пределе  $\xi = \text{const}$ ,  $t \rightarrow -\infty$  решение (5.2.49) переходит в выражение, описывающее одну доменную границу (первую):

$$S_3 \approx \text{th } \tilde{y}_1, \quad S_1 - iS_2 \approx -\frac{\varepsilon (\text{cnu}_1 + i \text{sn} u_1)}{\text{ch } \tilde{y}_1},$$

$$\tilde{y}_1 = \kappa_1 \left( x - v_1 t + \frac{1}{\kappa_1} \ln \frac{k}{2\alpha_1(\nu_1)} \right) + y_1^{(0)}.$$

С другой стороны, при  $\xi = (v_2 - v_1)t$  в пределе  $t \rightarrow -\infty$ , имеем

$$y_2 = \text{const}, \quad y_1 \rightarrow -\infty.$$

Отсюда находим:

$$S_3 \cong -\text{th } \tilde{y}_2, \quad S_1 - iS_2 = \frac{\varepsilon (\text{cnu}_2 - i \text{sn} u_2)}{\text{ch } \tilde{y}_2},$$

$$\tilde{y}_2 = \kappa_2 \left( x - v_2 t - \frac{1}{\kappa_2} \ln \frac{k}{2\alpha_1(\nu_1)} \right) + y_2^{(0)}.$$

Таким образом, в пределе  $t \rightarrow -\infty$  решение (5.2.49) содержит две хорошо разделенные доменные границы. Поскольку  $v_2 > v_1$ , вторая доменная граница находится слева от первой.

Рассмотрим теперь предел конечного  $\xi$  и  $t \rightarrow +\infty$ . При этом  $y_1 = \text{const}$ ,  $y_2 \rightarrow -\infty$  и

$$S_3 \cong -\text{th } \bar{y}_1, \quad S_1 - iS_2 = -\frac{\varepsilon (\text{cnu}_1 - i \text{sn} u_1)}{\text{ch } \bar{y}_1},$$

$$\bar{y}_1 = \kappa_1 \left( x - v_1 t - \frac{1}{\kappa_1} \ln \frac{k}{2\alpha_1(\nu_1)} \right) + y_1^{(0)}.$$

Если положить  $\xi = (v_2 - v_1)t$  и перейти к пределу  $t \rightarrow +\infty$ , то  $y_2 = \text{const}$ ,  $y_1 \rightarrow +\infty$ . Отсюда

$$S_3 \cong \text{th } \bar{y}_2, \quad S_1 - iS_2 \cong \frac{\varepsilon (\text{cnu}_2 + i \text{sn} u_2)}{\text{ch } \bar{y}_2},$$

$$\bar{y}_2 = \kappa_2 \left( x - v_2 t + \frac{1}{\kappa_2} \ln \frac{k}{2\alpha_1(\nu_1)} \right) + y_2^{(0)}.$$

Иными словами, при  $t \rightarrow +\infty$  вторая доменная граница оказывается справа от первой.

Мы убедились, что решение (5.2.49) демонстрирует структурную устойчивость доменных стенок при их взаимодействии друг с другом. Если следить только за асимптотиками решения, а не интересоваться самим моментом столкновения, то можно считать, что доменные стенки проходят друг через друга. При этом у каждой доменной границы скорость и ширина сохраняются, а изменяются лишь хиральности границ, знаки азимутальных углов вектора намагниченности и фаза движения каждой доменной границы. Такой процесс можно интерпретировать как упругое взаимодействие.

При  $u_1 = s$ ,  $u_2 = 2K - s$  скорости доменных стенок равны по величине и противоположно направлены. При определенном выборе параметров  $y_{1,2}^{(0)}$  в предельных переходах  $s \rightarrow K$  и  $s \rightarrow 0$  решение (5.2.49) сводится к выражениям (5.2.38) и (5.2.40), которые описывают рассеяние (или распад) двух слабо связанных доменных границ.

Как и ранее, построение  $N$ -солитонных решений модели ферромагнетика с двухосной анизотропией можно осуществить двумя способами.

Первый способ представляет обобщение изложенной процедуры и основан на разложении матричной функции задачи Римана по  $4N$  линейно независимым дзета-функциям Вейерштрасса. Подробно этот способ будет изложен в гл. 7.

Второй способ состоит в рекуррентном построении мультисолитонов:  $N$ -солитонное решение строится путем «одевания» уже имеющегося  $N-1$ -солитонного решения с использованием приведенных в этом разделе функций задачи Римана с нулями.

### **5.3. Солитонные решения модели двухосного ферромагнетика с асимптотиками $S \rightarrow (0, 0, \pm 1)$ при $x \rightarrow \pm\infty$**

*Когда мы хорошо понимаем вопрос, нужно освободить его от излишних представлений, свести его к простейшим элементам.*

*Р. Декарт*

Перейдем к процедуре интегрирования уравнений двухосного ферромагнетика с асимптотическими условиями (5.2.2), где  $\varepsilon = -1$ .

В этом случае фундаментальные решения  $\Phi_{\pm}(\lambda)$  системы (5.2.3), аналитические в областях  $D_{\pm}$ , имеют другой вид:

$$\Phi_{-}(\lambda) = (\varphi_{+}^{(1)}(\lambda), \varphi_{-}^{(1)}(\lambda)), \quad \Phi_{+}(\lambda) = (\varphi_{-}^{(2)}(\lambda), \varphi_{+}^{(2)}(\lambda)).$$



В областях своей аналитичности матричные функции  $\Phi_{\pm}(\lambda)$  удовлетворяют ограничениям:

$$\Phi_{\mp}(\lambda + 2K) = \pm \sigma_3 \Phi_{\mp}(\lambda), \quad \Phi_{\mp}^*[(\lambda - 2iK')^*] = \pm \sigma_3 \Phi_{\mp}(\lambda),$$

а на контуре  $\Gamma$  имеем

$$\Phi_{\mp}^*(\lambda^*) = \pm \sigma_2 \Phi_{\pm}(\lambda) \sigma_1. \quad (5.3.1)$$

Отметим, что с точностью до обозначений многие алгебраические соотношения данной задачи формально совпадают с теми, что были для ферромагнетика с анизотропией типа «легкая ось». Так, на контуре  $\Gamma$  все фундаментальные решения связаны между собой формулами (3.6.7). Отсюда следуют равенства

$$b(\lambda) = \det \Phi_{-}(\lambda), \quad b^*(\lambda^*) = -\det \Phi_{+}(\lambda),$$

которые показывают, что с контура  $\Gamma$  коэффициенты  $b(\lambda)$  и  $b^*(\lambda^*)$  могут быть аналитически продолжены в области  $D_{-}$  и  $D_{+}$  соответственно.

В областях своей аналитичности функции  $b(\lambda)$  и  $b^*(\lambda^*)$  могут иметь конечное число нулей. Нули коэффициента  $b^*(\lambda^*)$  комплексно сопряжены по отношению к нулям функции  $b(\lambda)$ . В силу редукций (5.2.6) нули функции  $b(\lambda)$  образуют два множества:

$$u_j + iK', \quad u_j + iK' + 2K, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad (5.3.2)$$

$$u_s + iK' \pm i\theta_s, \quad u_s + iK' \pm i\theta_s + 2K, \quad s = 1, 2, \dots, m, \quad (5.3.3)$$

где  $0 < u_j < 2K$ ,  $0 < \theta_s < K'$ .

Как уже отмечалось ранее, каждая группа из двух нулей вида (5.3.2) задает одну доменную границу. В рассматриваемой задаче доменные границы присутствуют всегда, причем их общее число должно быть нечетным:  $n = 2r - 1$ ,  $r = 1, 2, \dots$ . В противном случае невозможно удовлетворить асимптотическим условиям:  $\mathbf{S} \rightarrow (0, 0, \pm 1)$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Каждая группа из четырех нулей вида (5.3.3) описывает отдельный бризер. Как мы видели, бризеры локализованы и не изменяют распределения намагниченности на бесконечности. Поэтому в данной задаче нули (5.3.3), а с ними и бризеры, могут отсутствовать. Далее с помощью дисперсионных соотношений эти качественные соображения будут обоснованы.

Связь функций Йоста (5.2.4) эквивалентна условию сопряжения аналитических функций  $\Phi_{\pm}(\lambda)$  на контуре  $\Gamma$ :

$$\Phi_{-}(\lambda) = -\frac{1}{b^*(\lambda^*)} \Phi_{+}(\lambda) \sigma_3 \begin{pmatrix} 1 & a(\lambda) \\ a^*(\lambda^*) & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.3.4)$$

Солитонные решения модели теперь определяются другим условием:

$$a(\lambda) = a^*(\lambda^*) \equiv 0.$$

В солитонном секторе, используя редукцию (5.3.1), перепишем равенство (5.3.4) в терминах одной лишь матричной функции  $\Phi_-(\lambda)$ :

$$\Phi_-^\dagger(\lambda^*) \Phi_-(\lambda) = I.$$

Выделим из матричной функции  $\Phi_-(\lambda)$  «затравочное» решение  $\chi_2^{(0)}(\lambda)$  (эта операция не противоречит соотношениям (3.6.7):

$$\Phi_-(\lambda) = \Psi_-(\lambda) \chi_2^{(0)}(\lambda).$$

Здесь функция  $\Psi_-(\lambda)$  — двоякопериодическая функция, мероморфная в фундаментальном прямоугольнике  $D_- \cup D_+$ . Она имеет нули в точках (5.3.2), (5.3.3) и полюсы в комплексно сопряженных точках.

Перепишем задачу Римана с нулями в терминах новой функции  $\Psi_-(\lambda)$ :

$$\Psi_-^\dagger(\lambda^*) \Psi_-(\lambda) = \Psi_-(\lambda) \Psi_-^\dagger(\lambda^*) = I, \quad \lambda \in \Gamma; \quad (5.3.5)$$

$$\Psi_-(\lambda + 2K) = \sigma_3 \Psi_-(\lambda), \quad \Psi_-^*[(\lambda - 2iK')^*] = \sigma_3 \Psi_-(\lambda). \quad (5.3.6)$$

Особый интерес представляет решение задачи (5.3.5), отвечающее доменной границе при отсутствии бризеров. Будем искать матричную функцию  $\Psi_-^\dagger(\lambda^*)$  такого решения в виде разложения по дзета-функциям Вейерштрасса:

$$\Psi_-^\dagger(\lambda^*) = A_0 + A\zeta(\lambda - \mu_1) + B\zeta(\lambda - \mu_2),$$

где

$$\mu_1 = u_1 + iK', \quad \mu_2 = \mu_1 + 2K$$

и периоды функций Вейерштрасса —  $4K$ ,  $4iK'$ .

Как и ранее, редукции (5.3.6) достаточно «жестко» фиксируют алгебраическую структуру матричной функции  $\Psi_-^\dagger(\lambda^*)$ :

$$\Psi_-^\dagger(\lambda^*) = \begin{pmatrix} s_1 & i c_1 \alpha(\lambda) \\ s_2 & i c_2 \alpha(\lambda) \end{pmatrix},$$

где

$$\alpha(\lambda) = \zeta(\lambda - \mu_1) - \zeta(\lambda - \mu_2) - \eta_1 = \frac{k}{2} [\operatorname{sn}(\lambda - u_1) + i \operatorname{cn}(\lambda - u_1)],$$

$s_{1,2}$ ,  $c_{1,2}$  — вещественные параметры.

При учете тождества

$$\alpha(\lambda) \alpha^*(\lambda^*) = \frac{k^2}{4}$$

условие (5.3.5) сводится к уравнениям

$$s_1^2 + s_2^2 = 1, \quad c_1^2 + c_2^2 = 4/k^2, \quad s_1 c_1 + s_2 c_2 = 0,$$

которые допускают параметризацию:

$$s_1 = \cos \varphi, \quad s_2 = \sin \varphi, \quad c_1 = \frac{2}{k} \sin \psi, \quad c_2 = \frac{2}{k} \cos \psi, \quad \psi = -\varphi + \pi n,$$

где  $n$  — целое число.

Таким образом, интересующее нас решение задачи Римана (5.3.5), (5.3.6) имеет вид

$$\Psi_-^\dagger(\lambda^*) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -2ik^{-1}\alpha(\lambda) \sin \varphi \\ \sin \varphi & 2ik^{-1}\alpha(\lambda) \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad (5.3.7)$$

где  $\varepsilon = \pm 1$ . Отсюда получаем выражение для коэффициента  $b(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} b(\lambda) = \det \Psi_-(\lambda) &= \left[ \det \Psi_-^\dagger(\lambda^*) \right]^{-1} = \frac{k}{2i\alpha(\lambda)} \equiv \\ &\equiv -\varepsilon [\operatorname{cn}(u - u_1) + i \operatorname{sn}(u - u_1)]. \end{aligned}$$

Требование отсутствия лишних полюсов в «одевающих» формулах (5.2.29) в точках  $\lambda = \mu_{1,2}$ ,  $\mu_{1,2}^*$  приводит к дифференциальным уравнениям, определяющим  $\varphi$ :

$$\partial_x \varphi = -i w_3(\mu_1) \sin 2\varphi, \quad \partial_t \varphi = 2i w_1(\mu_1) w_2(\mu_1) \sin 2\varphi,$$

которые имеют тривиальное решение:

$$\operatorname{tg} \varphi = \exp(-y), \quad y = 2\rho x \operatorname{dn} u_1 - (2\rho k)^2 t \operatorname{sn} u_1 \operatorname{cn} u_1 + y_0. \quad (5.3.8)$$

Здесь  $y_0$  — вещественная постоянная.

Солитонное решение, полученное с помощью формул (5.2.15), (5.3.7), (5.3.8), как и ожидалось, описывает доменную границу:

$$S_3 = \operatorname{th} y, \quad S_1 - iS_2 = \varepsilon \frac{\operatorname{cn} u_1 + i \operatorname{sn} u_1}{\operatorname{ch} y}. \quad (5.3.9)$$

Ширина доменной границы порядка  $\kappa^{-1}$ , где  $\kappa = 2\rho \operatorname{dn} u_1$ , а ее скорость  $v$  есть

$$v = 2\rho k^2 \frac{\operatorname{sn} u_1 \operatorname{cn} u_1}{\operatorname{dn} u_1} \quad (0 < u_1 < 2K).$$

Рассмотренная задача еще раз показывает, что для построения солитонных решений интегрируемых моделей с разными асимптотиками на пространственной бесконечности требуются матричные функции задачи Римана, которые не всегда выражаются через проекционные матрицы. В конкретизации алгебраической структуры матричных функций задачи Римана решающая роль принадлежит их аналитическим свойствам и редукциям. Редукции специфичны для каждой модели.

## 5.4. Регулярная задача Римана на торе

*Господа, для гауссовой строгости  
у нас нет времени.*

*К. Якоби*

В двухосном ферромагнетике слабонелинейные диспергирующие волны с асимптотическим поведением на бесконечности:

$$\mathbf{S} \rightarrow (0, 0, 1) \quad \text{при} \quad x \rightarrow \pm\infty,$$

можно теоретически описать с помощью регулярной задачи Римана на торе. Такая задача определяется формулами (5.2.9), (5.2.10), в которых коэффициенты  $a(\lambda)$  и  $a^*(\lambda^*)$  не имеют нулей в областях своей аналитичности.

Свяжем решение регулярной задачи Римана с системой сингулярных интегральных уравнений. Для этого используем интеграл Коши на торе, ядро которого имеет вид [4–6]

$$M(\mu, \lambda) = \zeta(\mu - \lambda) - \zeta(\mu - a) + \zeta(\lambda - b) - \zeta(a - b),$$

где  $a, b$  — произвольные точки на торе, не лежащие на контуре  $\Gamma$ , дзета-функции Вейерштрасса имеют периоды  $4K, 4iK'$ . Дифференциальная форма  $M(\mu, \lambda) d\mu$  имеет полюсы первого порядка в точках  $\mu = \lambda$  и  $\mu = a$  с вычетами  $\pm 1$ . Ядро  $M(\mu, \lambda)$  представляет двоякопериодическую функцию по обоим переменным  $\mu$  и  $\lambda$  с периодами  $4K, 4iK'$ , которая имеет полюсы первого порядка в точках  $\lambda = \mu, \lambda = b$  с вычетами  $\mp 1$  и равна нулю при любых  $\mu$  в точке  $\lambda = a$ .

Интеграл типа Коши:

$$F(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \varphi(\mu) M(\mu, \lambda) d\mu,$$

где  $C$  — замкнутый контур на торе, является двоякопериодической кусочно-аналитической функцией, которая обращается в нуль в точке  $\lambda = a$ . Функция  $F(\lambda)$  имеет полюс первого порядка в точке  $\lambda = b$  с вычетом

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \varphi(\mu) d\mu. \quad (5.4.1)$$

Если  $\varphi(\mu)$  — граничное значение функции, аналитической в области, ограниченной контуром  $C$ , то полюс в точке  $\lambda = b$  отсутствует, так как главная часть (5.4.1) обращается в нуль.

В нашем случае функция

$$\Phi(\lambda) = \begin{cases} \Psi_-(\lambda) & \text{при } \lambda \in D_- \\ \Psi_+(\lambda) & \text{при } \lambda \in D_+ \end{cases}$$

будет кусочно-аналитической на торе. Пусть в точке  $a$  она принимает значение  $\Phi_0$ . Выберем контур  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ , где  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — контуры, ограничивающие области  $D_-$  и  $D_+$  соответственно (рис. 5.2). Используем положительные направления обхода так, что при обходе контура  $\gamma_1$  ( $\gamma_2$ ) область  $D_-$  ( $D_+$ ) остается слева от контура. Тогда, применяя теорему Коши, получаем

$$\Phi(\lambda) = \Phi_0 + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \Phi(\mu) M(\mu, \lambda) d\mu. \quad (5.4.2)$$

Участки контура  $\gamma$ , на которых  $\operatorname{Re} \mu = \pm 2K$ , при интегрировании проходятся в противоположных направлениях, а подынтегральная функция принимает на них одинаковые значения. Поэтому в формуле (5.4.2) остается интегрирование лишь вдоль контура  $\Gamma$ . Выразим интеграл (5.4.2) в терминах скачков функции  $\Phi(\lambda)$  на контуре  $\Gamma$ :

$$\Phi(\lambda) = \Phi_0 + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} [\Psi_-(\mu) - \Psi_+(\mu)] M(\mu, \lambda) d\mu.$$

С помощью (5.2.9) преобразуем результат:

$$\Phi(\lambda) = \Phi_0 + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Psi_+(\mu) [G(\mu) - I] M(\mu, \lambda) d\mu. \quad (5.4.3)$$

Пусть  $\lambda$  стремится к точке  $\nu \in \Gamma$  из области  $D_+$ , тогда, в силу формул Сохоцкого–Племеля соотношение (5.4.3) дает сингулярное интегральное уравнение для расчета  $\Psi_+(\nu)$ :

$$\frac{1}{2} \Psi_+(\nu) [G(\nu) + I] = \Phi_0 + \frac{1}{2\pi i} \text{V. p.} \int_{\Gamma} \Psi_+(\mu) [G(\mu) - I] M(\mu, \lambda) d\mu. \quad (5.4.4)$$

Буквы *V. p.* перед интегралом означают, что он вычисляется в смысле главного значения Коши. Используя редукции (5.2.6), (5.2.10), интегрирование по контуру  $\Gamma$  в уравнении (5.4.4) можно свести к интегрированию по отрезку  $[0, 2K]$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Psi_+(\nu) [G(\nu) + I] = \Phi_0 + \frac{1}{2\pi i} \text{V. p.} \int_0^{2K} [\rho(\mu) M(\mu, \nu) + \\ + \sigma_3 \rho(\mu) \sigma_3 M(\mu - 2K, \nu) - \sigma_3 \rho^*(\mu) \sigma_3 M(\mu + 2iK', \nu) - \\ - \rho^*(\mu) M(\mu - 2K + 2iK', \nu)] d\mu, \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

где  $\rho(\mu) = \Psi_+(\mu) [G(\mu) - I]$ . Достаточно найти решение уравнений (5.4.5) на интервале  $0 < \nu < 2K$ . На остальных участках контура  $\Gamma$  оно восстанавливается с помощью редукций (5.2.10). По известным значениям функции  $\Psi_+(\nu)$  на контуре  $\Gamma$  формула Коши (5.4.3) дает значения функций  $\Psi_{\pm}(\nu)$  в областях  $D_{\pm}$ .

Покажем, что в данной задаче можно обойти трудность выбора точки нормировки  $\lambda = a$  и вычисления величины  $\Phi(a) = \Phi_0$ . С этой целью заметим, что  $\Phi(\lambda)$  является аналитической функцией в области  $D_+ \cup D_-$  и непрерывной там вплоть до границы  $\gamma$ . Поэтому по теореме Коши

$$\oint_{\gamma} \Phi(\mu) d\mu = \int_0^{2K} [\rho(\mu) + \sigma_3 \rho(\mu) \sigma_3 - \sigma_3 \rho^*(\mu) \sigma_3 - \rho^*(\mu)] d\mu = 0.$$

Здесь контурный интеграл преобразован с учетом свойств периодичности  $\Phi(\lambda)$ , редукций (5.2.10) и выражен через скачки  $\rho(\mu) = \Psi_+(\mu)[G(\mu) - I]$  функции  $\Phi(\lambda)$  на  $\Gamma$ . Отсюда следуют два простых тождества:

$$\int_0^{2K} [\rho_{ss}(\mu) - \rho_{ss}^*(\mu)] d\mu = 0 \quad (s = 1, 2), \quad (5.4.6)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_{11}(\mu) &= -[\Psi_+(\mu, x, t)]_{12} b(\mu, x, t), \\ \rho_{22}(\mu) &= -[\Psi_+(\mu, x, t)]_{21} b^*(\mu^*, x, t). \end{aligned}$$

В правой части представления (5.4.3) иначе сгруппируем слагаемые и, воспользовавшись редукциями (5.2.10), перепишем его в виде

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) = F_0 + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2K} & \left( \rho_{11}(\mu) \varphi(\mu - \lambda) - \rho_{11}^*(\mu) \varphi(\mu - \lambda + 2iK') \right. \\ & \left. \rho_{12}(\mu) \alpha(\mu - \lambda) + \rho_{12}^*(\mu) \alpha(\mu - \lambda + 2iK') \right. \\ & \left. \rho_{22}(\mu) \varphi(\mu - \lambda) - \rho_{22}^*(\mu) \varphi(\mu - \lambda + 2iK') \right) d\mu, \end{aligned} \quad (5.4.7)$$

где матрица  $F_0$  не зависит от спектрального параметра  $\lambda$ ,

$$\begin{aligned} \rho_{21}(\mu) &= -[\Psi_+(\mu, x, t)]_{22} b(\mu, x, t), \\ \rho_{12}(\mu) &= -[\Psi_+(\mu, x, t)]_{11} b^*(\mu^*, x, t). \end{aligned}$$

Функции

$$\alpha(\lambda) = \zeta(\lambda) - \zeta(\lambda - 2K) - \eta_1 = \frac{1 + \operatorname{dn} \lambda}{2 \operatorname{sn} \lambda}; \quad \varphi(\lambda) = \zeta(\lambda) + \zeta(\lambda - 2K)$$

обладают трансформационными свойствами

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda \pm 2K) &= -\alpha(\lambda), \quad \alpha^*[(\lambda \pm 2iK')^*] = \alpha(\lambda + 2iK'), \\ \alpha^*[(\lambda \pm 2iK')^* + 2iK'] &= \alpha(\lambda); \\ \varphi[(\lambda \pm 2K)] &= \varphi(\lambda) \pm 2\eta_1, \\ \varphi^*[(\lambda \pm 2iK')^*] &= \varphi(\lambda + 2iK') - 2\eta_3 \pm 2\eta_3, \\ \varphi^*[(\lambda \pm 2iK')^* + 2iK'] &= \varphi(\lambda) - 2\eta_3 \pm 2\eta_3. \end{aligned} \quad (5.4.8)$$

Первые две из редукций (5.2.10) и формулы (5.4.6), (5.4.8) приводят к заключению, что в представлении (5.4.7) матрица  $F_0$  является вещественной и диагональной:

$$F_0 = \text{diag} (f_1, f_2) .$$

Это упрощает вычисления.

Удобно ввести новые матричные функции  $\tilde{\Psi}_{\pm}$ :

$$\Psi_{\pm}(\mu, x, t) = F_0(x, t) \tilde{\Psi}_{\pm}(\mu, x, t).$$

Тогда из (5.4.7) получим замкнутое уравнение для расчета  $\tilde{\Psi}_{+}$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \tilde{\Psi}_{+}(\nu) [G(\nu) + I] = I + \\ + \frac{1}{2\pi i} \text{V. p.} \int_0^{2K} \left( \tilde{\rho}_{11}(\mu) \varphi(\mu - \nu) - \tilde{\rho}_{11}^*(\mu) \varphi(\mu - \nu + 2iK') \right. \\ \left. \tilde{\rho}_{12}(\mu) \alpha(\mu - \nu) + \tilde{\rho}_{12}^*(\mu) \alpha(\mu - \nu + 2iK') \right. \\ \left. \tilde{\rho}_{22}(\mu) \varphi(\mu - \nu) - \tilde{\rho}_{22}^*(\mu) \varphi(\mu - \nu + 2iK') \right) d\mu, \end{aligned}$$

где

$$\tilde{\rho}(\mu) = \tilde{\Psi}_{+}(\mu) [G(\mu) - I].$$

Величина  $F_0^2 = \text{diag} (f_1^2, f_2^2)$  выражается через  $\tilde{\Psi}_{+}$  из соотношения (5.2.14):

$$F_0^{-2} = \tilde{\Psi}_{+}(\lambda = 0) \tilde{\Psi}_{+}^{\dagger}(\lambda = 0). \quad (5.4.9)$$

После чего из (5.2.15) восстанавливаем решение модели Ландау–Лифшица

$$S_k \sigma_k = F_0 \tilde{\Psi}_{+}(\lambda = 0) \sigma_3 \tilde{\Psi}_{+}^{\dagger}(\lambda = 0) F_0,$$

которое описывает спиновые волны с преобладанием эффектов дисперсии над эффектами нелинейности. Здесь мы учли, что согласно (5.2.11), (5.2.13),  $\Psi_{-}(\lambda = 0) = \Psi_{+}(\lambda = 0)$ .

Уравнение (5.4.9) определяет матрицу  $F_0$  с точностью до множителя  $N = \text{diag} (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ , где  $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1$ . Однако это несущественно, так как после преобразований

$$S_3 \rightarrow S_3, \quad S_1 \rightarrow -S_1, \quad S_2 \rightarrow -S_2$$

решения модели Ландау–Лифшица (3.1.14) переходят в решения с теми же граничными условиями (5.2.2) на бесконечности.

Важно, что любое решение модели двухосного ферромагнетика с асимптотиками (5.2.2) можно построить методом рекуррентного «одевания» элементарных решений с помощью рассмотренных нами задач Римана с нулями и регулярной задачи Римана на торе.

## 5.5. Интегралы движения и спектр нелинейных возбуждений

*Без полезного нет и приятного.*

*Немецкая пословица*

Напомним, что в модели двухосного ферромагнетика с асимптотическими условиями (5.2.2) при  $\varepsilon = 1$  коэффициент матрицы перехода

$$a(\lambda) = \det(\varphi_-^{(1)}(\lambda), \varphi_+^{(2)}(\lambda)) \quad (5.5.1)$$

не зависит от времени, а при условиях (5.2.2) с  $\varepsilon = -1$  от времени не зависит коэффициент

$$b(\lambda) = \det(\varphi_+^{(1)}(\lambda), \varphi_-^{(1)}(\lambda)).$$

Отсюда следует, что  $a(\lambda)$  и  $b(\lambda)$  могут быть использованы в качестве производящих функций интегралов движения.

Покажем, что физически содержательные законы сохранения получаются при разложении функций  $\ln a(\lambda)$  или  $\ln b(\lambda)$  в асимптотические ряды по степеням  $\lambda$ . Для этого необходимо найти разложения решений Йоста  $\varphi_{\pm}(\lambda)$  по степеням  $\lambda$ .

Представим функцию Йоста  $\varphi_-(\lambda)$  в виде

$$\varphi_-(\lambda) = (I + \Phi) \exp[-i\sigma_3 \varepsilon (w_3 x - 2w_1 w_2 t) + Z], \quad \varepsilon = \pm 1, \quad (5.5.2)$$

где  $\Phi$  — антидиагональная, а  $Z$  — диагональная матричные функции от переменных  $\lambda, x, t$ , такие что

$$\Phi, Z \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow -\infty.$$

После подстановки представления (5.5.2) в первое уравнение (5.2.3) получаем

$$\begin{aligned} \partial_x \Phi + \Phi(-i\varepsilon w_3 \sigma_3 + \partial_x Z) &= -i(w_1 S_1 \sigma_1 + w_2 S_2 \sigma_2) - i w_3 \sigma_3 S_3 \Phi, \\ -i\varepsilon \sigma_3 w_3 + \partial_x Z &= -i w_3 S_3 \sigma_3 - i(w_1 S_1 \sigma_1 + w_2 S_2 \sigma_2) \Phi. \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

Разложим функции  $w_{\alpha}(\lambda)$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) в ряды по степеням  $\lambda$ :

$$w_{\alpha}(\lambda) = \sum_{k=-1}^{\infty} w_{\alpha}^{(k)} \lambda^k.$$

Первые слагаемые разложений одинаковы:  $w_{\alpha}^{(-1)} = \rho$ ,  $w_{\alpha}^{(0)} = 0$ . Будем искать решение уравнений (5.5.3) в виде рядов по степеням  $\lambda$ :

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n \lambda^n, \quad Z = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n \lambda^n.$$



Получим цепочку рекуррентных соотношений для расчета матричных функций  $\Phi_n$ ,  $Z_n$ :

$$\begin{aligned} \partial_x \Phi_n - i \sum_{m=0}^{n+1} w_3^{(n-m)} (\varepsilon \Phi_m \sigma_3 - S_3 \sigma_3 \Phi_m) - i (S_3 - \varepsilon) \sum_{m=0}^n w_3^{(m)} \Phi_{n-m} \sigma_3 - \\ - i \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^{n+1} \Phi_{n-m} \left( w_1^{(m-k)} S_1 \sigma_1 + w_2^{(m-k)} S_2 \sigma_2 \right) \Phi_k + \\ + i \left( w_1^{(n)} S_1 \sigma_1 + w_2^{(n)} S_2 \sigma_2 \right) \Phi_n = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_n = -i w_3^{(n)} \int_{-\infty}^x \sigma_3 [S_3(x') - \varepsilon] dx' - \\ - i \int_{-\infty}^x \sum_{m=0}^{n+1} \left[ w_1^{(n-m)} S_1(x') \sigma_1 + w_2^{(n-m)} S_2(x') \sigma_2 \right] \Phi_m(x') dx', \end{aligned}$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,

$$\Phi_0 = \frac{i(S_2 \sigma_1 - S_1 \sigma_2)}{\varepsilon + S_3}.$$

Асимптотическое разложение по степеням  $\lambda$  функции Йоста  $\varphi_+(\lambda)$  получается из разложения функции  $\varphi_-(\lambda)$  после формальной замены

$$\varepsilon \rightarrow 1, \quad \int_{-\infty}^x \rightarrow \int_{+\infty}^x.$$

С помощью рядов для решений Йоста и соотношения (5.5.1) находим разложение функции  $\ln a(\lambda)$  в ряд по степеням  $\lambda$ :

$$\ln a(\lambda) = -\frac{i}{2} P_1 - \frac{i}{4\rho} H \lambda + \dots \quad (5.5.4)$$

Первые два слагаемых (5.5.4) представляют полевой импульс  $P_1$  и энергию  $H$  ферромагнетика при граничных условиях (5.2.2) с  $\varepsilon = 1$ :

$$P_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_1 \partial_x S_2 - S_2 \partial_x S_1}{1 + S_3} dx, \quad (5.5.5)$$

$$H = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2} (\partial_x \mathbf{S})^2 + 2\rho^2 (1 - S_3^2 - k^2 S_2^2) \right] dx.$$

Аналогичный расчет при граничных условиях (5.2.2) с  $\varepsilon = -1$  дает

$$\ln b(\lambda) = \frac{i}{2} P_2 + \frac{i}{4\rho} H \lambda + \dots \quad (5.5.6)$$

Отличие формул (5.5.4) и (5.5.6) не только в знаках перед слагаемыми, но и в другой форме записи импульса системы:

$$P_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x S_3 \operatorname{arctg} \frac{S_2}{S_1} dx. \quad (5.5.7)$$

В научной литературе [26–28] полный импульс ферромагнетика обычно вычисляют, используя формулу (5.5.5). Легко видеть, что подынтегральные выражения в соотношениях (5.5.5) и (5.5.7) отличаются на полную производную. Поэтому для состояний ферромагнетика с граничными условиями (5.2.2) при  $\varepsilon = 1$  формулы (5.5.5) и (5.5.7) эквивалентны. Однако для граничных условий типа доменной стенки при  $\varepsilon = -1$  выражения (5.5.5) и (5.5.7) различаются ненулевым слагаемым. С целью выбрать верное из них, вычислим импульс движущейся доменной стенки (5.3.9). Формула (5.5.5) дает значение  $P_1 = 0$ , а формула (5.5.7) приводит к  $P_2 = -2 \operatorname{arctg}(\operatorname{sn} u_1 / \operatorname{cn} u_1)$ . Это позволяет отдать предпочтение формуле (5.5.7) при расчете полного импульса ферромагнетика с разными равновесными значениями намагниченности на пространственной бесконечности [29].

Обратимся теперь к исследованию спектра нелинейных возбуждений двухосного ферромагнетика. Для нахождения спектра возбуждений необходимо получить дисперсионные соотношения на торе. Для состояний ферромагнетика с однородной асимптотикой намагниченности на бесконечности ( $\varepsilon = 1$ ) эта задача решена в [29] без детального анализа задачи рассеяния. С помощью свойств симметрии построена функция  $a(\lambda)$  и найдена связь коэффициентов разложения функции  $\ln a(\lambda)$  с интегралами движения. Покажем, что для случаев  $\varepsilon = 1$  или  $\varepsilon = -1$  возможен прямой вывод дисперсионных соотношений для коэффициентов  $a(\lambda)$  или  $b(\lambda)$  без использования ядра Коши на торе. Эти соотношения находятся применением обычной теоремы Коши к областям  $D_+$  или  $D_-$  с привлечением функции  $w_3(\lambda)\rho^{-1} = \operatorname{cs}(\lambda, k)$ , которая определяет существенные особенности «затравочных» решений  $\chi_{1,2}^{(0)}$ . Для дальнейшего анализа будет полезно разложение функции  $\operatorname{cs}(\lambda) \equiv \operatorname{cn}\lambda / \operatorname{sn}\lambda$  по дзета-функциям Вейерштрасса:

$$\frac{\operatorname{cn}\lambda}{\operatorname{sn}\lambda} = \zeta(\lambda) + \zeta(\lambda - 2K) - \zeta(\lambda - 2iK') - \\ - \zeta(\lambda - 2K - 2iK') - 2\eta_3, \quad (5.5.8)$$

где периоды функций Вейерштрасса  $-4K, 4iK$ .

Обсудим сначала состояния с одинаковыми равновесными значениями намагниченности на бесконечности ( $\varepsilon = 1$ ). В этом случае функция  $a(\lambda)$  является аналитической в области  $D_+$ , в то время как  $b(\lambda)$ , вообще говоря, не имеет каких-либо свойств аналитичности. Используем полученные ранее результаты для типичных солитонов (см. формулы

(5.2.28) и (5.2.48)) и выделим из функции  $a(\lambda)$  ее солитонную часть, которая связана с нулями коэффициента  $a(\lambda)$ :

$$a(\lambda) = \sigma \prod_{j=1}^m \frac{\operatorname{cn}(\lambda - v) - i \operatorname{sn}(\lambda - v)}{\operatorname{cn}(\lambda - v^*) + i \operatorname{sn}(\lambda - v^*)} \Big|_{v=u_j + i\theta_j} \times \\ \times \prod_{s=1}^n [\operatorname{cn}(\lambda - u_s) - i \operatorname{sn}(\lambda - u_s)] \tilde{a}(\lambda). \quad (5.5.9)$$

Здесь  $\sigma = \pm 1$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Множитель  $\tilde{a}(\lambda)$  не имеет нулей в области  $D_+$ . Поэтому функция  $\ln \tilde{a}(\lambda)$  будет аналитической в области  $D_+$ . Если в формуле (5.5.9) число  $n$  четно, то коэффициент  $\tilde{a}(\lambda)$  удовлетворяет тем же редукциям, что и  $a(\lambda)$ :

$$\tilde{a}(\lambda + 2K) = \tilde{a}(\lambda), \quad \tilde{a}(\lambda - 2iK') = \tilde{a}^*(\lambda^*). \quad (5.5.10)$$

Подчеркнем, что только при значениях  $n = 2r$ ,  $r = 0, 1, 2, \dots$  факторизация (5.5.9) приводит к верным дисперсионным соотношениям, которые согласуются со свойствами аналитичности и симметрии функции  $a(\lambda)$ .

Рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{4\pi i} \int_{\gamma_2} \ln \tilde{a}(\lambda') \frac{\operatorname{cn}(\lambda' - \lambda)}{\operatorname{sn}(\lambda' - \lambda)} d\lambda', \quad (5.5.11)$$

где контур  $\gamma_2$  ограничивает область  $D_+$ . Как и ранее, мы используем положительное направление обхода контура  $\gamma_2$  (см. рис. 5.2). При  $\lambda \in D_+$  подынтегральное выражение (5.5.11) представляет граничное значение функции, аналитической внутри контура  $\gamma_2$  всюду, за исключением простых полюсов в точках  $\lambda$  и  $\lambda + 2K$  (см. разложение (5.5.8)). Согласно редукциям (5.5.10), вычеты  $\ln \tilde{a}(\lambda)$  и  $\ln \tilde{a}(\lambda + 2K)$  в этих полюсах совпадают. Отсюда на основании теоремы Коши заключаем, что

$$\frac{1}{4\pi i} \int_{\gamma_2} \ln \tilde{a}(\lambda') \frac{\operatorname{cn}(\lambda' - \lambda)}{\operatorname{sn}(\lambda' - \lambda)} d\lambda' = \ln \tilde{a}(\lambda).$$

Свойства симметрии (5.5.10) позволяют свести интегрирование по контуру  $\gamma_2$  к интегрированию по отрезку  $[0, 2K]$ :

$$\ln \tilde{a}(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2K} \ln |\tilde{a}(\lambda')|^2 \frac{\operatorname{cn}(\lambda' - \lambda)}{\operatorname{sn}(\lambda' - \lambda)} d\lambda'. \quad (5.5.12)$$

Положим в формуле (5.5.12)  $\lambda = \nu - i\varepsilon$ , где  $0 < \nu < 2K$ ,  $\varepsilon > 0$ , и перейдем к пределу  $\varepsilon \rightarrow +0$ . Учитывая соотношение Сохоцкого–Племеля

$$\int_0^{2K} \ln |\tilde{a}(\lambda')|^2 \frac{\operatorname{cn}(\lambda' - \nu + i0)}{\operatorname{sn}(\lambda' - \nu + i0)} d\lambda' = -\pi i \ln |\tilde{a}(\lambda)|^2 + \\ + \text{V. p.} \int_0^{2K} \ln |\tilde{a}(\lambda')|^2 \frac{\operatorname{cn}(\lambda' - \nu)}{\operatorname{sn}(\lambda' - \nu)} d\lambda',$$

находим:

$$i \arg [\ln \tilde{a}(\lambda)] = -\frac{1}{2\pi i} \text{V. p.} \int_0^{2K} \ln |\tilde{a}(\lambda')|^2 \frac{\operatorname{cn}(\lambda' - \nu)}{\operatorname{sn}(\lambda' - \nu)} d\lambda'.$$

Повторное использование формулы Племеля позволяет восстановить значения функции  $\ln \tilde{a}(\lambda)$  по ее модулю:

$$\ln \tilde{a}(\lambda - i0) \equiv \ln |\tilde{a}(\lambda)| + i \arg \ln \tilde{a}(\lambda) = \\ = -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2K} \ln |\tilde{a}(\lambda')|^2 \frac{\operatorname{cn}(\lambda' - \lambda + i0)}{\operatorname{sn}(\lambda' - \lambda + i0)} d\lambda',$$

где  $\lambda \in [0, 2K]$ .

При  $0 < \nu < 2K$  свойство унимодулярности матрицы перехода (5.2.7) позволяет выразить модуль функции  $a(\lambda)$  через коэффициент  $b(\lambda)$ :

$$|a(\lambda)|^2 = 1 - |b(\lambda)|^2.$$

С другой стороны, из представления (5.5.9) имеем

$$|a(\lambda)|^2 = |\tilde{a}(\lambda)|^2.$$

В результате получаем следующее окончательное выражение для несо-  
литонного множителя  $\tilde{a}(\lambda)$ :

$$\tilde{a}(\lambda) = \exp \left( \frac{i}{2\pi} \int_0^{2K} \ln(1 - |b(\lambda')|^2) \frac{\operatorname{cn}(\lambda' - \lambda + i0)}{\operatorname{sn}(\lambda' - \lambda + i0)} d\lambda' \right).$$

Логарифмируя равенство (5.5.9) и раскладывая обе части по степеням  $\lambda$ , получаем спектральные представления для интегралов движения. Например, для импульса  $P$  находим:

$$P = \operatorname{mod}(2\pi) + \int_0^{2K} 2\rho \frac{\operatorname{cn}(\lambda, k)}{\operatorname{sn}(\lambda, k)} n(\lambda) d\lambda + \\ + 2i \sum_{j=1}^m \ln \left( \frac{\operatorname{cn} v + i \operatorname{sn} v}{\operatorname{cn} v^* - i \operatorname{sn} v^*} \right) \Big|_{v=u_j + i\theta_j} - 2 \sum_{s=1}^n \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sn} u_s}{\operatorname{cn} u_s}, \quad (5.5.13)$$

где

$$n(\lambda) = -\frac{1}{2\pi\rho} \ln(1 - |b(\lambda)|^2) > 0.$$

Символ  $\text{mod}(2\pi)$  обозначает постоянное слагаемое  $2i \ln \sigma = 0, \pm 2\pi$ , которым можно пренебречь. Интеграл в (5.5.13) сходится, несмотря на полюсную особенность множителя  $\text{cs}(\lambda, k)$  в точке  $\lambda = 0$ , так как для распределений намагниченности  $\mathbf{S}(x)$ , стремящихся к своим асимптотическим значениям при  $x \rightarrow \pm\infty$  быстрее любой степени  $x$ , функция  $n(\lambda)$  стремится к нулю быстрее любой степени  $\lambda$ .

Спектральное разложение энергии системы имеет вид

$$H = \int_0^{2K} 4\rho^2 \frac{\text{dn}(\lambda, k)}{\text{sn}^2(\lambda, k)} n(\lambda) d\lambda + 8\rho \sum_{j=1}^m \text{Re} \, \text{dn}(u_j + i\theta_j) + 4\rho \sum_{s=1}^n \text{dn} u_s. \quad (5.5.14)$$

Еще раз напомним, что в формулах (5.5.13) и (5.5.14)  $n$  — четное число.

Перейдем к интерпретации полученных результатов. Первое слагаемое в (5.5.13), (5.5.14) носит непрерывный характер и соответствует малоамплитудным спин-волновым колебаниям вблизи основного состояния с частотой

$$\omega = 4\rho^2 \frac{\text{dn}\lambda}{\text{sn}^2\lambda} = 4w_1 w_2$$

и волновым числом

$$p = 2\rho \frac{\text{cn}\lambda}{\text{sn}\lambda} = 2w_3,$$

которые удовлетворяют закону дисперсии линейных спиновых волн:

$$\omega^2 = (p^2 + J_3 - J_1)(p^2 + J_3 - J_2).$$

Величина  $n(\lambda) d\lambda$  дает число спин-волновых мод со значениями спектрального параметра в интервале от  $\lambda$  до  $\lambda + d\lambda$ . Второе слагаемое можно интерпретировать как вклад бризеров. Третье слагаемое дает вклад доменных стенок. Замечательно, что в спектральных представлениях интегралов движения удалось полностью разделить вклады всех степеней свободы ферромагнетика.

Кратко обсудим состояния ферромагнетика с разными равновесными значениями намагниченности на бесконечности ( $\varepsilon = -1$ ). При  $\varepsilon = -1$  функция  $b(\lambda)$  оказывается аналитической в области  $D_-$ , а коэффициент  $a(\lambda)$  не имеет каких-либо определенных свойств

аналитичности. Точно так же, как ранее, выделим из функции  $b(\lambda)$  ее солитонную часть:

$$b(\lambda) = \sigma \prod_{j=1}^m \frac{\operatorname{cn}(\lambda - v^*) + i \operatorname{sn}(\lambda - v^*)}{\operatorname{cn}(\lambda - v) - i \operatorname{sn}(\lambda - v)} \Big|_{v=u_j + i\theta_j} \times \\ \times \prod_{s=1}^n [\operatorname{cn}(\lambda - u_s) + i \operatorname{sn}(\lambda - u_s)] \tilde{b}(\lambda), \quad (5.5.15)$$

где  $\sigma = \pm 1$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Требуемые свойства симметрии функции  $b(\lambda)$  (5.2.6) получаются, только когда число  $n$  в формуле (5.5.15) выбрано нечетным. Это приводит к тому, что функция  $\tilde{b}(\lambda)$  должна иметь свойства симметрии:

$$\tilde{b}(\lambda + 2K) = \tilde{b}(\lambda), \quad \tilde{b}(\lambda + 2iK') = \tilde{b}(\lambda^*), \quad (5.5.16)$$

которые отличаются от свойств симметрии функции  $b(\lambda)$ . В то же время редукции (5.5.16) с точностью до обозначений совпадают с теми, что были при  $\varepsilon = 1$ . Только значения  $n = 2r - 1$ ,  $r = 1, 2, \dots$  приводят к верному дисперсионному соотношению для множителя  $\tilde{b}(\lambda)$ :

$$\tilde{b}(\lambda) = \exp \left( \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2K} \ln(1 - |a(\lambda')|^2) \frac{\operatorname{cn}(\lambda' - \lambda - i0)}{\operatorname{sn}(\lambda' - \lambda - i0)} d\lambda' \right).$$

Для состояний ферромагнетика с разными равновесными значениями намагниченности на бесконечности спектральные разложения полного импульса и энергии системы определяются формулами (5.5.13), (5.5.14), где следует положить  $n = 2r - 1$ ,  $r = 1, 2, \dots$ ,

$$n(\lambda) = -\frac{1}{2\pi\rho} \ln(1 - |a(\lambda)|^2).$$

В заключение заметим, что, несмотря на существование решений типа уединенных волн в магнетиках со сложным видом энергии анизотропии [30–32], модель (5.2.1) является наиболее общим интегрируемым уравнением для ферромагнетиков. Это утверждение доказывается следующим образом. Полагая произвольную (но локальную) зависимость матриц  $U(\lambda)$  и  $V(\lambda)$  от  $\mathbf{S}$ ,  $\partial_x \mathbf{S}$ , потребуем, чтобы условие совместности (2.1.1) было эквивалентно уравнению Ландау–Лифшица с энергией анизотропии  $w^{(a)}$ . Оказывается, что требование выполняется только в случае, когда  $w^{(a)}$  является квадратичной функцией от намагниченности.

## Глава 6

# НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ И СОЛИТОНЫ В СИСТЕМЕ ДВУХ КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИ НЕЭКВИВАЛЕНТНЫХ МАГНИТНЫХ ПОДРЕШЕТОК

В данной главе изложены результаты исследований нелинейных волн и солитонов в ферримагнетиках. Основная цель наших работ [1, 2] состояла в установлении возможности существования и описания свойств связанных состояний большого числа магнонов — солитонов в широко распространенных и удобных для экспериментальных исследований средах с двумя магнитными подрешетками. В разделе 6.1 получены эффективные уравнения ферримагнетика и представлена их  $U$ – $V$ -пара. Во разделе 6.2 на основе метода обратной задачи рассеяния найдено конструктивное описание нелинейной динамики ферримагнетика. Раздел 6.3 посвящен формулировке метода интегрирования уравнений ферримагнетика с помощью матричной задачи Римана. Найдены и проанализированы солитонные решения. В разделе 6.4 показано, что любое состояние ферримагнетика может быть адекватно описано невзаимодействующими нелинейными волнами и солитонами. Найдены их законы дисперсии. В разделе 6.5 исследованы двумерные солитоны в изотропном ферромагнетике [3], тесно связанные с интегрируемой моделью ферримагнетика.

### 6.1. Эффективные уравнения ферримагнетика и их $U$ – $V$ -пара

*Ставьте задачи, по которым решение есть только у вас.*

*Следствие правила Берке*

Для выяснения основных особенностей нелинейных волн и солитонов в магнитных средах с неэквивалентными магнитными подрешетками мы ограничимся исследованием простого ферримагнетика в обменном приближении [4]. Магнитные свойства такой системы описываются плотностями магнитного момента  $\mathbf{M}_\nu(\mathbf{r}, t)$  ( $\nu = 1, 2$ ) каждой

из его двух подрешеток. Зависимость энергии ферримагнетика от распределения намагниченности имеет вид

$$W = \int d^3\mathbf{r} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 [\alpha_1 (\partial_i \mathbf{M}_1 \cdot \partial_i \mathbf{M}_1) + \alpha_2 (\partial_i \mathbf{M}_2 \cdot \partial_i \mathbf{M}_2) + 2\alpha_3 (\partial_i \mathbf{M}_1 \cdot \partial_i \mathbf{M}_2)] + \eta (\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2) \right),$$

где  $\eta > 0$  — постоянная однородного обмена между подрешетками,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  — константы неоднородного обмена,

$$|\mathbf{M}_\nu(\mathbf{r}, t)| = M_{0\nu} = \text{const}; \quad M_{01} \neq M_{02}.$$

По порядку величины  $\alpha_s \sim \eta a^2$ , где  $a$  — постоянная решетки. Удобно перейти от намагниченностей  $\mathbf{M}_1$ ,  $\mathbf{M}_2$  к нормированным векторам ферро- и антиферромагнетизма  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{l}$ :

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2}{\sqrt{2(M_{01}^2 + M_{02}^2)}}, \quad \mathbf{l} = \frac{\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2}{\sqrt{2(M_{01}^2 + M_{02}^2)}},$$

$$\mathbf{m}^2 + \mathbf{l}^2 = 1, \quad (\mathbf{m} \cdot \mathbf{l}) = \frac{M_{01}^2 - M_{02}^2}{2(M_{01}^2 + M_{02}^2)}. \quad (6.1.1)$$

Вещества с магнитной структурой ферримагнетика хорошо изучены [5, 6]. Важным примером являются редкоземельные ферриты-гранаты, названные так потому, что их решетка имеет такую же структуру, как у минерала граната. Их общая формула  $\text{R}_3\text{Fe}_5\text{O}_{12}$ ; R — ион редкоземельного элемента. В ферритах можно выделить две магнитные подрешетки, которые образованы атомами железа, и одну подрешетку из ионов редкоземельного элемента. Самым сильным оказывается обменное взаимодействие между атомами железа. Поэтому при комнатных температурах упорядочены только атомы железа, и феррит-гранат имеет малую магнитную анизотропию. В сочетании с высоким электрическим сопротивлением феррита это делает его идеальным магнитомягким материалом. В основном состоянии векторы  $\mathbf{M}_1$  и  $\mathbf{M}_2$  антипараллельны, причем справедливо соотношение  $\mathbf{m}^2 \ll \mathbf{l}^2$ . Для железо-иттриевого граната и магнетита отношения  $\mathbf{m}^2/\mathbf{l}^2$  равны 0,04 и 0,1 соответственно.

Современные методы выращивания тонких пленок феррит-гранатов на немагнитных подложках позволяют получать монокристаллы ферритов с практически любыми наперед заданными свойствами. В силу этого, ферриты находят широкое применение в современной технике.

Уравнение движения для векторов  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{l}$  следует из уравнений Ландау–Лифшица для намагниченностей подрешеток:

$$\partial_t \mathbf{M}_\nu = \gamma_\nu \left[ \mathbf{M}_\nu \times \frac{\delta W}{\delta \mathbf{M}_\nu} \right], \quad \nu = 1, 2, \quad (6.1.2)$$

где  $\gamma_\nu = \text{const}$  — магнитомеханическое отношение для  $\nu$ -й подрешетки. Полное решение этих уравнений в настоящее время затrudнено.



Уравнения (6.1.2) можно существенно упростить, используя физически оправданные приближения, которые впервые предложены в работах [7, 8] при анализе нелинейной динамики двухподрешеточного антиферромагнетика. Будем считать, что характерный размер магнитных неоднородностей  $d$  много больше постоянной решетки  $a$ , тогда слагаемыми, содержащими  $\alpha$ , можно пренебречь по сравнению с членами, включающими  $\eta$ :

$$\frac{|\alpha_s [\mathbf{m} \times \Delta \mathbf{l}]|}{|\eta [\mathbf{m} \times \mathbf{l}]|} \sim \frac{|\alpha_s [\Delta \mathbf{m} \times \mathbf{l}]|}{|\eta [\mathbf{m} \times \mathbf{l}]|} \sim \left| \frac{\alpha_s}{\eta d^2} \right| \sim \frac{a^2}{d^2} \ll 1.$$

Кроме того, полагая  $\mathbf{m}^2 \ll \mathbf{l}^2$ , будем считать, что длина вектора  $\mathbf{l}$  не изменяется, то есть  $\mathbf{l}^2 = 1$ . Тогда система (6.1.2) примет вид:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{l} &= \sqrt{\frac{M_{01}^2 + M_{02}^2}{2}} \left( \eta (\gamma_1 + \gamma_2) [\mathbf{l} \times \mathbf{m}] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} [\gamma_1 (\alpha_1 - \alpha_3) - \gamma_2 (\alpha_2 - \alpha_3)] [\mathbf{l} \times \Delta \mathbf{l}] \right), \\ \partial_t \mathbf{m} &= \sqrt{\frac{M_{01}^2 + M_{02}^2}{2}} \left( \eta (\gamma_1 - \gamma_2) [\mathbf{l} \times \mathbf{m}] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} [\gamma_1 (\alpha_1 - \alpha_3) + \gamma_2 (\alpha_2 - \alpha_3)] [\mathbf{l} \times \Delta \mathbf{l}] \right). \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

Используя (6.1.1) и первое уравнение (6.1.3), выразим  $\mathbf{m}$  через вектор  $\mathbf{l}$  и его производные:

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= -\sqrt{\frac{2}{M_{01}^2 + M_{02}^2}} \frac{[\mathbf{l} \times \partial_t \mathbf{l}]}{\eta (\gamma_1 + \gamma_2)} + \frac{(M_{01}^2 - M_{02}^2)}{2(M_{01}^2 + M_{02}^2)} \mathbf{l} + \\ &\quad + \frac{\gamma_1 (\alpha_3 - \alpha_1) + \gamma_2 (\alpha_2 - \alpha_3)}{2\eta (\gamma_1 + \gamma_2)} [\mathbf{l} \times [\mathbf{l} \times \Delta \mathbf{l}]]. \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

Заметим, что последнее слагаемое в (6.1.4) приводит при подстановке выражения для  $\mathbf{m}$  во второе уравнение (6.1.3) к членам, содержащим третьи производные от вектора  $\mathbf{l}$ , которые в длинноволновом пределе малы по сравнению со слагаемыми, содержащими вторые производные от  $\mathbf{l}$ . Следовательно, последним слагаемым в выражении для  $\mathbf{m}$  можно пренебречь. После подстановки (6.1.4) во второе уравнение (6.1.3) получаем замкнутое уравнение для вектора  $\mathbf{l}$ :

$$[\mathbf{l} \times (c^{-2} \partial_t^2 \mathbf{l} - \Delta \mathbf{l})] + \beta c^{-1} \partial_t \mathbf{l} = 0, \quad (6.1.5)$$

где

$$\begin{aligned} c^2 &= \frac{1}{2} (M_{01}^2 + M_{02}^2) \eta \gamma_1 \gamma_2 (\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3), \\ \beta &= \sqrt{\frac{\eta}{\gamma_1 \gamma_2 (\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3)}} \left( \frac{M_{02}^2 - M_{01}^2}{M_{01}^2 + M_{02}^2} \cdot \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} + \gamma_1 - \gamma_2 \right). \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

В формальном пределе  $c \rightarrow \infty$ ,  $\beta c^{-1} = \text{const}$ , что соответствует жесткой связи между подрешетками ( $\eta \rightarrow +\infty$ ), эффективное уравнение (6.1.5) совпадает с уравнением Ландау–Лифшица для гейзенберговского ферромагнетика, которое является интегрируемым [9, 10]. При  $M_{01} = M_{02}$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2$  система (6.1.4), (6.1.5) описывает волны в изотропном двухподрешеточном антиферромагнетике [7, 8] и эквивалентна интегрируемой модели  $\mathbf{n}$ -поля на сфере  $S^2$  [11, 12].

Используя масштабные преобразования

$$x \rightarrow \frac{x}{\beta} \quad t \rightarrow \frac{t}{c\beta},$$

запишем эффективное уравнение (6.1.5) в форме, удобной для дальнейшего анализа:

$$[\mathbf{l} \times (\partial_t^2 \mathbf{l} - \Delta \mathbf{l})] + \partial_t \mathbf{l} = 0. \quad (6.1.7)$$

В настоящей главе рассмотрены волны намагниченности, распространяющиеся вдоль оси  $Ox$ . В этом случае  $\mathbf{l} = \mathbf{l}(x, t)$ , потому уравнение (6.1.7) принимает вид

$$[\mathbf{l} \times (\partial_t^2 \mathbf{l} - \partial_x^2 \mathbf{l})] + \partial_t \mathbf{l} = 0. \quad (6.1.8)$$

Для исследования нелинейной динамики ферромагнетика в квазиодномерном случае обратимся к методу обратной задачи рассеяния. Ключевым моментом в применении метода является возможность представления уравнения (6.1.8) в форме условия совместности

$$\partial_x U(\lambda) - \partial_t V(\lambda) + [U(\lambda), V(\lambda)] = 0 \quad (6.1.9)$$

системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\partial_x T = V(\lambda) T, \quad \partial_t T = U(\lambda) T \quad (6.1.10)$$

для вспомогательных полей  $T(x, t, \lambda)$ . Здесь матрицы  $U(\lambda)$ ,  $V(\lambda)$  зависят от вектора  $\mathbf{l}$  и его производных, а также от спектрального параметра  $\lambda$ .

В общем случае не существует регулярного способа построения  $U$ – $V$ -пары. Широко известный метод Эстабрука–Уолквиста [13] сводит решение этой задачи к изучению алгебры дифференциальных операторов. Мы воспользуемся более простым приемом, изложенным в гл. 2.

Отметим, что из инвариантности уравнений (6.1.7) относительно группы спиновых вращений, линейной реализации ее на полях  $l_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и вида уравнений (6.1.8), (6.1.9) следует, что целесообразно искать  $U(\lambda)$ ,  $V(\lambda)$  в матричном представлении алгебры группы  $SU(2)$ . Предполагая локальную зависимость, будем искать  $U(\lambda)$ ,  $V(\lambda)$  в виде разложений по линейно независимым векторам  $\mathbf{l}$ ,  $\partial_t \mathbf{l}$ ,  $\partial_x \mathbf{l}$ ,  $[\mathbf{l} \times \partial_x \mathbf{l}]$ ,  $[\mathbf{l} \times \partial_t \mathbf{l}]$ . Коэффициенты разложений однозначно определяются из эквивалентности уравнений (6.1.8) и (6.1.9). В результате мы нашли:

$$V(\lambda) = -\left(\gamma A + \delta B + \frac{i\lambda \hat{l}}{2}\right), \quad U(\lambda) = -\left(\delta A + \gamma B - \frac{i\gamma^2 \hat{l}}{2}\right), \quad (6.1.11)$$

где выбрано двумерное представление алгебры группы  $SU(2)$  через матрицы Паули  $\sigma_i$ :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_i \sigma_j = I \delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k$$

и

$$A = \frac{i}{2} [1 \times \partial_t 1]_a \sigma_a, \quad B = \frac{i}{2} [1 \times \partial_x 1]_a \sigma_a, \quad \hat{l} = l_a \sigma_a \quad (n = 1, 2, 3). \quad (6.1.12)$$

Коэффициенты  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\Lambda$  связаны алгебраическими уравнениями

$$\delta^2 - 2\delta - \gamma^2 = 0, \quad \Lambda = \gamma(1 - \delta), \quad (6.1.13)$$

допускающими униформизацию рациональными функциями параметра  $\lambda$ :

$$\delta(\lambda) = \frac{2}{1 - \lambda^2}, \quad \gamma(\lambda) = \frac{2\lambda}{1 - \lambda^2}, \quad \Lambda(\lambda) = -\frac{2\lambda(1 + \lambda^2)}{(1 - \lambda^2)^2}. \quad (6.1.14)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что условие совместности (6.1.9) в точности совпадает с уравнением (6.1.8). Найденная  $U$ - $V$ -пара имеет, как и модель Тирринга [14], два простых и два двойных полюса, однако существенно отличается от последней модели матричной структурой.

Итак, в настоящем разделе получены эффективные уравнения динамики ферримagnetика (6.1.8) и показана их интегрируемость. Соответствующая  $U$ - $V$ -пара дана формулами (6.1.11)–(6.1.14).

## 6.2. Интегрирование динамических уравнений методом обратной задачи рассеяния

*Если при построении или в доказательстве мы допускаем что-либо такое, что не было ранее доказано, но требует аргументации, то мы считаем это допущение само по себе сомнительным и заслуживающим исследования и называем его леммой.*

*Прокл. «Комментарии к Евклиду»*

В этом разделе мы решаем задачу Коши для уравнений (6.1.8), т. е. даем конструктивный способ нахождения намагниченностей подрешеток  $\mathbf{M}_1$ ,  $\mathbf{M}_2$  в любой момент времени при заданных значениях этих величин в начальный момент  $t = 0$ .

Начнем с прямой задачи рассеяния для системы

$$\partial_x T = V(\lambda) T \quad (6.2.1)$$

и определим коэффициенты рассеяния при заданных значениях  $\mathbf{1}(x, t = 0)$ ,  $\partial_t \mathbf{1}(x, t = 0)$  и граничных условиях

$$\mathbf{1}(x, t) \rightarrow (0, 0, 1), \quad \partial_t \mathbf{1} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty.$$

С этой целью введем функции Ёоста  $\varphi(x, \lambda)$ ,  $\overline{\varphi}(x, \lambda)$ ,  $\Psi(x, \lambda)$ ,  $\overline{\Psi}(x, \lambda)$  как решения уравнения (6.2.1) с асимптотиками:

$$\begin{aligned} \varphi &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp\left(-\frac{i\Lambda x}{2}\right), \quad \overline{\varphi} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp\left(\frac{i\Lambda x}{2}\right) \\ &\quad \text{при} \quad x \rightarrow -\infty; \\ \Psi &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp\left(-\frac{i\Lambda x}{2}\right); \quad \overline{\Psi} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp\left(\frac{i\Lambda x}{2}\right) \\ &\quad \text{при} \quad x \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

Вследствие антиэрмитовости матрицы  $V$  ( $V^\dagger = -V$ ) и граничных условий, функции Ёоста связаны соотношениями

$$\overline{\varphi}(\lambda) = -i\sigma_2 \varphi^*(\lambda^*), \quad \overline{\Psi}(\lambda) = -i\sigma_2 \Psi^*(\lambda^*). \quad (6.2.3)$$

При вещественных значениях параметра  $\lambda$  каждый из двух наборов фундаментальных решений  $\varphi(x, \lambda)$ ,  $\overline{\varphi}(x, \lambda)$  и  $\Psi(x, \lambda)$ ,  $\overline{\Psi}(x, \lambda)$  можно рассматривать как базисный, поэтому справедливо представление

$$\begin{aligned} \varphi(x, \lambda) &= a(\lambda)\Psi(x, \lambda) + b(\lambda)\overline{\Psi}(x, \lambda), \\ \overline{\varphi}(x, \lambda) &= \overline{a}(\lambda)\overline{\Psi}(x, \lambda) + \overline{b}(\lambda)\Psi(x, \lambda), \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

где  $a(\lambda)$ ,  $\overline{b}(\lambda)$ ,  $\overline{a}(\lambda)$ ,  $b(\lambda)$  — элементы матрицы перехода.

Для любой пары  $\alpha$ ,  $\tilde{\beta}$  решений системы (6.2.1) вронскиан

$$W(\alpha, \tilde{\beta}) = \det(\alpha, \tilde{\beta})$$

не зависит от координаты  $x$ . Отсюда находим:

$$W(\varphi, \overline{\varphi}) = W(\Psi, \overline{\Psi}) = 1.$$

Из свойств симметрии системы (6.2.1) следует, что решения Ёоста удовлетворяют редукции:

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}(x, \lambda^{-1}) &= -\widehat{l}\overline{\varphi}(x, \lambda), \quad \overline{\Psi}(x, \lambda^{-1}) = -\widehat{l}\overline{\Psi}(x, \lambda), \\ \varphi(x, \lambda^{-1}) &= \widehat{l}\varphi(x, \lambda), \quad \Psi(x, \lambda^{-1}) = \widehat{l}\Psi(x, \lambda). \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

Перечисленные свойства функций Ёоста приводят к соотношениям унитарности и симметрии для элементов матрицы перехода:

$$\begin{aligned} \overline{a}(\lambda) &= a^*(\lambda^*), \quad \overline{b}(\lambda) = -b^*(\lambda^*), \\ a(\lambda) a^*(\lambda^*) + b(\lambda) b^*(\lambda^*) &= 1, \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

$$a(\lambda^{-1}) = a(\lambda), \quad b(\lambda^{-1}) = -b(\lambda). \quad (6.2.7)$$

Для определения аналитических свойств функций Йоста найдем для них представления в терминах операторов преобразования, отображающих решения уравнения (6.2.1) с «потенциалом»  $\mathbf{l}_0 = (0, 0, 1)$  в решения с «потенциалом»  $\mathbf{l} \neq \mathbf{l}_0$ . Покажем, что для функций  $\varphi, \Psi$  такие представления имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi(x, \lambda) = & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp\left(-\frac{i\Lambda x}{2}\right) + \\ & + \int_{-\infty}^x dy [\gamma(\lambda)K_1(x, y) + \delta(\lambda)K_2(x, y) + \\ & + \gamma^2(\lambda)K_3(x, y) + \Lambda(\lambda)K_4(x, y)] \exp\left(-\frac{i}{2}\Lambda(\lambda)y\right); \end{aligned} \quad (6.2.8)$$

$$\begin{aligned} \Psi(x, \lambda) = & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp\left(-\frac{i\Lambda x}{2}\right) + \\ & + \int_x^{+\infty} dy [\gamma(\lambda)L_1(x, y) + \delta(\lambda)L_2(x, y) + \\ & + \gamma^2(\lambda)L_3(x, y) + \Lambda(\lambda)L_4(x, y)] \exp\left(-\frac{i}{2}\Lambda(\lambda)y\right). \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

Для выявления зависимости от  $\lambda$  ядер операторов преобразования, как и в гл. 3, поучительно вначале использовать теорию возмущений и рассмотреть физически оправданный случай, когда поля  $\mathbf{l}(x, t)$  близки к основному состоянию:

$$\mathbf{l} = \mathbf{l}^{(0)} + \varepsilon \mathbf{l}^{(1)} + \varepsilon^2 \mathbf{l}^{(2)} + \dots, \quad \mathbf{l}^{(0)} = (0, 0, 1).$$

Здесь формальный параметр  $\varepsilon$  введен для наглядной группировки слагаемых одного порядка малости.

Методом вариации произвольных постоянных получаем фундаментальную матрицу решений  $\Phi$  ( $\Phi_{\alpha 1} = \varphi_\alpha$ ,  $\Phi_{\alpha 2} = \bar{\varphi}_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ ) в виде ряда  $\Phi = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \Phi^{(m)}$ . Для расчета матричных функций  $\Phi^{(m)}$  имеем цепочку рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} \Phi^{(0)} &= \exp\left(-i\frac{\Lambda\sigma_3}{2}x\right), \\ \Phi^{(m)}(x, \lambda) &= \int_{-\infty}^x \sum_{k=1}^m \Phi^{(0)}(x-y, \lambda) V^{(k)}(y, \lambda) \Phi^{(m-k)}(y, \lambda) dy; \\ V &= \sum_{m=0}^{\infty} V^{(m)} \varepsilon^m, \quad V^{(0)} = -i\frac{\Lambda\sigma_3}{2}, \quad V^{(m)} = \sum_{i=1}^3 V_i^{(m)} \sigma_i. \end{aligned}$$

Рассмотрим первые два члена разложения и преобразуем их к треугольному виду заменой переменных интегрирования:

$$\begin{aligned}\Phi^{(1)} &= \int_{-\infty}^x K^{(1)}(x, y) \Phi^{(0)}(y) dy, \quad K^{(1)}(x, y) = \frac{1}{2} V^{(1)}\left(\frac{x+y}{2}\right), \\ \Phi^{(2)} &= \int_{-\infty}^x K^{(2)}(x, y) \Phi^{(0)}(y) dy + \int_{-\infty}^x V_3^{(2)}(y) \sigma_3 \Phi^{(0)}(x) dy,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}K^{(2)}(x, y) &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 V_{\alpha}^{(2)}\left(\frac{y+x}{2}\right) \sigma_{\alpha} + \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^y V^{(1)}\left(\frac{s-y+2x}{2}\right) V^{(1)}\left(\frac{s+x}{2}\right) dx.\end{aligned}$$

Следовательно, ядро  $K^{(1)}(x, y)$  зависит от параметра  $\lambda$  только через функции  $\gamma(\lambda)$ ,  $\delta(\lambda)$ ,  $\Lambda(\lambda)$ , а ядро  $K^{(2)}(x, y)$  содержит две группы слагаемых. В первую группу входят слагаемые с коэффициентами  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\Lambda$ ,  $\gamma^2$ ,  $\delta\gamma$ ,  $\delta^2$ . Во вторую — слагаемые с множителями  $\Lambda\gamma$ ,  $\Lambda\delta$ ,  $\Lambda^2$ , которые после интегрирования по частям приводятся к первой группе. Кроме того, непосредственными вычислениями можно показать, что в результате указанных преобразований у матричной функции  $\Phi^{(2)}(x, \lambda)$  исчезает «опасное» слагаемое  $\int_{-\infty}^x V_3^{(2)}(y) \sigma_3 \Phi^{(0)}(x) dy$  и зависимость от  $\lambda$  ядра ее треугольного представления принимает вид

$$K^{(2)}(x, y) = \sum_{i=1}^4 K_i^{(2)}(x, y) f_i(\lambda), \quad f_i(\lambda) = (\gamma^2(\lambda), \gamma(\lambda), \delta(\lambda), \Lambda(\lambda)).$$

Обсудим следующие члены борновского приближения. Из соотношений

$$\gamma^3 = -\gamma + \Lambda - \delta\Lambda, \quad \delta\gamma^2 = \gamma^2 - \gamma\Lambda \quad (6.2.10)$$

и формул (6.1.13) следует, что зависимость от параметра  $\lambda$  в ядра поправки  $\Phi^{(3)}$  входит только через слагаемые с множителями  $f_i(\lambda)$ ,  $f_j(\lambda)\Lambda(\lambda)$ . Последнюю группу слагаемых интегрированием по частям можно привести к слагаемым с множителями  $f_i(\lambda)$ . Ясно, что подобную процедуру можно провести в любом порядке теории возмущений. Мы не будем доказывать здесь сходимость ряда теории возмущений и отсутствие «опасных» членов. Приведенный анализ указывает на целесообразность изучения представления  $\varphi$  в виде (6.2.8).

Из соотношений (6.2.5), (6.2.8) получаем ограничения:

$$\begin{aligned}\rho(x) &= \hat{l}\rho(x), \quad K_a(x, y) = -\hat{l}K_a(x, y), \quad a = 1, 2; \\ K_b(x, y) &= \hat{l}K_b(x, y), \quad b = 3, 4; \\ \hat{l}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \int_{-\infty}^x dy \exp\left(-\frac{i\Lambda y}{2}\right) K_2(x, y).\end{aligned}\quad (6.2.11)$$

Для строгого доказательства представления (6.2.8) подставим его в уравнение (6.2.1). Интегрированием по частям с учетом связей (6.1.13), (6.2.10) все подынтегральные выражения можно свести к слагаемым с независимыми от  $\lambda$  множителями и к членам с коэффициентами  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\gamma^2$ . Умножим полученное уравнение последовательно на  $\gamma\delta$ ,  $\gamma^2$ ,  $\delta$ ,  $\gamma^2\delta$  и используем преобразование Фурье, определенное далее (см. (6.2.21), (6.2.22)). В результате получаем следующую систему линейных дифференциальных уравнений для ядер преобразования:

$$\partial_x K_1 - \partial_y K_1 + 2iB \partial_y K_3 = A(2i \partial_y K_4 - K_2 + K_3) - BK_1, \quad (6.2.12)$$

$$\partial_x K_3 + \partial_y K_3 = -AK_1 - B(K_2 + K_3), \quad (6.2.13)$$

$$\partial_x K_2 - \partial_y K_2 = 2B(i \partial_y K_4 - K_2) - 2iA \partial_y K_3, \quad (6.2.14)$$

$$\partial_x \partial_y K_4 + \partial_y^2 K_4 = A(\partial_y K_2 - \partial_y K_3) + B \partial_y K_1 \quad (6.2.15)$$

и дополнительные условия

$$\begin{aligned}K_2(x, x) &= iAK_3(x, x) - \frac{B}{2}\rho(x), \\ K_1(x, x) &= iBK_3(x, x) - \frac{A}{2}\rho(x),\end{aligned}\quad (6.2.16)$$

$$\partial_x \rho(x) = -i(AB + BA)\rho(x) - 2(A^2 + B^2 + iA)K_3(x, x). \quad (6.2.17)$$

Здесь

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2iK_4(x, x), \quad (6.2.18)$$

величины  $A$ ,  $B$  зависят только от переменной  $x$  ( $t$  — параметр представления).

Покажем, что решение уравнений (6.2.12)–(6.2.18) является задачей Гурса (характеристической задачей Коши [15, 16]).

Заметим сначала, что уравнение (6.2.13) при  $y = x$  и уравнение (6.2.17) редуцируются к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для расчета функций  $\rho(x)$ ,  $K_3(x, x)$ . Ее решение с начальными условиями

$$\rho(-\infty) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K_3(-\infty, -\infty) = 0$$

существует и, согласно (6.2.16), однозначно определяет  $K_1(x, x)$ ,  $K_2(x, x)$ .

Нетрудно установить, что (6.2.12)–(6.2.18) — это система уравнений гиперболического типа, и прямые линии

$$\zeta \equiv x + y = \text{const}, \quad \eta \equiv y - x = \text{const}$$

являются ее двойными характеристиками. На характеристике  $\eta = 0$  заданы значения  $K_1(\zeta, 0)$ ,  $K_2(\zeta, 0)$ , а при  $y = -\infty$  — значения  $K_2$ ,  $K_4$ . Поэтому доказательство существования и единственности представления (6.2.8) может быть основано на итерациях интегральных уравнений типа Вольтерра, которые эквивалентны системе (6.2.12)–(6.2.18). Это позволяет найти ограничения на функции  $A$ ,  $B$ ,  $l$ , при которых ядра единственны и непрерывны.

В конечном счете число уравнений прямой задачи рассеяния уменьшается до пяти уравнений для пяти скалярных функций  $n_i$ , которые удобно определить следующими формулами:

$$\begin{aligned} K_a &= \begin{pmatrix} -1 \\ (l_3 - 1) l_-^{-1} \end{pmatrix} n_a, \quad a = 1, 2; \\ K_b &= \begin{pmatrix} 1 \\ (1 - l_3) l_-^{-1} \end{pmatrix} n_b, \quad b = 3, 4; \\ \rho &= \begin{pmatrix} 1 \\ (1 - l_3) l_-^{-1} \end{pmatrix} n_5, \end{aligned}$$

где  $l_- = l_1 - i l_2$ . Интегральное представление для решения  $\Psi(x, \lambda)$  находится аналогичным образом.

Обсудим аналитические свойства функций Йоста. Из структуры представлений (6.2.8), (6.2.9) следует, что функции  $\varphi(x, \lambda) \exp(i\Lambda x/2)$ ,  $\Psi(x, \lambda) \exp(i\Lambda x/2)$  могут быть аналитически продолжены по спектральному параметру  $\lambda$  в области, где интегральные операторы являются сжимающими. Фактически области аналитичности определяются поведением функции  $\exp[i\Lambda(x - y)/2]$  при  $|x - y| \rightarrow \infty$ . Поскольку

$$\text{Im}\Lambda(\lambda) = \frac{\text{ch}^2 \rho + \cos^2 \varphi}{(\text{ch}^2 \rho - \cos^2 \varphi)^2} \text{sh} \rho \sin \varphi \quad (\lambda = \exp(\rho + i\varphi); \quad \rho, \varphi \in R),$$

функции  $\Psi(x, \lambda) \exp(i\Lambda x/2)$ ,  $\overline{\varphi}(x, \lambda) \exp(-i\Lambda x/2)$  допускают аналитическое продолжение с контура  $\Gamma$ :

$$\Gamma = \{\lambda \mid \varphi = 0, \pi \quad (-\infty < \rho < \infty); \quad \rho = 0 \quad (0 < \varphi < 2\pi)\}$$

в область

$$D_2 = \{\lambda \mid \rho < 0, 0 < \varphi < \pi; \rho > 0, \pi < \varphi < 2\pi\}$$



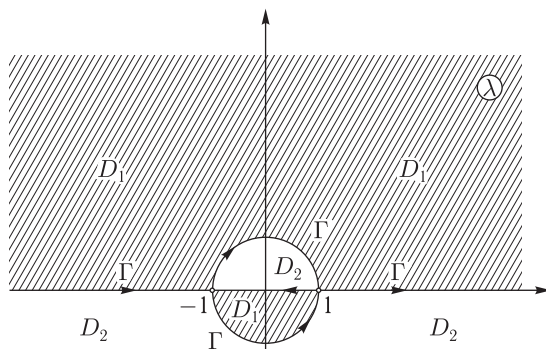


Рис. 6.1. Области аналитичности:  $D_1$  — функций  $\varphi(\lambda)$ ,  $\bar{\Psi}(\lambda)$ ,  $a(\lambda)$  и  $D_2$  — функций  $\bar{\varphi}(\lambda)$ ,  $\Psi(\lambda)$ ,  $\bar{a}(\lambda)$  в комплексной  $\lambda$ -плоскости

(см. рис. 6.1), а функции  $\bar{\Psi}(x, \lambda) \exp(-i\lambda x/2)$ ,  $\varphi(x, \lambda) \exp(i\lambda x/2)$  — в область

$$D_1 = \{\lambda \mid \rho > 0, 0 < \varphi < \pi; \rho < 0, \pi < \varphi < 2\pi\}.$$

Из связи элементов матрицы перехода с решениями Йоста:

$$a(\lambda) = W(\varphi, \bar{\Psi}), \quad b(\lambda) = -W(\varphi, \Psi) \quad (6.2.19)$$

следует, что функция  $a(\lambda)$  является аналитической в области  $D_1$ . Множество ее возможных нулей:  $\{\lambda_n\}$  ( $n = 1, 2, \dots, 2N$ ) инвариантно к инверсии:  $\lambda_k = \lambda_{k+N}^{-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ . Нули  $\{\lambda_n\}$  совпадают с дискретным спектром системы (6.2.1), причем

$$\bar{\Psi}(\lambda_n) = \bar{b}_n \varphi(\lambda_n) \quad (\bar{b}_{k+N} = -\bar{b}_k)!. \quad (6.2.20)$$

На этом мы завершаем обсуждение прямой задачи рассеяния. Формулы (6.2.8), (6.2.9), (6.2.12)–(6.2.18), (6.2.19), (6.2.20) дают конструктивный способ определения данных рассеяния

$$r(\lambda) = \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} \quad (\lambda \in \Gamma), \quad \lambda_n, \bar{b}_n$$

по заданным начальным полям  $l_i(x, t = 0)$ ,  $\partial_t l_i(x, t = 0)$ .

Далее обсудим обратную задачу рассеяния, т.е. восстановление матрицы  $V(x, t, \lambda)$  по данным рассеяния. Решение обратной задачи основывается на системе линейных интегральных уравнений и существенно упрощается, если удастся найти обратное преобразование к представлению (6.2.8), (6.2.9), т.е. выразить ядра операторов преобразования через функции Йоста. Решим вначале эту задачу.

Функция  $\Lambda(\lambda)$  осуществляет четырехлистное накрытие:  $\Gamma \rightarrow R$ . Она инвариантна относительно инверсии  $q_1: \lambda \rightarrow 1/\lambda$  и дробно-линейного преобразования  $q_2: \lambda \rightarrow i(\lambda + i)/(\lambda - i)$ , отображающего окружность  $|\lambda| = 1$  на вещественную ось  $R$ . Используя это фундаментальное свойство, мы приводим интеграл с произвольной функцией  $f(\lambda)$  по контуру  $\Gamma$ ,

$$\int_{\Gamma} f(\lambda) \exp(\pm i\Lambda x/2) d\lambda,$$

к интегралу по интервалу  $I = (-1 < \lambda < 1)$ , где функция  $\Lambda(\lambda)$  задает гомеоморфное отображение  $I \rightarrow R$  ( $-\infty < \Lambda < \infty$ ,  $d\Lambda/d\lambda < 0$ ,  $\lambda \in I$ ):

$$\int_{\Gamma} f(\lambda) \exp\left(\pm \frac{i\Lambda x}{2}\right) d\lambda = - \int_{-1}^1 \bar{f}(\lambda) \exp\left(\pm \frac{i\Lambda x}{2}\right) d\lambda.$$

Здесь

$$\bar{f}(\lambda) = f(\lambda) + \frac{2}{(\lambda + i)^2} f\left(\frac{i - \lambda}{i + \lambda}\right) - \frac{1}{\lambda^2} f\left(\frac{1}{\lambda}\right) + \frac{2}{(\lambda - i)^2} f\left(\frac{\lambda + i}{\lambda - i}\right).$$

Аналог обратного преобразования Фурье может быть построен, если мы найдем аналог дельта-функции. Решая соответствующее функциональное уравнение и используя выражения  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\Lambda$  через параметр  $\lambda$ , получаем полезные соотношения:

$$\int_{\Gamma} q(\lambda) \exp\left(\pm \frac{i\Lambda x}{2}\right) d\lambda = 0,$$

$$q(\lambda) = (\gamma\delta^2, \gamma^3\delta, \gamma\delta, \gamma^3, \gamma^2, \delta^2, \delta); \quad (6.2.21)$$

$$\int_{\Gamma} q(\lambda) \exp\left(\pm \frac{i\Lambda x}{2}\right) d\lambda = 8\pi\delta(x),$$

$$q(\lambda) = (-\gamma^2\delta, \gamma^4, -\gamma^2\delta^2, \gamma^4\delta, -\delta^3, -\delta^3\gamma^2, \gamma^4\delta^2). \quad (6.2.22)$$

Для вывода уравнений обратной задачи рассеяния выразим из уравнений (6.2.4) поле  $\bar{\Psi}(x, \lambda)$  через  $\varphi(x, \lambda)$ ,  $\bar{\varphi}(x, \lambda)$  и разделим полученное уравнение на коэффициент  $a(\lambda)$ :

$$\frac{\bar{\Psi}(x, \lambda)}{a(\lambda)} = -\frac{\bar{b}(\lambda)}{a(\lambda)} \varphi(x, \lambda) + \bar{\varphi}(x, \lambda).$$

Вычтем из левой и правой части этого уравнения выражение

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp\left(-\frac{i\Lambda}{2}x\right),$$

умножим результат на

$$\exp\left(-\frac{i\Lambda}{2}z\right) \quad (z < x),$$

а затем последовательно на  $\gamma\delta$ ,  $\gamma^2$ ,  $\delta$ ,  $\gamma^2\delta$ . Проинтегрируем полученные равенства по контуру  $\Gamma_1$ , который охватывает область  $D_1$  и состоит из контура  $\Gamma$  (за исключением четверть окружностей бесконечно малого радиуса вокруг сингулярных точек  $\lambda = \pm 1$ ) и бесконечно удаленного контура (см. рис. 6.1). С учетом свойства аналитичности функций  $\bar{\Psi}(x, \lambda) \exp(-i\Lambda x/2)$ ,  $a(\lambda)$  в области  $D_1$  и соотношения

$$\frac{\bar{\Psi}(x, \lambda)}{a(\lambda)} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp\left(-\frac{i\Lambda x}{2}\right) \quad \text{при} \quad |\lambda| \rightarrow \infty$$

интеграл в левой части каждого из равенств может быть вычислен с помощью леммы Жордана: он равен произведению  $2\pi i$  на сумму вычетов подынтегрального выражения в нулях функции  $a(\lambda)$ . При интегрировании правых частей равенств используем формулы (6.2.21), (6.2.22) и редукции (6.2.7), (6.2.20). В итоге, находим систему интегральных уравнений обратной задачи рассеяния:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^x ds [K_2(x, s)F(\gamma\delta^2, s+y) + K_3(x, s)F(\gamma^3\delta, s+y) + \\ & + K_4(x, s)F(\Lambda\gamma\delta, s+y)] + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} F(\gamma\delta, x+y) + \bar{K}_1(x, y) = 0; \quad (6.2.23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^x ds [K_1(x, s)F(\gamma^3, s+y) + K_3(x, s)F(\gamma^4, s+y) + \\ & + K_4(x, s)F(\Lambda\gamma^2, s+y)] + \\ & + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} F(\gamma^2, x+y) + \bar{K}_2(x, y) - \bar{K}_3(x, y) = 0; \quad (6.2.24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^x ds [K_1(x, s)F(\gamma\delta, s+y) + K_2(x, s)F(\delta^2, s+y)] + \\ & + \bar{K}_3(x, y) = 0; \quad (6.2.25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^x ds [K_1(x, s)F(\gamma^3\delta, s+y) + K_2(x, s)F(\gamma^2\delta^2, s+y)] + \\ & + \bar{K}_2(x, y) - \bar{K}_3(x, y) + 2i\partial_y \bar{K}_4(x, y) = 0, \quad (6.2.26) \end{aligned}$$

которая связывает ядра

$$K_i(x, y), \quad \bar{K}_i(x, y) = -i\sigma_2 K_i^*(x, y), \quad i = 1, 2, 3, 4$$

с ядрами  $F(\xi(\lambda), x)$ :

$$F(\xi(\lambda), x) = \frac{i}{4} \sum_n \frac{\bar{b}_n \xi_n}{a_n} \exp\left(-\frac{i\Lambda(\lambda_n)}{2}x\right) + \frac{1}{8\pi} \int_{\Gamma} \frac{\bar{b}(\lambda)}{a(\lambda)} \xi(\lambda) \exp\left(-\frac{i\Lambda(\lambda)}{2}x\right) d\lambda, \quad (6.2.27)$$

где  $a_n = \partial_\lambda a(\lambda)|_{\lambda \rightarrow \lambda_n}$ . Анализ показывает, что из-за условия  $\bar{b}(\lambda=1) = \bar{b}(\lambda=-1) = 0$  (см. (6.2.6), (6.2.7)) уравнения (6.2.23)–(6.2.27) не содержат сингулярных членов.

Отметим, что простота получения уравнений связана с тем, что область  $I$  есть фактор-пространство:  $I = \Gamma/G$  — главное расслоение многообразия  $\Gamma$  по дискретной группе преобразований  $G$  с генераторами  $q_1, q_2$ . Это обстоятельство позволяет использовать преобразование Фурье на  $R$  и приводит к интегральным уравнениям обратной задачи рассеяния.

Эволюционная зависимость данных рассеяния дается простыми уравнениями:

$$\partial_t a = \partial_t \lambda_n = 0, \quad \partial_t \bar{b}(\lambda) = i\gamma^2(\lambda) \bar{b}(\lambda), \quad \partial_t \bar{b}_n = i\gamma^2(\lambda_n) \bar{b}_n. \quad (6.2.28)$$

Начальное условие

$$\mathbf{M}_1(x, t=0), \mathbf{M}_2(x, t=0), \partial_t \mathbf{M}_1(x, t)|_{t=0}, \partial_t \mathbf{M}_2(x, t)|_{t=0}$$

определяет данные рассеяния в начальный момент времени (при  $t=0$ ) в результате решения прямой задачи рассеяния. Из уравнений (6.2.28) получим зависимость этих данных от времени, а по формулам (6.2.27) найдем ядра  $F(\xi(\lambda), x, t)$ . Решение уравнений типа Гельфанда–Левитана–Марченко (6.2.23)–(6.2.26) определяет  $K_i(x, y, t)$  и явный вид  $\mathbf{I}(x, t)$  по формуле (6.2.11).

Многосолитонные решения уравнений ферримагнетика отвечают случаю  $\bar{b}(\lambda) = b(\lambda) \equiv 0$  и будут обсуждаться в следующем разделе.

### 6.3. Солитоны в ферримагнетике

*То, что ищешь, найдешь, только обыскав все.*

*Закон Буба*

Метод обратной задачи рассеяния позволяет полностью проинтегрировать модель ферримагнетика при равновесных распределениях

намагниченности на бесконечности, но он не является единственным способом получения точных решений. Для физических приложений часто интересны решения с другой асимптотикой. Хотя и в этом случае изложенный метод формально применим, решение прямой и обратной задач затруднено из-за отсутствия аналога преобразования Фурье, треугольного представления, сложностей с определением зависимостей ядер преобразования от спектрального параметра  $\lambda$ . Модифицированная схема — метод «одевания» с помощью задачи Римана — обладает необходимой универсальностью и эффективностью. Чтобы применить эту схему к нашему случаю, введем новые фундаментальные матрицы решений  $\Psi_1, \Psi_2$ :

$$\begin{aligned} (\Psi_1^{-1})_{\alpha 1} &= a^{-1}(\lambda) \varphi_{\alpha}(\lambda) \exp\left(\frac{i\lambda}{2}x\right), \quad (\Psi_1^{-1})_{\alpha 2} = a^{-1}(\lambda) \bar{\Psi}_a \exp\left(-\frac{i\lambda}{2}x\right); \\ (\Psi_2)_{\alpha 1} &= \Psi_{\alpha}(\lambda) \exp\left(\frac{i\lambda}{2}x\right), \quad (\Psi_2)_{\alpha 2} = \bar{\varphi}_{\alpha}(\lambda) \exp\left(-\frac{i\lambda}{2}x\right). \end{aligned}$$

Из (6.2.3), (6.2.4) следует, что на контуре  $\Gamma$  они удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} \Psi_1 \Psi_2 &= T_0(\lambda) G_0(\lambda) T_0^{-1}(\lambda) \equiv G(\lambda); \quad G_0(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \bar{b}_0(\lambda) \\ -\bar{b}_0(\lambda) & 1 \end{pmatrix}; \\ \Psi_2^{\dagger}(\lambda^*) &= \Psi_1(\lambda) \quad (\lambda \in \Gamma), \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

где  $b_0(\lambda) = b(\lambda, t = 0)$ ,  $\bar{b}_0(\lambda) = \bar{b}(\lambda, t = 0)$ ,

$$T_0(\lambda) = \exp\left[\frac{i}{2}(-\Lambda x + \gamma^2 t)\sigma_3\right]$$

есть частное решение уравнений (6.1.10) при  $\mathbf{l}_0 = (0, 0, 1)$ . Тогда решение обратной задачи рассеяния сводится к решению задачи Римана, т. е. к нахождению матриц  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$ , аналитических в областях  $D_1$  и  $D_2$ , и удовлетворяющих на контуре  $\Gamma$  условию сопряжения (6.3.1). В таком виде метод допускает обобщения и приводит к способу построения новых решений уравнений (6.1.9), (6.1.10) по произвольному частному решению  $T_0, U_0, V_0$  этих уравнений.

Матрицы нового решения  $T_1, T_2, U, V$  определяются с помощью калибровочного преобразования (преобразования Дарбу), осуществляемого матрицами  $\Psi_1, \Psi_2$ :

$$\begin{aligned} T_1 &= \Psi_1^{-1}(\lambda) T_0(\lambda), \quad T_2 = \Psi_2(\lambda) T_0(\lambda); \\ U &= (\partial_t \Psi_2 + \Psi_2 U_0) \Psi_2^{-1} = (\partial_t \Psi_1^{-1} + \Psi_1^{-1} U_0) \Psi_1; \end{aligned} \tag{6.3.2}$$

$$V = (\partial_x \Psi_2 + \Psi_2 V_0) \Psi_2^{-1} = (\partial_x \Psi_1^{-1} + \Psi_1^{-1} V_0) \Psi_1. \tag{6.3.3}$$

Матричные функции  $\Psi_1, \Psi_2$  являются решениями задачи Римана (6.3.1) на контуре  $\Gamma$  с заданной матрицей  $G_0(\lambda)$  и матрицей  $T_0$ , соответствующей частному решению  $\mathbf{l}_0(x, t)$ .

Из алгебраической структуры  $U$ - $V$ -пары следует возможность канонической нормировки функций задачи Римана:

$$\Psi_a(\lambda = \infty) = I \quad (a = 1, 2).$$

Редукция (6.2.5) запишется в виде:

$$\Psi_2(\lambda^{-1}) = \widehat{l} \Psi_2(\lambda) \widehat{l}_0 \equiv \Psi_2(\lambda = 0) \widehat{l}_0 \Psi_2(\lambda) \widehat{l}_0.$$

Солитонным решениям отвечает выбор  $G_0(\lambda) = I$ . Тогда  $|a(\lambda)| = 1$  на  $\Gamma$  и функция  $a(\lambda) \equiv a_s(\lambda)$  определяется своими нулями и полюсами:

$$a_s(\lambda) = \prod_{i=1}^N \left( \frac{\lambda - \lambda_i}{\lambda - \lambda_i^*} \right) \left( \frac{\lambda - \lambda_i^{-1}}{\lambda - (\lambda_i^*)^{-1}} \right). \quad (6.3.4)$$

Построим мероморфные в комплексной  $\lambda$ -плоскости матричные функции  $\Psi_1(\lambda)$  и  $\Psi_2(\lambda)$ , вырожденные в нулях и полюсах коэффициента  $a(\lambda)$  соответственно:

$$\det \Psi_1(\lambda) = a(\lambda), \quad \det \Psi_2(\lambda) = a^*(\lambda^*).$$

Для «затравочного» решения  $\mathbf{l}_0 = (0, 0, 1)$  ( $\widehat{l}_0 = \sigma_3$ ), используя процедуру, аналогичную изложенной в главе 3, мы нашли

$$(\Psi_1)_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \sum_{i,j=1}^{2N} \frac{(m_i)_\alpha (m_j^*)_\beta}{\lambda - \lambda_i^*} \frac{\partial \ln \det a}{\partial a_{ji}}, \quad (6.3.5)$$

$$\Psi_2(\lambda) = \Psi_1^\dagger(\lambda^*),$$

где  $a$  — матрица с элементами  $a_{ij} = (\mathbf{m}_i^* \cdot \mathbf{m}_j) (\lambda_i - \lambda_j^*)^{-1}$ ,

$$\mathbf{m}_k = T_0(\lambda_k^*) \mathbf{c}_k; \quad (6.3.6)$$

$$\lambda_{k+N} = \lambda_k^{-1}, \quad \mathbf{m}_{k+N} = \widehat{l}_0 \mathbf{m}_k \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (6.3.7)$$

$\mathbf{c}_k$  — произвольные постоянные двумерные векторы. Зависимость (6.3.6) с «затравочным» решением системы (6.2.1):

$$T_0(\lambda) = \exp \left[ \frac{i\lambda\sigma_3}{(1-\lambda^2)^2} (2\lambda t + (1+\lambda^2)x) \right]$$

обеспечивает отсутствие «лишних» полюсов в формулах (6.3.2), (6.3.3) в точках  $\lambda = \lambda_i, \lambda_i^*$ .

В общем случае, когда  $G_0(\lambda) \neq I$ , матричные функции  $\Psi_1(\lambda), \Psi_2(\lambda)$  факторизуются в виде:

$$\Psi_1(\lambda) = \Psi_1^{(0)}(\lambda) \varphi_1(\lambda), \quad \Psi_2(\lambda) = \varphi_2(\lambda) \Psi_2^{(0)}(\lambda).$$

Здесь  $\Psi_{1,2}^{(0)}(\lambda)$  определяются формулами (6.3.5)–(6.3.7), а  $\varphi_1(\lambda)$  и  $\varphi_2(\lambda)$  являются аналитическими матричными функциями в областях  $D_1$  и  $D_2$ . Упрощение решения задачи Римана вносится редукцией

$$\Psi_2^\dagger(\lambda^*) = \Psi_1(\lambda) \quad (\lambda \in \Gamma)$$

и соотношением

$$\Psi_1^{-1}(\lambda) = \sigma_2 \Psi_1^T(\lambda) \sigma_2 [\det \Psi_1(\lambda)]^{-1}.$$

Так же, как в разд. 2.9.1, применяя теорему Коши, находим для  $\varphi_2(\lambda)$  замкнутое интегральное уравнение типа Фредгольма ( $\lambda \in D_2$ ):

$$\varphi_2(\lambda) = I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\sigma_2 \varphi_2^*(\lambda') \sigma_2 [I - G(\lambda')]}{(\lambda' - \lambda) \det \varphi_1(\lambda')} d\lambda', \quad (6.3.8)$$

где

$$G(\lambda) = \Psi_2^{(0)}(\lambda) T_0(\lambda) G_0(\lambda) T_0^{-1}(\lambda) [\Psi_2^{(0)}(\lambda)]^{-1}.$$

При этом функция  $\det \varphi_1(\lambda)$  выражается через  $\det G_0(\lambda)$ . Действительно, из (6.3.1) следует, что  $|\det \varphi_1(\lambda)| = \sqrt{\det G_0(\lambda)}$ . Фаза функции  $\det \varphi_1(\lambda)$  определяется через ее модуль с помощью дисперсионного соотношения для  $\ln \det \varphi_1(\lambda)$ . Формулы (6.3.5), (6.3.8) позволяют по частному решению  $I_0(x, t)$  построить  $\Psi_a(x, t)$  и, следовательно, найти  $I(x, t)$ :

$$\hat{l} = \Psi_2(\lambda = 0) \hat{l}_0. \quad (6.3.9)$$

Наиболее трудная часть этой процедуры — построение матричной функции  $T_0(x, t, \lambda)$  — просто решается, когда  $I_0(x, t)$  зависит только от одной переменной  $t$  (или  $x$ ). Тогда уравнения (6.1.10) элементарно интегрируются с помощью калибровочного преобразования, которое диагонализует матрицу  $V$  (или  $U$ ). Отметим, что представленная процедура «одевания» приводит к широкому классу точных решений, но не исчерпывает многообразия всех решений. Причина состоит в том, что для некоторых «затравочных» решений аналитические свойства матричных функций  $\Psi_1(\lambda)$ ,  $\Psi_2(\lambda)$  формулируются на римановых поверхностях рода  $g \geq 1$ . В этом случае матричная задача Римана требует отдельного обсуждения. Одна из таких задач рассмотрена в гл. 3, другая — в гл. 9.

Приведем односолитонное решение модели (6.1.8), полученное «одеванием» частного решения  $I_0 = (0, 0, 1)$ :

$$\begin{aligned} l_1 + i l_2 &= -\frac{e^{-iS}}{\tau \sin \varepsilon \operatorname{sh} \rho} [\sin(\varepsilon + i\rho) e^y - \sin(\varepsilon - i\rho) e^{-y}], \\ l_3 &= 1 - \frac{2}{\tau}, \quad \tau = \frac{\operatorname{ch}^2 y}{\sin^2 \varepsilon} + \frac{\operatorname{sh}^2 y}{\operatorname{sh}^2 \rho}, \\ S + i y &= \frac{\beta}{\operatorname{sh}^2(\rho - i\varepsilon)} [x \operatorname{ch}(\rho - i\varepsilon) + ct], \end{aligned} \quad (6.3.10)$$

где  $\rho \neq 0$ ,  $\varepsilon \neq 0$ ,  $\pi$  — произвольные вещественные постоянные ( $\lambda_1 = \exp(\rho + i\varepsilon) \in D_1$ ). Здесь мы вернулись к исходным размерным переменным и опустили постоянные, связанные с инвариантностью уравнения (6.1.8) относительно пространственно-временных трансляций.

Решение (6.3.10) описывает прецессионный солитон. В системе координат, движущейся со скоростью солитона

$$V = -\frac{2c \cos \varepsilon \operatorname{ch} \rho}{\cos^2 \varepsilon + \operatorname{ch}^2 \rho}$$

векторы  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$  совершают неоднородную прецессию вокруг оси  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$  с частотой  $\omega = \partial_t S + V \partial_x S$ . Проекция  $l_3$  принимает значение  $\cos 2\varepsilon$  в центре солитона и стремится к равновесному значению  $l_3 = 1$  на бесконечности. Поведение комбинации  $l_\perp = \sqrt{l_1^2 + l_2^2}$  меняется в за-

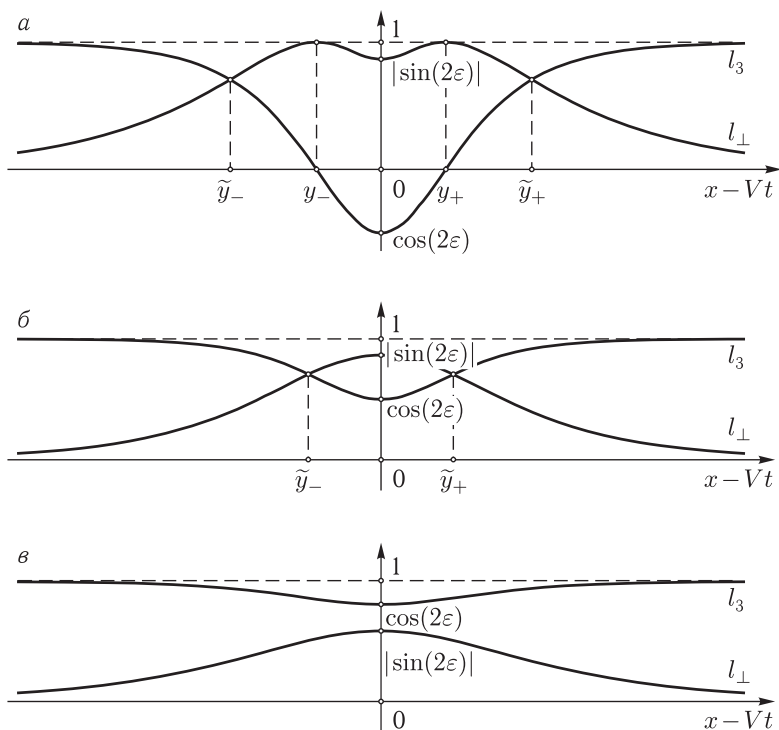


Рис. 6.2. Компоненты вектора антиферромагнетизма при  $\sin^2 \varepsilon > 1/2$  (а), при  $(2 - \sqrt{2})/4 < \sin^2 \varepsilon \leq 1/2$  (б), при  $\sin^2 \varepsilon \leq (2 - \sqrt{2})/4$  (в)



висимости от величины  $\varepsilon$  (см. рис. 6.2). На рис. 6.2 а, б:

$$y_{\pm} = \pm \operatorname{Arcsh} \sqrt{\frac{-\operatorname{sh}^2 \rho \cos 2\varepsilon}{\operatorname{sh}^2 \rho + \sin^2 \varepsilon}}, \quad \tilde{y}_{\pm} = \pm \operatorname{Arcsh} \sqrt{\frac{\operatorname{sh}^2 \rho [(4 + 2\sqrt{2}) \sin^2 \varepsilon - 1]}{\operatorname{sh}^2 \rho + \sin^2 \varepsilon}},$$

где значения  $\varepsilon$  таковы, что подкоренные выражения неотрицательны.

Выразим ширину солитона:  $d = (2 \partial_x y)^{-1}$  через его физические параметры — скорость и частоту прецессии:

$$d = \frac{1 - V^2 c^{-2}}{\beta \sqrt{1 - V^2 c^{-2} - (1 + 2\omega \beta^{-1} c^{-1})^2}}. \quad (6.3.11)$$

Из (6.3.11) следует, что локализованное возбуждение (6.3.9) существует только при условии

$$V^2 < c^2 \left[ 1 - \left( 1 + \frac{2\omega}{\beta c} \right)^2 \right].$$

Нетрудно показать, что граница области существования солитона соответствует закону дисперсии линейных квазиакустических магнонов, записанному в системе отсчета, движущейся с групповой скоростью магнонов.

В случае неподвижного солитона (при  $\varepsilon = \pi/2$ ):

$$\tau = \operatorname{ch}^2 y + \frac{\operatorname{sh}^2 y}{\operatorname{sh}^2 \rho}, \quad y = \frac{2\beta x \operatorname{sh} \rho}{\operatorname{ch}^2 \rho}, \quad S = -\frac{\beta c t}{\operatorname{ch}^2 \rho}.$$

Проекции намагниченностей подрешеток  $\mathbf{M}_1$ ,  $\mathbf{M}_2$  на ось  $Ox_3$  приведены на рис. 6.3. Поведение намагниченности каждой из подрешеток качественно совпадает с решением в изотропном ферромагнетике. Интересно, что в центре солитона из-за неэквивалентности подрешеток ферромагнетика образуется область перемагничивания.

В пределе  $\rho \rightarrow 0$  решение (6.3.10) вырождается в прецессирующий алгебраический солитон, которому отвечает не экспоненциальная зависимость от координаты  $x$ , а степенная:

$$\begin{aligned} l_3 &= 1 - \frac{2}{\tau}, \quad l_1 + i l_2 = -\frac{2}{\tau} \operatorname{ctg} \varepsilon e^{-iS} [y \sin \varepsilon + i \cos \varepsilon], \\ \tau &= y^2 + \frac{1}{\sin^2 \varepsilon}, \quad S = -\frac{\beta}{\sin^2 \varepsilon} [x \cos \varepsilon + ct], \\ y &= \frac{\beta}{\sin^4 \varepsilon} [x \sin \varepsilon (1 + \cos^2 \varepsilon) + ct \sin 2\varepsilon]. \end{aligned}$$

При этом вид графиков для  $l_3$  и  $l_{\perp}$  на рис. 6.2 качественно не меняется.

Общее  $N$ -солитонное решение модели (6.1.8) определяется заданием  $2N$  нулей функции  $a(\lambda)$  и постоянных векторов  $\mathbf{c}_k$ . Оно описывает

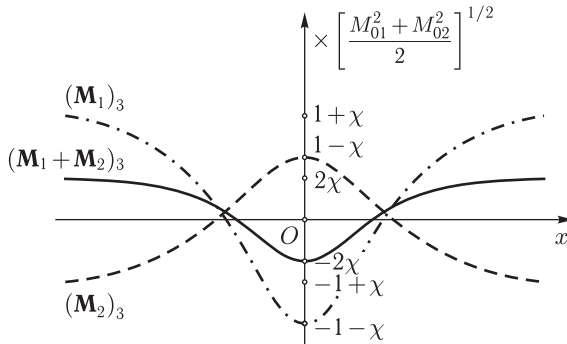


Рис. 6.3. Проекция на ось  $Ox_3$  намагниченностей подрешеток;  $\text{sh } \rho > 1$ ,  $\varepsilon = \pi/2$ ,  $\chi = (M_{01}^2 - M_{02}^2) [2(M_{01}^2 + M_{02}^2)]^{-1} > 0$

последовательность парных столкновений  $N$  локализованных волн типа (6.3.10).

Обсудим справедливость приближений, использованных при переходе от (6.1.2) к (6.1.4), (6.1.5). Длинноволновое приближение ограничивает ширину солитона  $d$ :

$$\frac{a}{d} = a |\beta \sin \varepsilon \text{sh } \rho| \left( \frac{\text{ch}^2 \rho + \cos^2 \varepsilon}{\text{ch}^2 \rho - \cos^2 \varepsilon} \right) \ll 1.$$

Из непосредственных вычислений следует, что условие  $\mathbf{m}^2 \ll \mathbf{l}^2$  эквивалентно неравенству

$$\frac{|M_{01}^2 - M_{02}^2|}{2(M_{01}^2 + M_{02}^2)} \left[ 1 + \left( \frac{\text{ch}^2 \rho \sin^2 \varepsilon - \text{sh}^2 \rho \cos^2 \varepsilon}{\text{ch}^2 \rho - \cos^2 \varepsilon} \right)^2 \right] \ll 1.$$

Оба неравенства справедливы, например, при  $\text{sh } \rho > 1$ .

## 6.4. Элементарные возбуждения в ферримагнетике

*Радости естествоиспытателя: зади-  
рать юбки природе.*

Ж. Ростан

Возможность полного описания динамики ферримагнетика связана с тем обстоятельством, что система (6.1.8) имеет бесконечный набор законов сохранения. В данном разделе мы устанавливаем связь важнейших из них — энергии, импульса и полного магнитного момента — с данными рассеяния. Это позволяет полностью проанализировать спектр и дисперсионные законы всех нелинейных возбуждений в ферримагнетике.

Для получения законов сохранения используются асимптотические формулы следов. Представим первую компоненту функции Йюста  $\varphi$  в виде

$$\varphi_1 = \exp \left( -\frac{i\Lambda}{2} x + \int_{-\infty}^x \chi(y, \lambda) dy \right).$$

Функция  $\chi(x, \lambda)$  вследствие (6.2.1) удовлетворяет уравнению типа Рикати:

$$-\frac{\Lambda^2}{4} - i\chi\Lambda + \chi^2 + \det V + \left( \frac{i\Lambda}{2} - \chi \right) \frac{\partial_x V_{12}}{V_{12}} - \partial_x \left( \frac{V_{11}}{V_{12}} \right) V_{12} + \partial_x \chi = 0. \quad (6.4.1)$$

Поскольку при  $x \rightarrow +\infty$   $\varphi_1 \exp(i\Lambda x/2)$  стремится к  $a(\lambda)$  (см. (6.2.2), (6.2.4)) и функция  $a(\lambda)$  не зависит от времени, величина  $\chi(\lambda, x)$  является плотностью интегралов движения:

$$\ln a(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(x, \lambda) dx. \quad (6.4.2)$$

Из разложения  $\chi(x, \lambda)$  в асимптотические ряды по степеням  $\lambda^{-1}$ ,  $\lambda \pm 1$  и уравнения (6.4.1) получаем три дискретных серии интегралов движения. Используя параметризацию  $\mathbf{l} = (\sin \theta \cos \Psi, \sin \theta \sin \Psi, \cos \theta)$ , приведем некоторые из них:

$$\lambda \chi(\lambda) \Big|_{\lambda \rightarrow \infty} = i (\partial_t \Psi \sin^2 \theta + \cos \theta - 1); \quad (6.4.3)$$

$$\begin{aligned} \chi(\lambda = 1) = \frac{i}{4} \left[ (\partial_t \theta + \partial_x \theta)^2 + \sin^2 \theta (\partial_t \Psi + \partial_x \Psi)^2 + \right. \\ \left. + 2(\cos \theta - 1) \partial_x \Psi \right]; \end{aligned} \quad (6.4.4)$$

$$\begin{aligned} \chi(\lambda = -1) = -\frac{i}{4} \left[ (\partial_t \theta - \partial_x \theta)^2 + \sin^2 \theta (\partial_t \Psi - \partial_x \Psi)^2 - \right. \\ \left. - 2(\cos \theta - 1) \partial_x \Psi \right]. \end{aligned} \quad (6.4.5)$$

Уравнениям движения (6.1.8) соответствует плотность функции Лагранжа:

$$\begin{aligned} L = (\cos \theta - 1) \partial_t \Psi + \\ + \frac{1}{2} \left[ (\partial_t \theta)^2 - (\partial_x \theta)^2 + (\partial_t \Psi)^2 \sin^2 \theta - (\partial_x \Psi)^2 \sin^2 \theta \right]. \end{aligned} \quad (6.4.6)$$

Циклической координате  $\Psi$  отвечает плотность канонического импульса

$$p_\Psi = \frac{\partial L}{\partial (\partial_t \Psi)} = \partial_t \Psi \sin^2 \theta + \cos \theta - 1$$

и интеграл движения

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\Psi}(x) dx. \quad (6.4.7)$$

С помощью функции Лагранжа стандартной процедурой [17, 18] находим выражения для энергии  $E$  и полевого импульса  $P$  ферримагнетика:

$$\begin{aligned} E &= \int dx \left( \frac{\partial L}{\partial(\partial_t \theta)} \partial_t \theta + \frac{\partial L}{\partial(\partial_t \Psi)} \partial_t \Psi - L \right) = \\ &= \int dx \left[ (\partial_t \theta)^2 + (\partial_x \theta)^2 + ((\partial_t \Psi)^2 + (\partial_x \Psi)^2) \sin^2 \theta \right]; \\ P &= \int dx \left( \frac{\partial L}{\partial(\partial_t \theta)} \partial_x \theta + \frac{\partial L}{\partial(\partial_t \Psi)} \partial_x \Psi \right) = \\ &= \int dx \left[ \partial_t \theta \partial_x \theta + \partial_t \Psi \partial_x \Psi + (\cos \theta - 1) \partial_x \Psi \right]. \end{aligned}$$

Выразим энергию  $E$  ферримагнетика, полевой импульс  $P$  и величину  $N$  через данные рассеяния. С этой целью введем аналитическую в области  $D_1$  функцию  $\ln a_1(\lambda) \equiv \ln[a(\lambda)/a_s(\lambda)]$ , где мероморфная (солитонная) функция  $a_s(\lambda)$  определяется формулой (6.3.4). Используя теорему Коши и дисперсионные соотношения (см. п. 2.5), получаем ( $\lambda \in D_1$ ):

$$\begin{aligned} \ln a_1(\lambda) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\ln a_1(\lambda')}{\lambda' - \lambda} d\lambda' = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\ln |a_1(\lambda')|}{\lambda' - \lambda} d\lambda'; \\ \ln a(\lambda) &= \ln \prod_{i=1}^N \left( \frac{\lambda - \lambda_i}{\lambda - \lambda_i^*} \right) \left( \frac{\lambda - \lambda_i^{-1}}{\lambda - \lambda_i^{*-1}} \right) - \\ &- \frac{2}{i\pi} \int_0^{\pi} \frac{\lambda \ln |a(\exp(i\varphi))| \sin \varphi}{(\exp(-i\varphi) - \lambda)(\exp(i\varphi) - \lambda)} d\varphi - \\ &- \frac{1}{i\pi} \int_{-1}^1 \ln |a(\lambda')| \left( \frac{1}{\lambda' - \lambda} - \frac{1}{\lambda'(1 - \lambda\lambda')} \right) d\lambda'. \end{aligned} \quad (6.4.8)$$

Тогда из (6.4.2)–(6.4.8) находим:

$$\begin{aligned} N &= -i \lambda \ln a(\lambda) \Big|_{\lambda \rightarrow \infty} = - \int_{-1}^1 N(\lambda) d\lambda + \\ &+ \int_0^{\pi} N(\varphi) d\varphi - 4 \sum_{i=1}^N \sin \varepsilon_i \operatorname{sh} \rho_i; \end{aligned} \quad (6.4.9)$$

$$E = i \ln \frac{a(\lambda = -1)}{a(\lambda = 1)} = \int_{-1}^1 E_a(\lambda) N(\lambda) d\lambda + \\ + \int_0^\pi N(\varphi) E_{\text{оп}}(\varphi) d\varphi + 4 \sum_{i=1}^N \operatorname{arctg} \left( \frac{\sin \varepsilon_i}{\operatorname{sh} \rho_i} \right); \quad (6.4.10)$$

$$P = -i \ln [a(\lambda = 1)a(\lambda = -1)] = - \int_{-1}^1 P_a(\lambda) N(\lambda) d\lambda + \\ + \int_0^\pi N(\varphi) P_{\text{оп}}(\varphi) d\varphi + 4 \sum_{i=1}^N \operatorname{arctg} (\operatorname{cth} \rho_i \operatorname{tg} \varepsilon_i). \quad (6.4.11)$$

Здесь использована параметризация  $\lambda_k = \exp(\rho_k + i\varepsilon_k) \in D_1$  и введены обозначения:

$$N(\lambda) = \frac{1}{\pi \lambda^2} (\lambda^2 - 1) \ln |a(\lambda)|, \quad N(\varphi) = \frac{2}{\pi} \sin \varphi \ln |a(\lambda = \exp(i\varphi))|, \\ E_a(\lambda) = \gamma^2(\lambda), \quad E_{\text{оп}}(\varphi) = -\gamma^2(\lambda = \exp(i\varphi)) = \frac{1}{\sin^2 \varphi}, \\ P_a(\lambda) = \Lambda(\lambda), \quad P_{\text{оп}}(\varphi) = \Lambda(\lambda = \exp(i\varphi)) = \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi}.$$

Отметим, что из (6.2.6), (6.2.7) следуют соотношения

$$|a(\lambda)|^2 + |b(\lambda)|^2 = 1 \quad (-1 \leq \lambda \leq 1); \quad |a(\lambda)|^2 - |b(\lambda)|^2 = 1 \quad (\lambda = \exp(i\varphi)),$$

которые гарантируют положительность величин  $N(\lambda)$ ,  $N(\varphi)$ .

Для интерпретации законов сохранения (6.4.9)–(6.4.11) рассмотрим слабовозбужденные состояния модели (6.1.8):

$$l_1 + i l_2 \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{p=1,2} \xi_p(k) \exp(i\omega_p t + i k x) dk, \quad |\xi_p(k)| \ll 1; \quad (6.4.12) \\ l_3 \approx 1,$$

с дисперсионным уравнением  $(\omega^2 - k^2)^2 - \omega^2 = 0$ , отвечающим квази-акустической (голдстоуновской) и квазиоптической модам колебаний:

$$\omega_1(k) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + 4k^2} - 1 \right); \quad \omega_2(k) = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + 4k^2} \right). \quad (6.4.13)$$

Для линейных мод (6.4.12) из прямой задачи рассеяния по формуле

$$b(\lambda) = \varphi_2 \exp \left( -\frac{i\Lambda(\lambda)}{2} x \right) \Big|_{x \rightarrow \infty}$$

получаем:

$$b(\lambda) \approx \pi i \sum_{p=1,2} \xi_p(k) \exp(it \omega_p(k)) [\gamma(\lambda) \omega_p(k) + (\delta(\lambda) - 1) k],$$

где  $k = \Lambda(\lambda)$ . Выражая  $\lambda$  через  $k$ , нетрудно убедиться, что в интегралы движения (6.4.9)–(6.4.11) при  $\lambda \in [-1, 1]$  дает вклад только акустическая мода колебаний, при  $\lambda = \exp(i\varphi)$ ,  $\varphi \in [0, \pi]$  — оптическая. Следовательно, первые два члена в (6.4.9)–(6.4.11) отвечают аддитивному вкладу линейных мод намагниченности: оптической ветви (с плотностью магнонов  $N(\varphi)$ ) и акустической ветви (с плотностью магнонов  $N(\lambda)$ ), которые удовлетворяют дисперсионным уравнениям:

$$E_a^2 + E_a - P_a^2 = 0; \quad E_{\text{оп}}^2 - E_{\text{оп}} - P_{\text{оп}}^2 = 0.$$

Остальные слагаемые в формулах (6.4.9)–(6.4.11) отвечают вкладам солитонов.

Выразим энергию отдельного солитона  $E_s$  через его импульс  $P_s$  и интеграл движения

$$N_s = 4 \sin \varepsilon \operatorname{sh} \rho,$$

физический смысл которого выяснится в ходе дальнейшего обсуждения. В результате имеем:

$$E_s = 4 \operatorname{arctg} \left[ \frac{N_s}{8 \cos^2(P_s/4)} \left( \sqrt{1 + \frac{16}{N_s^2} \sin^2(P_s/2)} - 1 \right) \right]. \quad (6.4.14)$$

В пределе  $P_s \rightarrow 0$  выражение (6.4.14) переходит в закон дисперсии  $N_s$  линейных голдстоуновских мод с квазиимпульсом  $P_s/N_s$  (см. (6.4.13)):

$$E_s \approx \frac{N_s}{2} \left( \sqrt{1 + 4(P_s/N_s)^2} - 1 \right).$$

Поэтому солитон ферромагнетика можно трактовать как связанное состояние большого числа  $N_s$  квазиакустических магнонов. Простые вычисления показывают, что при конечных значениях  $P_s$  и  $N_s$  энергия  $E_s/N_s$  на один связанный магнон меньше энергии свободного магнона при том же фиксированном импульсе  $P_s/N_s$  на одну квазичастицу.

Отметим, что «бесщелевой» характер солитонов приводит к возможности их возбуждения тепловыми флуктуациями или высокочастотным магнитным полем.

Из периодической зависимости энергии солитона от импульса следует, что физически различным состояниям солитона соответствуют значения импульса в интервале  $0 \leq P \leq 2\pi$ . В исходных размерных переменных энергия и импульс солитона содержат множители:

$$E_0 = \frac{\beta}{2} (M_{01}^2 + M_{02}^2) (\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3), \quad P_0 = \frac{E_0}{c},$$

и потому пропорциональны разности намагниченностей подрешеток ферримагнетика (см. определение в (6.1.6)).

Дальнейшие исследования [19] показали, что при учете энергии одноосной анизотропии появляются новые типы решений — доменные границы. Кроме того, в такой системе найдены двух- и трехмерные динамические солитоны с конечной энергией.

Итак, в настоящем разделе показано, что интегралы движения сильновозбужденных состояний ферримагнетика могут быть представлены в виде аддитивных вкладов от трех независимых типов возбуждений: квазиоптических и квазиакустических магнонов и солитонов. Солитоны могут интерпретироваться как связанные состояния большого числа магнонов.

Отметим также определенную универсальность интегрируемой модели (6.1.8). Она описывает не только динамику ферримагнетика, но и, например, нелинейные спиновые волны в жидком гелии [20]. В следующем разделе мы применим эту модель для анализа двумерных волн намагниченности в гейзенберговском ферромагнетике.

## 6.5. Двумерные волны прецессии в изотропном ферромагнетике

*Я знаю от чего я бегу, но не знаю,  
чего я ищу.*

*Монтень*

Интересно и важно, что свойство интегрируемости нелинейного уравнения не теряется после комплекснозначных масштабных преобразований пространственно-временных координат, хотя тип уравнения и характер его решений после таких преобразований, конечно, изменяются. В настоящем разделе, основанном на результатах наших работ [3, 21], показано, как посредством комплексных замен переменных уравнения одномерной динамики ферримагнетика могут быть преобразованы к модели, пригодной для анализа двумерных распределений намагниченности в изотропном ферромагнетике.

Будем рассматривать распределения намагниченности, структура и динамика которых описывается уравнением Ландау–Лифшица:

$$\partial_t \mathbf{S} = [\mathbf{S} \times (\partial_x^2 \mathbf{S} + \partial_y^2 \mathbf{S})], \quad \mathbf{S}^2 = 1. \quad (6.5.1)$$

Хотя к настоящему времени не установлена полная интегрируемость уравнения (6.5.1), метод обратной задачи рассеяния был успешно применен для описания динамики аксиально-симметричных распределений  $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$  [22] (см. гл. 2). Доказано отсутствие локализованных в пространстве волн намагниченности с радиальной симметрией. Любое локализованное в начальный момент времени распределение намагни-

ченности, зависящее только от расстояния от оси симметрии, расплывается с течением времени.

В этом разделе показано, что уравнение (6.5.1) допускает широкий класс точных решений вида

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(x, \tau), \quad \tau = y - \alpha t, \quad (6.5.2)$$

где  $\alpha$  — постоянный параметр. При значении  $\alpha = 0$  распределения (6.5.2) описывают двумерные инстантоны и нелинейные топологические дефекты — дисклинации в изотропных ферро- и антиферромагнетиках [3, 21, 23]. Далее ограничимся обсуждением двумерных прецессионных волн, которые, в отличие от аксиально-симметричных волн работы [22], сохраняют свою форму с течением времени. При взаимодействиях прецессионных волн друг с другом выполняется аналог асимптотического принципа суперпозиции.

Нелинейная динамика двумерных волн намагниченности вида (6.5.2) определяется уравнением

$$\alpha \partial_\tau \mathbf{S} + [\mathbf{S} \times (\partial_x^2 \mathbf{S} + \partial_\tau^2 \mathbf{S})], \quad \mathbf{S}^2 = 1. \quad (6.5.3)$$

Двумерное динамическое уравнение (6.5.3) и  $U$ - $V$ -пару для него:

$$\begin{aligned} \partial_x \chi &= V(\lambda) \chi, \quad \partial_\tau \chi = U(\lambda) \chi, \\ \partial_x U(\lambda) - \partial_\tau V(\lambda) + [U(\lambda), V(\lambda)] &= 0 \end{aligned} \quad (6.5.4)$$

получаем из уравнения (6.1.8) одномерной динамики ферритмагнетика и соответствующей ему  $U$ - $V$ -пары (6.1.11)–(6.1.14) после формальной замены:

$$\tau = \frac{t}{\alpha}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{i\alpha}, \quad \mathbf{l} = \mathbf{S}, \quad \lambda = -i\tilde{\lambda}.$$

Далее опускаем значок «тильда» над новыми переменными. Матрицы  $U(\lambda)$  и  $V(\lambda)$  имеют вид

$$\begin{aligned} V(\lambda) &= -\left(\gamma A + \delta B - \frac{i\alpha}{2} \Lambda \hat{S}\right), \\ U(\lambda) &= -\left(\delta A - \gamma B + \frac{i\alpha \gamma^2}{2} \hat{S}\right), \end{aligned} \quad (6.5.5)$$

где

$$A = \frac{i}{2} [\mathbf{S} \times \partial_\tau \mathbf{S}]_a \sigma_a, \quad B = \frac{i}{2} [\mathbf{S} \times \partial_x \mathbf{S}]_a \sigma_a, \quad \hat{S} = S_a \sigma_a \quad (a = 1, 2, 3). \quad (6.5.6)$$

Коэффициенты  $\gamma, \delta, \Lambda$  — функции спектрального параметра  $\lambda$ :

$$\delta(\lambda) = \frac{2}{1 + \lambda^2}, \quad \gamma(\lambda) = \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2}, \quad \Lambda(\lambda) = \frac{2\lambda(1 - \lambda^2)}{(1 + \lambda^2)^2}, \quad (6.5.7)$$



удовлетворяющие связям

$$\delta^2 - 2\delta + \gamma^2 = 0, \quad \Lambda = \gamma(\delta - 1).$$

Воспользуемся методом «одевания» для интегрирования модели (6.5.3). Из представления (6.5.4), (6.5.5)–(6.5.7) следует, что матрица  $S_k \sigma_k$  выражается через матричную функцию  $\chi(\lambda = 0)$ :

$$\hat{S} \equiv S_k \sigma_k = \chi(\lambda = 0). \quad (6.5.8)$$

Выполнение условий  $S_k^* = S_k$ ,  $\mathbf{S}^2 = 1$  гарантируют дополнительные ограничения на выбор решений  $\chi(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} \chi^\dagger(\lambda^*) &= \chi^{-1}(\lambda), \quad \chi(\lambda = \infty) = I; \\ \chi(-\lambda^{-1}) &= \hat{S} \chi(\lambda), \end{aligned} \quad (6.5.9)$$

которые не противоречат системе (6.5.4), (6.5.5)–(6.5.7).

Изложим процедуру нахождения солитонных решений модели (6.5.3). Пусть  $\mathbf{S}^{(0)}$  есть некоторое частное решение модели (6.5.3), а  $\chi_0(\lambda)$  — соответствующее ему решение вспомогательной системы (6.5.4). Представим новое решение модели (6.5.3) в форме

$$\chi(\lambda) = \Psi_1^{-1}(\lambda) \chi_0(\lambda), \quad \chi(\lambda) = \Psi_2(\lambda) \chi_0(\lambda),$$

где матричные функции  $\Psi_{1,2}(\lambda)$  мероморфны в комплексной  $\lambda$ -плоскости. На вещественной  $\lambda$ -оси они связаны условием сопряжения:

$$\Psi_1(\lambda) \Psi_2(\lambda) = I, \quad \Psi_2(\lambda) = \Psi_1^\dagger(\lambda).$$

Кроме того, из (6.5.4), (6.5.9) следует, что эти функции удовлетворяют канонической нормировке

$$\Psi_{1,2}(\lambda = \infty) = I$$

и нелинейной редукции:

$$\begin{aligned} \Psi_2(-\lambda^{-1}) &= \Psi_2(\lambda = 0) \hat{S}^{(0)} \Psi_2(\lambda) \hat{S}^{(0)}, \\ \Psi_1(-\lambda^{-1}) &= \hat{S}^{(0)} \Psi_2(\lambda) \hat{S}^{(0)} \Psi_1(\lambda = 0). \end{aligned}$$

С помощью такой же техники, что и в гл. 3, нетрудно найти общее решение сформулированной задачи Римана:

$$\begin{aligned} (\Psi_1(\lambda))_{\alpha\beta} &= \delta_{\alpha\beta} - \sum_{i,j=1}^{2N} \frac{(m_i)_\alpha (m_j)_\beta^*}{\lambda - \lambda_i^*} \frac{\partial \ln \det d}{\partial d_{ji}}, \quad \alpha, \beta = 1, 2; \\ \Psi_2(\lambda) &= \Psi_1^\dagger(\lambda^*). \end{aligned} \quad (6.5.10)$$

Здесь  $d$  — матрица с элементами

$$d_{ij} = (\mathbf{m}_i^* \cdot \mathbf{m}_j) (\lambda_i - \lambda_j^*)^{-1}, \quad \mathbf{m}_{k+N} = \widehat{S}^{(0)} \mathbf{m}_k, \quad \mathbf{m}_k = \chi_0 (\lambda_k^*) \mathbf{c}_k,$$

$\lambda_{k+N} = -\lambda_k^{-1}$ ,  $\lambda_k$  — комплексные числа,  $\mathbf{c}_k$  — произвольные постоянные комплексные векторы,  $k = 1, 2, \dots, N$ .

Согласно (6.5.8), новые точные решения модели (6.5.3) дает соотношение

$$S_k \sigma_k = \Psi_1^\dagger (\lambda = 0) \widehat{S}^{(0)}. \quad (6.5.11)$$

Проанализируем односолитонное решение уравнений Ландау–Лифшица (6.5.3), полученное «одеванием» тривиального решения этих уравнений:  $\mathbf{S}^{(0)} = (0, 0, 1)$  ( $\widehat{S}^{(0)} = \sigma_3$ ). В этом случае

$$\chi_0(\lambda) = \exp \left[ -\frac{i \alpha \lambda \sigma_3}{(1 + \lambda^2)^2} (2\lambda t - (1 - \lambda^2) x) \right] \left( \frac{\lambda + i \sigma_3}{\lambda + i} \right).$$

Здесь зависящий от параметра  $\lambda$  множитель введен для выполнения редукций (6.5.9). Он несущественен для вычисления векторов  $\mathbf{m}_k$ , так как приводит лишь к изменению произвольных постоянных  $\mathbf{c}_k$ . По формулам (6.5.10), (6.5.11) находим:

$$\begin{aligned} S_1 + i S_2 &= -2\mu^{-1} \exp [i (k_1 \xi + k_2 \eta - \Omega t)] \times \\ &\quad \times (\operatorname{th} \rho \operatorname{sh} n + i \operatorname{ctg} \delta \operatorname{ch} n), \\ S_3 &= 1 - \frac{2}{\mu}; \quad \mu = \frac{\operatorname{ch}^2 n}{\sin^2 \delta} - \frac{\operatorname{sh}^2 n}{\operatorname{ch}^2 \rho}, \quad n = \frac{1}{2d} [\xi - Vt], \\ d &= \frac{\cos^2 \delta + \operatorname{sh}^2 \rho}{2\alpha \sin \delta \operatorname{ch} \rho}, \quad (k_1, k_2) = \frac{\alpha (-\cos \delta \operatorname{sh} \rho, 1)}{\operatorname{sh}^2 \rho + \cos^2 \delta}, \\ \Omega &= \frac{\alpha^2 (\operatorname{ch}^2 \rho + \sin^2 \delta - 2 \operatorname{ch}^2 \rho \sin^2 \delta)}{(\operatorname{sh}^2 \rho + \cos^2 \delta)^2}. \end{aligned} \quad (6.5.12)$$

Здесь  $\rho, \delta$  — вещественные параметры ( $\lambda_1 = \exp(\rho + i\delta) \neq i$ ),  $\xi = (\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})$ ,  $\eta = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})$  — новые координаты в плоскости  $xOy$ ,  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{p}$  — два взаимно перпендикулярных единичных вектора:

$$\mathbf{q} = (\operatorname{sh}^2 \rho + \cos^2 \delta)^{-1} (\operatorname{sh}^2 \rho - \cos^2 \delta, -2 \cos \delta \operatorname{sh} \rho), \quad \mathbf{p} = (q_2, -q_1).$$

В плоскости  $xOy$  рассмотрим полосу шириной  $d$ , ограниченную двумя прямыми, перпендикулярными вектору  $\mathbf{q}$ , которая движется с постоянной скоростью  $V = \alpha q_2$ . Вне этой полосы распределение намагниченности, определяемое из (6.5.12), близко к равновесному значению:  $\mathbf{S} \approx (0, 0, 1)$ . Хотя протяженность солитона (6.5.12) в направлении  $\mathbf{q}$  не ограничена и, следовательно, его полная энергия должна

быть бесконечной, рассмотрение подобных решений представляет интерес, так как позволяет выяснить свойства физически реализуемых солитонов достаточно большой длины.

При перемещении вдоль любой прямой в плоскости  $xOy$ , параллельной вектору  $\mathbf{q}$  ( $\eta = \text{const}$ ), двумерный солитон (6.5.12) качественно напоминает одномерный солитон, рассмотренный в гл. 2. В этом сечении в системе координат, движущейся вместе с волной, вектор  $\mathbf{S}$  совершает прецессию вокруг оси  $Oz$  с частотой  $\omega = \Omega - k_1 V$ , причем компонента  $S_3$  и начальная фаза прецессии являются функциями от переменной  $\xi - Vt$ . Начальная фаза прецессии  $\varphi_0$  описывается суммой линейной функции от  $\xi - Vt$  и функции типа перегиба:

$$\varphi_0 = k_2 \eta + k_1 (\xi - Vt) + \text{arctg}(\text{ctg} \delta \text{cth} \rho \text{cth} n).$$

График зависимости  $S_3$  от  $\xi - Vt$  имеет вид «ямки», края которой при  $|\xi - Vt| \rightarrow \infty$  стремятся к значению  $S_3 \rightarrow 1$ . В центре солитона  $S_3$  достигает своего минимального значения,  $S_3 = \cos 2\delta$ . При  $\delta = \pi/2$  ( $\rho \neq 0$ ) скорость солитона обращается в нуль, а распределение намагниченности в центре солитона близко к другому равновесному значению,  $\mathbf{S} \approx (0, 0, -1)$ .

В отличие от одномерного солитона волна (6.5.12) не однородна в направлении, перпендикулярном  $\mathbf{q}$ . В сечении, перпендикулярном  $\mathbf{q}$ , решение (6.5.12) описывает нелокализованную волну прецессии, которая бежит по указанной выше полоске в плоскости  $xOy$ , как по своеобразному волноводу (рис. 6.4). В системе координат, движущейся со скоростью  $V\mathbf{q}$ , частота бегущей волны и ее волновой вектор соответственно равны  $\omega$  и  $\mathbf{k}$ .

С уменьшением параметра  $\delta$  ширина солитона  $d$  неограниченно увеличивается, его скорость  $V$  и волновой вектор  $\mathbf{k}$  стремятся к конечным

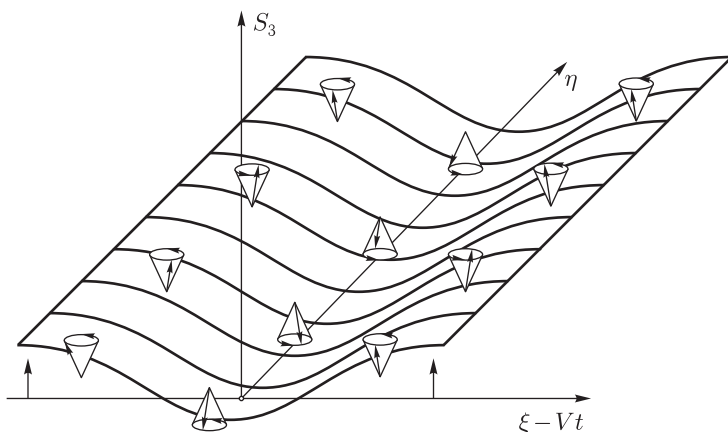


Рис. 6.4. Распределение намагниченности в двумерном прецессионном солитоне

значениям, а проекция  $S_3$  приближается к величине  $S_3 \approx 1$ , так что при любых конечных  $x$  и  $t$  решение (6.5.12) совпадает со спиновой волной малой амплитуды с законом дисперсии  $\Omega = \mathbf{k}^2$ .

Для двумерного солитона плотность энергии (импульса) и поток энергии зависят только от переменной  $\xi - Vt$ , причем плотность импульса и поток энергии разбиваются на два слагаемых. Первое слагаемое описывает перенос энергии (импульса) при распространении нелинейной волны как целого в направлении  $\mathbf{q}$ . Второе связано с переносом энергии (импульса) в поперечном направлении  $\mathbf{p}$ . Полные энергия  $E$  и импульс  $\mathbf{P}$ , приходящиеся на единицу длины вдоль направления  $\mathbf{p}$ , определяются формулами

$$E = \frac{4|\alpha \sin \delta| \operatorname{ch} \rho}{\operatorname{sh}^2 \rho + \cos^2 \delta}, \quad \mathbf{P} = 2\mathbf{p} \ln \frac{\operatorname{ch} \rho - \sin \delta}{\operatorname{ch} \rho + \sin \delta} + 4\mathbf{q} \operatorname{arctg}(\operatorname{th} \rho \operatorname{tg} \delta).$$

Мультисолитонные решения описывают рассеяние рассмотренных выше прецессионных солитонов. Поскольку каждая волна не ограничена в одном направлении, любые две волны всегда пересекаются в некоторой области плоскости  $xOy$  (рис. 6.5). В области пересечения взаимодействие волн интенсивно, а распределение намагниченности имеет достаточно сложный вид. Однако на большом расстоянии от области взаимодействия каждая из нелинейных волн восстанавливает свою исходную форму и скорость, характерную для односолитонного возбуждения. Если выделить участок на одной из нелинейных волн и наблюдать за распределением намагниченности этой волны, то можно показать, что после каждого прохождения через участок наблюдения остальных волн системы выделенная волна восстанавливает свою форму и скорость, а изменения ее начальной фазы прецессии и координаты центра аддитивно суммируются.

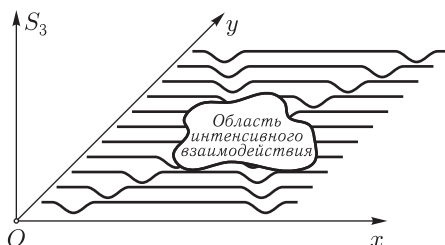


Рис. 6.5. Взаимодействие двух прецессионных волн намагниченности

В этом разделе получены основные формулы для точных решений уравнений Ландау–Лифшица изотропного ферромагнетика, когда намагниченность зависит только от переменных  $x, y - \alpha t$ . Кроме того, проанализированы основные черты динамики солитонов, локализованных только в одном направлении.

# ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА К МАКРОСКОПИЧЕСКОЙ ДИНАМИКЕ ГОЛДСТОУНОВСКИХ ВОЗБУЖДЕНИЙ В УПОРЯДОЧЕННЫХ МАГНЕТИКАХ

## 7.1. Основные интегрируемые модели метода феноменологических лагранжианов для магнитных систем

*Платоновское выражение, что бог является геометром, сегодня кажется более истинным, чем когда-либо. Мы все яснее видим, что наиболее общая математическая формулировка одновременно является и физически наиболее плодотворной... Математические формулы эффективно контролируют физические явления и могут даже привести к их открытию.*

А. Зоммерфельд.  
«Пути познания в физике»

В этой главе изложена предложенная нами [1–6] схема интегрирования уравнений Андреева–Волкова–Марченко–Желтухина (см. (1.6.19)):

$$a_{lj} \partial_t \omega_{j,0}(x, t) - c_{lj} \partial_x \omega_{j,1}(x, t) - b_n \varepsilon_{lnm} \omega_{m,0}(x, t) - \\ - \varepsilon_{lnm} a_{nk} \omega_{k,0}(x, t) \omega_{m,0}(x, t) + \varepsilon_{lnm} c_{nk} \omega_{k,1}(x, t) \omega_{m,1}(x, t) = 0. \quad (7.1.1)$$

Для упрощения записи введены следующие обозначения для форм Картана:

$$\omega_m(A, \partial_t A) \equiv \omega_{m,0}(x, t), \quad \omega_m(A, \partial_x A) \equiv \omega_{m,1}(x, t).$$

В углах Эйлера  $(A_1, A_2, A_3) \equiv (\theta, \varphi, \psi)$  матрица  $g(x, t) \in SU(2)$ , элементы матрицы  $D(x, t) \in SO(3)$  и формы Картана имеют вид:

$$g = \begin{pmatrix} \exp \left[ \frac{i}{2}(\varphi + \psi) \right] \cos(\theta/2) & i \exp \left[ \frac{i}{2}(\psi - \varphi) \right] \sin(\theta/2) \\ i \exp \left[ -\frac{i}{2}(\psi - \varphi) \right] \sin(\theta/2) & \exp \left[ -\frac{i}{2}(\varphi + \psi) \right] \cos(\theta/2) \end{pmatrix}; \quad (7.1.2)$$

$$\partial_\mu g g^\dagger = \frac{i}{2} \sigma_k \omega_{k,\mu}, \quad \mu = 0, 1; \quad g^\dagger \sigma_p g = \sigma_k D_{kp}$$

или, в более явной записи:

$$\begin{aligned}\omega_{1,\mu} &= \partial_\mu \varphi \sin \theta \sin \psi + \partial_\mu \theta \cos \psi, \\ \omega_{2,\mu} &= \partial_\mu \varphi \sin \theta \cos \psi - \partial_\mu \theta \sin \psi, \\ \omega_{3,\mu} &= \partial_\mu \varphi \cos \theta + \partial_\mu \psi.\end{aligned}\tag{7.1.3}$$

Как отмечалось в гл. 1, уравнения (7.1.1) описывают в обменном приближении нелинейную динамику длинноволновых спиновых голдстоуновских возбуждений. С обменной симметрией, реализованной правыми сдвигами на группе  $SU(2)$  ( $g(x, t) \rightarrow g(x, t)h_0$ ,  $h_0 \in SU(2)$ ), связан сохраняющийся ток с плотностью заряда:

$$S_{k0} = D_{kn} [b_n + a_{ni} \omega_{i,0}],$$

причем вектор  $\mathbf{S}_0$  через магнитомеханическое отношение  $\gamma$  определяет намагниченность среды:

$$M_k = -\hbar \gamma S_{k0} = -\hbar \gamma D_{kn} [b_n + a_{ni} \omega_{i,0}].\tag{7.1.4}$$

При определенном выборе параметров  $a_{ik}$ ,  $c_{ik}$ ,  $b_i$  спонтанного нарушения симметрии уравнения (7.1.1) определяют нелинейную динамику ряда магнетиков. В вырожденном случае ( $\det a = \det c = 0$ ) проекционные матрицы оставляют в (7.1.1) только уравнения для двух независимых голдстоуновских полей. Например, как показано в гл. 1, при условиях  $a_{ij} = 0$ ,  $c_{ij} = b_i b_j - \delta_{ij} \mathbf{b}^2$  и  $a_{ij}$ ,  $c_{ij} \propto (b_i b_j - \delta_{ij} \mathbf{b}^2)$  уравнения (7.1.1) описывают динамику гейзенберговского ферромагнетика и двухподрешеточного ферримагнетика соответственно.

Далее установлено, что уравнения (7.1.1) при ограничениях

$$a_{ij} \propto c_{ij}, \quad b_i = 0\tag{7.1.5}$$

или

$$a_{ij} \propto c_{ij} = \text{diag}(c_1, c_1, c_3), \quad \mathbf{b} = (0, 0, b_3)\tag{7.1.6}$$

интегрируемы методом обратной задачи рассеяния. При  $\mathbf{b} = 0$  приближение (7.1.6) справедливо для неколлинеарного антиферромагнетика  $\text{YMnO}_3$ . Остановимся на этом подробнее.

Шестиподрешеточный антиферромагнетик  $\text{YMnO}_3$  принадлежит классу веществ с химической формулой  $\text{AMnO}_3$  ( $A = \text{Y, Sc, Mo-Lu}$ ) — манганитов [7, 8]. Манганиты относятся к гексагональной сингонии (пространственная группа  $C_{6v}^3$ ). Магнитные моменты имеют только атомы марганца, которые расположены по три в двух чередующихся базисных плоскостях, смещенных друг относительно друга на полпериода вдоль гексагональной оси. При упорядочении атомы каждой тройки образуют равносторонний треугольник. Плоскости обоих треугольников совпадают и образуют угол  $\gamma$  с гексагональной осью (для  $\text{YMnO}_3$  угол  $\gamma = 90^\circ$ ). На рис. 7.1 схематически изображено расположение атомов

Мп и характер спиновой конфигурации в  $\text{YMnO}_3$ . Направления магнитных моментов указаны стрелками. Углы между магнитными моментами —  $120^\circ$ . Атомы, отмеченные крестиками, сдвинуты относительно остальных атомов на половину периода вдоль оси, перпендикулярной плоскости рисунка (гексагональная ось шестого порядка —  $Ox_3$ ). Более детально модель магнитной структуры  $\text{YMnO}_3$  в проекции вдоль оси  $Ox_3$  приведена на рис. 7.2. Атомы марганца отмечены черными кружочками, атомы кислорода — светлыми.

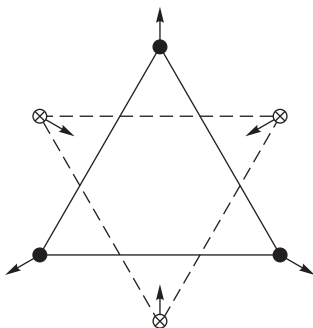
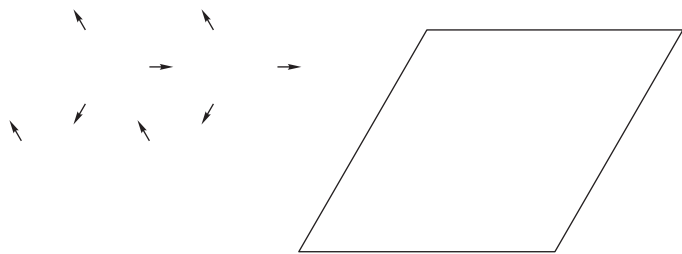


Рис. 7.1. Направления магнитных моментов атомов марганца в соединении  $\text{YMnO}_3$ . Пояснения см. в тексте



Сравнение коэффициентов в формулах (7.1.1), (7.1.6) и (1.6.19), (7.1.7) показывает, что модельные уравнения, рассматриваемые в настоящем разделе, при условии (7.1.6) и  $\mathbf{b} = 0$  описывают одномерные магнитные возбуждения, распространяющиеся вдоль оси шестого порядка в соединении  $\text{YMnO}_3$ .

Отметим также, что уравнения вида (7.1.1), (7.1.6) находят приложения при описании комбинационного рассеяния в оптике [10, 11].

В соответствии с общей теорией, изложенной в первой главе, уравнения (7.1.1), (7.1.5), (7.1.6) описывают квазиодномерную нелинейную динамику определенного класса неколлинеарных ферри- и антиферромагнетиков. Симметричный частный случай уравнений (7.1.1), (7.1.6), когда  $a_{ij} \propto c_{ij} \propto \delta_{ij}$ , при  $\mathbf{b} = (0, 0, b_3)$  описывает нелинейную динамику неупорядоченных неколлинеарных ферримagnetиков, а при  $\mathbf{b} = 0$  — динамику недиссипативного спинового стекла [9].

## 7.2. Построение $U$ – $V$ -пар. Основные соотношения

*Если рассмотреть проблему достаточно внимательно, то увидите себя как часть этой проблемы.*

*Аксиома Дучарма*

При ограничениях  $a_{ij} \propto c_{ij}$  уравнения спиновой динамики (7.1.1) и структурные уравнения Мауэра–Картана (1.6.10) записываются в компактной форме:

$$\begin{aligned} a_{lj} \partial_{\mu} \omega_j^{\mu} - b_n \varepsilon_{lnm} \omega_{m,0} - \varepsilon_{lnm} a_{nk} \omega_{k,\mu} \omega_{m,\mu}^{\mu} &= 0, \\ \varepsilon^{\mu\nu} \left( \partial_{\mu} \omega_{s,\nu} + \frac{1}{2} \varepsilon_{snp} \omega_{n,\mu} \omega_{p,\nu} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (7.2.1)$$

где  $x^{\mu} = (t, x)$  ( $\mu = 0, 1$ ) и принято, без потери общности,  $a_{ij} = c_{ij} = \text{diag}(a_1, a_2, a_3)$ . «Поднимание» и «опускание» индексов, обозначенных буквами греческого алфавита, осуществляется с помощью метрического тензора  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1)$ ,  $\varepsilon_{\mu\nu}$  — антисимметричный тензор ( $\varepsilon_{01} = 1$ ,  $\varepsilon^{01} = -1$ ),  $\varepsilon^{\mu\nu} \varepsilon_{\nu\rho} = \delta_{\rho}^{\mu}$  — символ Кронекера.

Представим уравнения (7.2.1) как условие совместности

$$\varepsilon^{\mu\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu} \Phi = 0 \quad (7.2.2)$$

системы линейных дифференциальных уравнений для комплексных матриц  $\Phi(x, t, \lambda)$ :

$$\partial_{\nu} \Phi = V_{\nu} \Phi. \quad (7.2.3)$$

Общий вид матричных функций  $V_{\nu}(x, t, \lambda)$  определяется инвариантностью уравнений (7.2.2) относительно группы Лоренца (при  $b_i = 0$ ) и правых сдвигов на группе  $SU(2)$ . Для последних формы  $\omega_{i,\mu}$  образу-



ют полный набор инвариантов, и, следовательно, в линейном и локальном по  $\omega_{i,\mu}$  приближении:

$$V_\mu = \frac{i}{2} (c_{lk} \omega_{k,\mu} + \varepsilon_{\mu\nu} d_{lk} \omega_{k,\nu} + f_{l\mu}) \sigma_l. \quad (7.2.4)$$

Здесь  $c_{ik}$ ,  $d_{ik}$ ,  $f_{i\mu}$  — пока еще неопределенные функции спектрального параметра  $\lambda$ ,  $\sigma_i$  — матрицы Паули.

Подставляя (7.2.3) в (7.2.2), получаем, что представление (7.2.2)–(7.2.4) эквивалентно уравнениям (7.2.1), если справедливы нелинейные алгебраические уравнения для коэффициентов  $c_{ik}$ , из которых, в частности, следует соотношение

$$(c^T c)_{lp} = 0 \quad (l \neq p).$$

Отсюда без потери общности можно считать, что отличны от нуля только следующие компоненты:

$$c_{12} = c_2, \quad c_{21} = c_1, \quad c_{33} = c_3, \quad d_{12} = d_2, \quad d_{21} = d_1, \quad d_{33} = d_3.$$

Тогда коэффициенты  $d_i$  простым образом выражаются через  $c_i$ :

$$d_1 = d^{-1} (c_1 c_3 + c_2) (c_1 c_2 + c_3) \quad (7.2.5)$$

(и циклическая перестановка индексов 1, 2, 3). Здесь введены сокращенные обозначения:

$$d = d_1 d_2 d_3, \quad c = c_1 c_2 c_3.$$

Кроме того, из алгебраических уравнений следует связь коэффициентов  $c_{ik}$  с параметрами  $a_{ik} = \text{diag} (a_1, a_2, a_3)$ :

$$\frac{a_1 - a_2}{a_3} = \frac{(c_1^2 - c_2^2) (c_1 c_2 + c_3)}{(c_1^2 + c_2^2 + c) c_3 + c_1 c_2} \quad (7.2.6)$$

(и циклическая перестановка индексов 1, 2, 3), а также ограничения

$$b_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{если} \quad a_1 \neq a_2 \neq a_3 \quad (7.2.7)$$

или

$$b_1 = b_2 = 0, \quad b_3 \neq 0 \quad \text{если} \quad a_1 = a_2 \neq a_3. \quad (7.2.8)$$

Коэффициенты  $f_{l\mu}$  отличны от нуля только во втором случае. Как будет ясно из дальнейшего, их вычисление не вызывает трудностей. Указанные ограничения накладывают жесткие условия на структуру интегрируемого уравнения.

Уравнения (7.2.6) не являются независимыми. Нетрудно проверить, что одно из них — следствие двух других. Поскольку число независимых уравнений (два) меньше числа неизвестных  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ , система (7.2.6) допускает решения, зависящие от комплексного параметра  $\lambda$ . Возможна униформизация, в которой отличные от нуля компоненты  $c_{ik}$  и  $d_{ik}$  представляют мероморфные функции параметра  $\lambda$ .

Обсудим вначале осесимметричный случай (7.2.8). В параметризации элементов группы  $SU(2)$  углами Эйлера (см. формулы (1.6.12), (7.1.3)) плотность лагранжиана для уравнений (7.2.1) при ограничениях (7.2.8) имеет вид:

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{2} (a_{ik} \omega_{i,\mu} \omega_{k,\mu} + 2 b_3 \omega_{3,0}) \equiv \\ \equiv \frac{1}{2} \left( a_1 \left[ (\partial_t \varphi)^2 \sin^2 \theta + (\partial_t \theta)^2 - (\partial_x \varphi)^2 \sin^2 \theta - (\partial_x \theta)^2 \right] + \right. \\ \left. + a_3 \left[ (\partial_t \varphi \cos \theta + \partial_t \psi)^2 - (\partial_x \varphi \cos \theta + \partial_x \psi)^2 \right] + \right. \\ \left. + 2 b_3 (\partial_t \varphi \cos \theta + \partial_t \psi) \right). \quad (7.2.9) \end{aligned}$$

Отсюда следует, что формальной заменой

$$\tilde{\psi} = \psi + \frac{b_3}{a_3} t$$

плотность лагранжиана и, следовательно, первое уравнение (7.2.1) преобразуются к случаю  $b_3 = 0$ :

$$a_{lj} \partial^\mu \omega_{j,\mu}(x, t) - \varepsilon_{lmn} a_{nk} \omega_{k,\mu}(x, t) \omega_{m,\mu}(x, t) = 0, \quad (7.2.10)$$

который и будем рассматривать в дальнейшем. В то время как модель (7.2.1), (7.2.8) с  $b_3 \neq 0$  соответствует средам со спонтанной намагниченностью  $\mathbf{M} = -\hbar \gamma(0, 0, b_3)$  в основном состоянии, т. е. ферромагнетикам, модель (7.2.10) описывает динамику неколлинеарных антиферромагнетиков.

Напомним, что длиннопериодические геликоидальные магнитные структуры в кристаллах без центра инверсии теоретически описываются инвариантами Лифшица вида  $\Lambda(l_1 \partial_x l_2 - l_2 \partial_x l_1)$  в разложении энергии магнетика ( $\mathbf{l}$  — вектор ферро- или антиферромагнетизма,  $\Lambda$  — феноменологическая постоянная). Некоторые антиферромагнетики с группой магнитной симметрии кристаллического класса  $C_{2h}^2$  допускают инвариант  $\Lambda[(\mathbf{l} \cdot \partial_x \mathbf{m}) - (\mathbf{m} \cdot \partial_x \mathbf{l})]$ , где  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{l}$  — векторы ферро- и антиферромагнетизма. Тогда их геликоидальная структура имеет обменное происхождение [12]. В подходе Андреева–Волкова–Марченко–Желтухина такие инварианты соответствуют слагаемым  $d_{i,l} \omega_i(A, \partial_l A)$  в выражении (1.6.13) для лагранжиана голдстоуновских мод. В [13] отмечалось, что метод феноменологических лагранжианов может использоваться, например, при анализе нелинейной динамики голдстоуновских мод в геликоидальных структурах соединений типа MnOON. Интересно и важно, что добавка к плотности лагранжиана (7.2.9) вида  $-d_3 \omega_{3,1}$  формально устраняется преобразованием

$$\tilde{\psi} = \psi + \frac{b_3}{a_3} t + \frac{d_3}{a_3} x$$

и приводит к уравнениям (7.2.10). Похожая ситуация встречалась в главе 4 при обсуждении нелинейных возбуждений на фоне геликои-

дальной структуры ферромагнетика. Таким образом, точные решения, описывающие квазиодномерную динамику широкого класса неколлинеарных ферри- и антиферромагнетиков с геликоидальной структурой, легко найти, выбирая подходящие решения интегрируемой осесимметричной модели (7.2.10).

Окончательные формулы упрощаются, если от переменных  $x, t$  перейти к новым переменным

$$\xi = \frac{t+x}{2}, \quad \eta = \frac{t-x}{2}.$$

В новых переменных уравнения динамики осесимметричной киральной модели (7.2.10) и уравнения Мауэра–Картана примут вид

$$\partial_\eta \omega_{l,\xi} + \partial_\xi \omega_{l,\eta} + h \varepsilon_{ln3} (\omega_{n,\eta} \omega_{3,\xi} + \omega_{n,\xi} \omega_{3,\eta}) = 0, \quad (7.2.11)$$

$$\partial_\eta \omega_{l,\xi} - \partial_\xi \omega_{l,\eta} + \varepsilon_{lnm} \omega_{n,\eta} \omega_{m,\xi} = 0, \quad (7.2.12)$$

где  $h = (a_3 - a_1)/a_1$ . Формы Картана  $\omega_{k,\xi}$ ,  $\omega_{k,\eta}$  определяются прежними формулами (7.1.2), (7.1.3), только дифференцирования производятся не по координатам  $x^\mu = (t, x)$ , а по переменным  $\xi, \eta$ .

При ограничении  $a_{ij} = \text{diag}(a_1, a_1, a_3)$  симметрия уравнений (7.2.11), (7.2.12) повышается до группы  $SU(2) \times SO(2)$ , которая включает, кроме правых сдвигов на группе  $SU(2)$  ( $g \rightarrow gh$ ,  $h \in SU(2)$ ), обусловленных изотропным характером обменных сил, также левые сдвиги:

$$g \rightarrow h_0 g, \quad h_0 = \exp\left(\frac{i}{2} \alpha \sigma_3\right) \in SO(2),$$

где  $\alpha$  — вещественный параметр. Согласно (7.1.2), при левых сдвигах формы Картана преобразуются по формулам

$$\omega'_{1,\mu} = \omega_{1,\mu} \cos \alpha + \omega_{2,\mu} \sin \alpha, \quad \omega'_{2,\mu} = \omega_{2,\mu} \cos \alpha - \omega_{1,\mu} \sin \alpha, \quad \omega'_{3,\mu} = \omega_{3,\mu}.$$

Лагранжиан осесимметричной модели инвариантен относительно таких преобразований, и это ведет к дополнительному закону сохранения (см. (7.2.11)):

$$\partial_\eta \omega_{3,\xi} + \partial_\xi \omega_{3,\eta} = 0. \quad (7.2.13)$$

Уравнения (7.2.11), (7.2.12) представим как условие совместности:

$$\partial_\eta U - \partial_\xi V + [U, V] = 0 \quad (7.2.14)$$

вспомогательной линейной системы

$$\partial_\xi \Phi = U \Phi, \quad \partial_\eta \Phi = V \Phi. \quad (7.2.15)$$

Используя униформизацию уравнений (7.2.5), (7.2.6), (7.2.8) рациональными функциями спектрального параметра  $\lambda$ , находим представление для комплексных матриц  $U(\lambda)$ ,  $V(\lambda)$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} U &\equiv V_0 + V_1 = \frac{i}{2} [l_2 (\sigma_1 \omega_{2,\xi} - \sigma_2 \omega_{1,\xi}) + l_1 \sigma_3 \omega_{3,\xi}], \\ V &\equiv V_0 - V_1 = \frac{i}{2} [l_4 (\sigma_1 \omega_{2,\eta} - \sigma_2 \omega_{1,\eta}) + l_3 \sigma_3 \omega_{3,\eta}]. \end{aligned} \quad (7.2.16)$$

Явный вид коэффициентов  $l_r$  ( $r = 1, 2, 3, 4$ ) зависит от области изменения параметра  $h$ . В дальнейшем будем рассматривать уравнения (7.2.11), (7.2.12) только при  $h > -1$ . Магнитные структуры, соответствующие значениям  $h < -1$ , не удовлетворяют критерию устойчивости: существуют локальные отклонения спинов от равновесия, которые уменьшают полную энергию магнетика. Если  $h = -1$ , то, как показано в гл. 1, уравнения (7.2.11), (7.2.12) сводятся к интегрируемым уравнениям, обсуждавшимся в гл. 6.

При  $-1 < h < 0$

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{\sqrt{-h} (p^2 + \lambda^2)}{p^2 - \lambda^2}, \quad l_2 = \frac{\lambda (p^2 - 1)}{p^2 - \lambda^2}, \\ l_3 &= \frac{\sqrt{-h} (p^2 \lambda^2 + 1)}{p^2 \lambda^2 - 1}, \quad l_4 = \frac{\lambda (p^2 - 1)}{p^2 \lambda^2 - 1}, \quad p^2 = \frac{1 + \sqrt{-h}}{1 - \sqrt{-h}}, \end{aligned} \quad (7.2.17)$$

а при  $h > 0$ :

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{\lambda^2 - 2\lambda\sqrt{h} - 1}{(\lambda - q)(\lambda + q^{-1})}, \quad l_2 = -\frac{\lambda^2 + 1}{(\lambda - q)(\lambda + q^{-1})}, \\ l_3 &= \frac{\lambda^2 + 2\lambda\sqrt{h} - 1}{(\lambda + q)(\lambda - q^{-1})}, \quad l_4 = -\frac{\lambda^2 + 1}{(\lambda + q)(\lambda - q^{-1})}, \\ q &= \frac{\sqrt{1+h} - 1}{\sqrt{h}} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{1+h} + 1}. \end{aligned} \quad (7.2.18)$$

При  $h = 0$  уравнения (7.2.11), (7.2.12) упрощаются и сводятся к уравнениям главного кирального поля, процедура интегрирования которых предложена в работах [14–16]. Механическим аналогом модели главного кирального поля служит совокупность взаимодействующих шаровых волчков с тензором моментов инерции  $a_{ik} = a_1 \delta_{ik}$ . В этом случае матрицы  $U$  и  $V$  имеют вид

$$U(\lambda) = \frac{i\omega_{k,\xi}\sigma_k}{2(1+\lambda)}, \quad V(\lambda) = \frac{i\omega_{k,\eta}\sigma_k}{2(1-\lambda)}. \quad (7.2.19)$$

Укажем ряд важных формул, связанных с представлением (7.2.14), (7.2.15).

Из соотношений

$$\text{Sp } U = \text{Sp } V = 0$$

и уравнений (7.2.15), как обычно, вытекает, что  $\det \Phi$  не зависит от переменных  $\xi, \eta$ , а из условий

$$U^\dagger(\lambda^*) = -U(\lambda), \quad V^\dagger(\lambda^*) = -V(\lambda)$$

следует, что решения  $\Phi^{-1}(\lambda)$  и  $\Phi^\dagger(\lambda^*)$  системы (7.2.15) можно выбрать совпадающими.

Кроме того, при  $h \neq 0$  из представлений (7.2.16)–(7.2.18) следуют соотношения инволюции:

$$\begin{aligned}\Phi(-\lambda) &= \sigma_1 \Phi^*(\lambda^*) \sigma_1, \quad -1 < h < 0; \\ \Phi(-\lambda^{-1}) &= \sigma_3 \Phi(\lambda) \sigma_3, \quad h > 0\end{aligned}\quad (7.2.20)$$

для решений системы (7.2.15). Когда  $h = 0$ , подобных ограничений нет.

Наконец, сравнивая определение форм Картана (7.1.2) с уравнениями (7.2.15)–(7.2.19) и учитывая тождества

$$\sigma_1 = \exp\left(\frac{i}{4}\pi\sigma_3\right)\sigma_2\exp\left(-\frac{i}{4}\pi\sigma_3\right), \quad \sigma_2 = -\exp\left(\frac{i}{4}\pi\sigma_3\right)\sigma_1\exp\left(-\frac{i}{4}\pi\sigma_3\right),$$

находим явное выражение матриц  $g(\xi, \eta)$  через определенные значения матричной функции  $\Phi(\xi, \eta, \lambda)$ :

$$\begin{aligned}g &= \exp\left(-\frac{i}{4}\pi\sigma_3\right)\Phi(\lambda=1)/\sqrt{\det\Phi(\lambda=1)}, \quad -1 < h < 0; \\ g &= \Phi(\lambda=0)/\sqrt{\det\Phi(\lambda=0)}, \quad h = 0; \\ g &= \exp\left(-\frac{i}{4}\pi\sigma_3\right)\Phi(\lambda=0)/\sqrt{\det\Phi(\lambda=0)}, \quad h > 0.\end{aligned}\quad (7.2.21)$$

Не зависящие от переменных  $\xi, \eta$  множители  $[\det\Phi]^{-1/2}$  введены в соотношения (7.2.21) для того, чтобы удовлетворить условию унитарности матрицы  $g(\xi, \eta)$ .

Поскольку основные формулы, приведенные в этом разделе, зависят от области изменения параметра  $h$ , схемы интегрирования уравнений (7.2.11), (7.2.12) при разных значениях  $h$  оказываются различными.

### 7.3. Нелинейная динамика недиссипативного спинного стекла. Модель главного кирального поля

*В той мере, в какой математические суждения относятся к реальности, они не достоверны, а в той мере, в какой они достоверны, они не относятся к реальности.*

А. Эйнштейн

В предположении, что спинное стекло является недиссипативной системой на частотах, превышающих характерное время рассасывания упругих напряжений, в работе [9] описание динамики спинного стекла сведено к задаче интегрирования уравнений главного кирального поля:

$$\partial_\eta \omega_{l,\xi} + \partial_\xi \omega_{l,\eta} = 0, \quad \partial_\eta \omega_{l,\xi} - \partial_\xi \omega_{l,\eta} + \varepsilon_{lmn} \omega_{n,\eta} \omega_{m,\xi} = 0. \quad (7.3.1)$$

Приведем плотность лагранжиана модели в нескольких эквивалентных формах записи:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \omega_{s,\xi}(\xi, \eta) \omega_{s,\eta}(\xi, \eta) = \frac{1}{2} [\omega_{s,0}^2(x, t) - \omega_{s,1}^2(x, t)] = \\ &= \frac{1}{4} [(\partial_t D_{kp})^2 - (\partial_x D_{kp})^2] = \text{Sp} (\partial_t g \partial_t g^\dagger - \partial_x g \partial_x g^\dagger). \end{aligned} \quad (7.3.2)$$

Здесь мы ввели безразмерные переменные и устранили коэффициенты в уравнениях посредством масштабных преобразований. При записи цепочки равенств (7.3.2) использованы определения форм Картана в терминах матриц  $D \in SO(3)$  и  $g \in SU(2)$ :

$$\omega_{n,\mu} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{nsp} D_{ks} \partial_\mu D_{kp}; \quad \partial_\mu g g^\dagger = \frac{i}{2} \sigma_k \omega_{k,\mu}. \quad (7.3.3)$$

Как показано в гл. 1, в силу тождества  $g^\dagger \sigma_p g = \sigma_k D_{kp}$ , определения (7.3.3) эквивалентны.

Плотность лагранжиана (7.3.2) примечательна тем, что является инвариантной формой относительно как левых, так и правых сдвигов на группе  $SO(3)$  (или  $SU(2)$ ). Первое уравнение (7.3.1) можно интерпретировать как закон сохранения токов, порожденных такой симметрией. Кроме того, уравнения и лагранжиан модели инвариантны относительно преобразований Лоренца.

Введем векторные поля:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} (\omega_{1,\xi}, \omega_{2,\xi}, \omega_{3,\xi}), \quad \mathbf{B} = \frac{1}{2} (\omega_{1,\eta}, \omega_{2,\eta}, \omega_{3,\eta})$$

и перепишем уравнения (7.3.1) в форме, удобной для дальнейшего анализа:

$$\partial_\eta \mathbf{A} = [\mathbf{A} \times \mathbf{B}], \quad \partial_\xi \mathbf{B} = [\mathbf{B} \times \mathbf{A}]. \quad (7.3.4)$$

Из уравнений (7.3.4) следует, что длина вектора  $\mathbf{A}$  не зависит от  $\eta$ , а длина вектора  $\mathbf{B}$  не зависит от  $\xi$ :

$$[\mathbf{A}(\xi, \eta)]^2 = A_0^2(\xi), \quad [\mathbf{B}(\xi, \eta)]^2 = B_0^2(\eta). \quad (7.3.5)$$

Это проявление дополнительной к симметрии обменного взаимодействия высокой пространственно-временной симметрии спинового стекла. Отсюда, в свою очередь, следует, что прежнее определение энергии системы (1.6.15) нуждается в модификации. Действительно, используя формулу (1.6.15), для энергии системы получаем выражение:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int [\omega_{s,0}^2(x, t) + \omega_{s,1}^2(x, t)] dx = \\ &= \int [\mathbf{A}^2(\xi, \eta) + \mathbf{B}^2(\xi, \eta)] dx = \int [A_0^2(\xi) + B_0^2(\eta)] dx, \end{aligned}$$

которое не зависит от вида полей  $\mathbf{A}(\xi, \eta)$  и  $\mathbf{B}(\xi, \eta)$ .

Трудностей с правильным определением энергии можно избежать, если разрешить связи (7.3.5) и ввести новые независимые поля. При этом возникает другая трудность — показать, что уравнения для новых полей являются лагранжевыми, т.е. вытекают из некоторого принципа наименьшего действия. Похожие проблемы возникают при обсуждении всех интегрируемых моделей этой главы. На примере модели главного кирального поля, следуя работам [14, 16], покажем, как преодолеть эти трудности.

Примем для простоты, что векторы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  имеют единичную длину:

$$\mathbf{A}^2 = 1, \quad \mathbf{B}^2 = 1. \quad (7.3.6)$$

В трехмерном пространстве линейно независимые векторы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]$  образуют локальный базис. Уравнения динамики (7.3.4) можно интерпретировать как результат разложения векторов  $\partial_\eta \mathbf{A}$ ,  $\partial_\xi \mathbf{B}$  по векторам локального базиса. Разложения векторов  $\partial_\xi \mathbf{A}$ ,  $\partial_\eta \mathbf{B}$  по тем же векторам должны иметь вид

$$\begin{aligned} \partial_\xi \mathbf{A} &= [\mathbf{A} \times (a_1 \mathbf{B} + a_2 [\mathbf{A} \times \mathbf{B}])], \\ \partial_\eta \mathbf{B} &= [\mathbf{B} \times (b_1 \mathbf{A} + b_2 [\mathbf{A} \times \mathbf{B}])], \end{aligned} \quad (7.3.7)$$

где  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  — числовые функции. При записи представления (7.3.7) учтены тождества

$$(\partial_\xi \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) = (\partial_\eta \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) = 0,$$

которые являются следствиями нормировки (7.3.6).

Коэффициенты  $a_2$ ,  $b_2$  найдем, вычисляя с помощью формул (7.3.4), (7.3.7) производные  $\partial_\xi (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ ,  $\partial_\eta (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ . Полагая  $\cos \alpha = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ , получаем:

$$a_2 = \frac{\partial_\xi \alpha}{\sin \alpha}, \quad b_2 = -\frac{\partial_\eta \alpha}{\sin \alpha}.$$

Вычисляя  $(\partial_\xi \mathbf{A} \cdot \partial_\xi \mathbf{B})$ ,  $(\partial_\eta \mathbf{A} \cdot \partial_\eta \mathbf{B})$ , находим представления для коэффициентов  $a_1$ ,  $b_1$ :

$$a_1 = \frac{M}{\sin \alpha}, \quad b_1 = \frac{N}{\sin \alpha}, \quad M = -\frac{(\partial_\xi \mathbf{A} \cdot \partial_\xi \mathbf{B})}{\sin \alpha}, \quad N = -\frac{(\partial_\eta \mathbf{A} \cdot \partial_\eta \mathbf{B})}{\sin \alpha}.$$

Условия совместности

$$\partial_\eta \partial_\xi \mathbf{A} = \partial_\xi \partial_\eta \mathbf{A}, \quad \partial_\eta \partial_\xi \mathbf{B} = \partial_\xi \partial_\eta \mathbf{B}$$

приводят к системе из трех уравнений:

$$\partial_\eta M = -\frac{\partial_\xi \alpha N}{\sin \alpha}, \quad \partial_\xi N = -\frac{\partial_\eta \alpha M}{\sin \alpha}, \quad (7.3.8)$$

$$\partial_\xi \partial_\eta \alpha + \sin \alpha - \frac{MN}{\sin \alpha} = 0. \quad (7.3.9)$$

Из (7.3.8) находим:

$$\partial_\eta \left( M \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) + \partial_\xi \left( N \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) = 0,$$

так что

$$\partial_\xi \beta = M \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad \partial_\eta \beta = -N \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

В результате уравнения (7.3.8), (7.3.9) сводятся к замкнутой системе для расчета полей  $\alpha$ ,  $\beta$ :

$$\begin{aligned} \partial_\xi \partial_\eta \alpha + \sin \alpha + \frac{\cos(\alpha/2)}{2 \sin^3(\alpha/2)} \partial_\xi \beta \partial_\eta \beta &= 0, \\ \partial_\xi \partial_\eta \beta - \frac{\partial_\xi \alpha \partial_\eta \beta + \partial_\eta \alpha \partial_\xi \beta}{\sin \alpha} &= 0. \end{aligned} \quad (7.3.10)$$

Нетрудно проверить, что плотность функции Лагранжа для уравнений (7.3.10) имеет вид

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \partial_\xi \alpha \partial_\eta \alpha + \frac{1}{2} \partial_\xi \beta \partial_\eta \beta \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} + \cos \alpha - 1 = \\ &= \frac{1}{2} \left[ (\partial_t \alpha)^2 - (\partial_x \alpha)^2 \right] + \frac{1}{2} \left[ (\partial_t \beta)^2 - (\partial_x \beta)^2 \right] \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} + \cos \alpha - 1. \end{aligned}$$

Отсюда стандартной процедурой находим обобщенные импульсы:

$$p_\alpha = \partial_t \alpha, \quad p_\beta = \partial_t \beta \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}$$

и плотность энергии:

$$\begin{aligned} p_\alpha \partial_t \alpha + p_\beta \partial_t \beta - L &= \frac{1}{2} \left[ (\partial_t \alpha)^2 + (\partial_x \alpha)^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ (\partial_t \beta)^2 + (\partial_x \beta)^2 \right] \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} + 1 - \cos \alpha. \end{aligned}$$

Возвращаясь к полям  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ , получаем следующее выражение для энергии системы:

$$\begin{aligned} E &= \int \left[ \frac{1}{4} \left( [\partial_\xi (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})]^2 + [\partial_\eta (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})]^2 + (\partial_\xi \mathbf{A} \cdot \partial_\xi \mathbf{B})^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\partial_\eta \mathbf{A} \cdot \partial_\eta \mathbf{B})^2 \right) \left[ 1 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 \right]^{-1} + 1 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \right] dx. \end{aligned}$$

В общем случае нормировка полей (7.3.5) отличается от (7.3.6). Однако, полагая

$$\mathbf{A}(\xi, \eta) = A_0(\xi) \tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}), \quad \mathbf{B}(\xi, \eta) = B_0(\eta) \tilde{\mathbf{B}}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}),$$

где

$$\tilde{\xi} = \int A_0(\xi) d\xi, \quad \tilde{\eta} = \int B_0(\eta) d\eta,$$

перейдем в переменных  $\tilde{\mathbf{A}}$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}$ ,  $\tilde{\xi}$ ,  $\tilde{\eta}$  к рассмотренному ранее случаю.



Для построения солитонных решений модели (7.3.1) используем процедуру «одевания» частных решений с помощью матричной задачи Римана с нулями в комплексной  $\lambda$ -плоскости. В качестве «затравочно-го» решения уравнений (7.3.1) выберем

$$\begin{aligned} g_0(\xi, \eta) &= \exp \left( \frac{i\sigma_3}{2} [A(\xi) + B(\eta)] \right), \\ \omega_{3,\xi}^{(0)} &= \partial_\xi A(\xi), \quad \omega_{3,\eta}^{(0)} = \partial_\eta B(\eta), \\ \omega_{a,\xi}^{(0)} &= \omega_{a,\eta}^{(0)} = 0, \quad a = 1, 2, \end{aligned} \quad (7.3.11)$$

где  $A(\xi)$  и  $B(\eta)$  — произвольные функции от переменных  $\xi$  и  $\eta$  соответственно. В этом случае отличные от нуля элементы матрицы  $D^{(0)} \in SO(3)$ ,

$$D_{11}^{(0)} = D_{22}^{(0)} = \cos(A + B), \quad D_{21}^{(0)} = -D_{12}^{(0)} = \sin(A + B), \quad D_{33}^{(0)} = 1,$$

описывают локальные повороты спиновых моментов среды вокруг оси  $Ox_3$ , изменяющие значения антиферромагнитных векторов равновесной обменной структуры (см. гл. 1). Решение вспомогательной линейной системы (7.2.15), (7.2.19), отвечающее такому выбору, имеет вид

$$\Phi_0(\xi, \eta, \lambda) = \exp \left[ \frac{i\sigma_3}{2} \left( \frac{A(\xi)}{1 + \lambda} + \frac{B(\eta)}{1 - \lambda} \right) \right].$$

Заметим, что в данной задаче на решения линейной системы (7.2.15), (7.2.19) налагаются такие же ограничения, что и в гл. 2 при обсуждении общей схемы «одевания». Поэтому сразу приведем явный вид нового решения вспомогательной системы, которое соответствует  $N$  солитонам:

$$\begin{aligned} \Phi(\xi, \eta, \lambda) &= \Psi(\xi, \eta, \lambda) \Phi_0(\xi, \eta, \lambda), \\ \det \Psi &= \prod_{k=1}^N \frac{(\lambda - \mu_k)}{(\lambda - \mu_k^*)}, \quad \Psi^{-1}(\lambda) = \Psi^\dagger(\lambda^*), \\ [\Psi(\lambda)]_{\sigma\sigma'} &= \delta_{\sigma\sigma'} + \sum_{k,n=0}^N \frac{(m_k)_\sigma (m_n)_{\sigma'}^*}{\lambda - \mu_n^*} \frac{\partial \ln \det A}{\partial A_{nk}}, \end{aligned} \quad (7.3.12)$$

где  $\sigma, \sigma' = 1, 2$ ;  $A$  —  $N \times N$ -матрица с элементами

$$A_{ij} = \frac{(\mathbf{m}_i^* \cdot \mathbf{m}_j)}{\mu_i^* - \mu_j} = -A_{ji}^*, \quad \mathbf{m}_j = \Phi_0(\xi, \eta, \mu_j) \mathbf{c}_j,$$

$\mu_k$  — независимые простые комплексные нули задачи Римана,  $\mathbf{c}_j = (c_j^{(1)}, c_j^{(2)})$  — произвольные комплексные векторы.

По формулам (7.2.21), (7.3.12) находим мультисолитонные решения уравнений (7.3.1) главного кирального поля:

$$g(\xi, \eta) = \Psi(\xi, \eta, \lambda = 0) g_0(\xi, \eta) \left[ \prod_{k=1}^N \frac{\mu_k^*}{\mu_k} \right]^{1/2}.$$

Покажем, что вычисление форм Картана сводится к алгебраическим операциям. В терминах  $\Psi$  уравнения (7.2.15) можно записать в виде

$$\begin{aligned} U(\lambda) &= [\partial_\xi \Psi(\lambda) + \Psi(\lambda) U_0(\lambda)] \Psi^\dagger(\lambda), \\ V(\lambda) &= [\partial_\eta \Psi(\lambda) + \Psi(\lambda) V_0(\lambda)] \Psi^\dagger(\lambda), \end{aligned} \quad (7.3.13)$$

где  $U_0, V_0$  — значения матричных функций  $U, V$  (7.2.19) на «затра- вочном» решении (7.3.11). Приравнявая вычеты в полюсах равенств (7.3.13), получаем формы Картана для мультисолитонных состояний:

$$\begin{aligned} \omega_{k,\xi} \sigma_k &= \Psi(\lambda = -1) \sigma_3 \Psi^\dagger(\lambda = -1) \partial_\xi A(\xi), \\ \omega_{k,\eta} \sigma_k &= \Psi(\lambda = 1) \sigma_3 \Psi^\dagger(\lambda = 1) \partial_\eta B(\eta). \end{aligned}$$

Односолитонное решение модели в терминах матрицы  $g$  имеет вид

$$\begin{aligned} g(\xi, \eta) &= \left( 1 + \frac{\mu - \mu^*}{\mu^*} P \right) g_0(\xi, \eta) \sqrt{\frac{\mu^*}{\mu}}, \\ P &= \frac{1}{2 \operatorname{ch} y} \begin{pmatrix} \exp(y) & \exp(iS) \\ \exp(-iS) & \exp(-y) \end{pmatrix}, \\ y &= \mu'' \left( \frac{A(\xi)}{|1 + \mu|^2} - \frac{B(\eta)}{|1 - \mu|^2} \right) + \ln \left| \frac{c^{(1)}}{c^{(2)}} \right|, \\ S &= \frac{1 + \mu'}{|1 + \mu|^2} A(\xi) + \frac{1 - \mu'}{|1 - \mu|^2} B(\eta) + \arg \frac{c^{(1)}}{c^{(2)}}, \quad \mu \equiv \mu' + i\mu''. \end{aligned} \quad (7.3.14)$$

Когда

$$A(\xi) = (t + x) a, \quad B(\eta) = (t - x) b \quad (a, b = \text{const}),$$

решение (7.3.14) представляет уединенную волну, имеющую постоянную скорость  $V$  и область локализации  $d$ :

$$V = \frac{b|1 + \mu|^2 - a|1 - \mu|^2}{b|1 + \mu|^2 + a|1 - \mu|^2}, \quad d \sim \frac{|1 - \mu^2|^2}{|\mu''(b|1 + \mu|^2 + a|1 - \mu|^2)|}.$$

Распределение намагниченности, соответствующее такому решению, имеет однородную асимптотику на пространственной бесконечности:  $\mathbf{M} = -\hbar \gamma(0, 0, a + b)$ . Отсюда следует, что линейные функции  $A(\xi), B(\eta)$  приводят к описанию солитонов в неупорядоченных ферримагнетиках. Взаимосвязь моделей спинового стекла и неупорядоченного неколлинеарного ферримагнетика отмечалась в разд. 7.1, 7.2.

## 7.4. Динамика неколлинеарного антиферромагнетика со структурой типа $\text{YMnO}_3$ . Осесимметричная киральная модель

*Я занимался до сих пор решением задач, ибо при изучении наук примеры полезнее правил.*

*И. Ньютон*

### 7.4.1. Процедура интегрирования модели

Опишем процедуру интегрирования уравнений (7.2.11), (7.2.12) при значениях  $-1 < h < 0$ . В дальнейшем анализе используется нормировка матричных функций задачи Римана на единичную матрицу в точке  $\lambda = \infty$  (каноническая нормировка). Для согласования такой нормировки с видом  $U$ - $V$ -пары введем новую матричную функцию  $\chi(\lambda)$ :

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda) &= \Phi(\lambda = \infty) \chi(\lambda), \\ \Phi(\lambda = \infty) &= \exp \left[ \frac{i\sigma_3}{2} \sqrt{-h} \left( - \int_{\xi_0}^{\xi} \omega_{3,\xi'}(\xi', \eta) d\xi' + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{\eta_0}^{\eta} \omega_{3,\eta'}(\xi_0, \eta') d\eta' \right) \right].\end{aligned}\tag{7.4.1}$$

Здесь  $\Phi(\lambda = \infty)$  — решение системы (7.2.15)–(7.2.17) при  $\lambda = \infty$ , записанное с учетом закона сохранения (7.2.13). Система уравнений для  $\chi$ :

$$\begin{aligned}\partial_{\xi} \chi &= \Phi^{\dagger}(\lambda = \infty) [U(\lambda) - U(\lambda = \infty)] \Phi(\lambda = \infty) \chi \equiv \tilde{U}(\lambda) \chi, \\ \partial_{\eta} \chi &= \Phi^{\dagger}(\lambda = \infty) [V(\lambda) - V(\lambda = \infty)] \Phi(\lambda = \infty) \chi \equiv \tilde{V}(\lambda) \chi\end{aligned}\tag{7.4.2}$$

калибровочно эквивалентна системе (7.2.15)–(7.2.17). Ее решение представим в форме

$$\chi(\lambda) = \Psi(\lambda) \chi_0(\lambda),\tag{7.4.3}$$

где  $\chi_0(\lambda)$  — решение линейных уравнений (7.4.2), соответствующее некоторому частному решению исходной осесимметричной киральной модели (7.2.11), (7.2.12). Замечательно, что не только модель главного кирального поля (7.3.1), но также осесимметричная и даже асимметричная (7.2.7), (7.2.10) киральные модели имеют частное решение (7.3.11). Далее, для определенности, выберем его в качестве

«затравочного» решения нелинейных уравнений (7.2.11), (7.2.12). Тогда соответствующим решением линейной системы (7.4.2) будет

$$\chi_0(\lambda) = \exp \left[ i\sigma_3 \left( \frac{p^2(p^2 - 1)A(\xi)}{(p^2 + 1)(p^2 - \lambda^2)} + \frac{p^{-2}(p^{-2} - 1)B(\eta)}{(p^{-2} + 1)(p^{-2} - \lambda^2)} \right) \right]. \quad (7.4.4)$$

Матрица  $\Psi(\lambda)$  определяется из задачи Римана с канонической нормировкой. Она унитарна при  $\lambda \in R$  и, вследствие инволюции (7.2.20), удовлетворяет ограничению

$$\Psi(-\lambda) = \sigma_1 \Psi^*(\lambda^*) \sigma_1. \quad (7.4.5)$$

Для солитонных решений модели (7.2.11), (7.2.12) такую матричную функцию находим стандартными методами, изложенными в гл. 2 и 3:

$$\begin{aligned} [\Psi(\lambda)]_{\sigma\sigma'} &= \delta_{\sigma\sigma'} + \sum_{i,j=0}^{2N} \frac{(m_i)_\sigma (m_j)_{\sigma'}^*}{\lambda - \mu_j^*} \frac{\partial \ln \det A}{\partial A_{ji}}, \\ \det \Psi &= \prod_{j=1}^{2N} \frac{(\lambda - \mu_j)}{(\lambda - \mu_j^*)}, \quad \Psi^{-1}(\lambda) = \Psi^\dagger(\lambda^*), \end{aligned} \quad (7.4.6)$$

где  $\sigma, \sigma' = 1, 2$ ;  $A$  —  $2N \times 2N$ -матрица с элементами

$$A_{ij} = \frac{(\mathbf{m}_i^* \cdot \mathbf{m}_j)}{\mu_i^* - \mu_j} = -A_{ji}^*.$$

Чтобы удовлетворить редукции (7.4.5) и условию отсутствия лишних полюсов в «одевающих» соотношениях, комплексные числа  $\mu_j$  и векторы  $\mathbf{m}_j$  следует подчинить ограничениям:

$$\mu_{k+N} = -\mu_k^*, \quad \mathbf{m}_{k+N} = \sigma_1 \mathbf{m}_k^*, \quad \mathbf{m}_k = \chi_0(\xi, \eta, \mu_k) \mathbf{c}_k, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

где  $\mathbf{c}_k$  — произвольные постоянные комплексные векторы.

Формы Картана для мультисолитонных состояний модели (7.2.11), (7.2.12) найдем по «затравочному» решению  $\tilde{U}_0(\lambda)$ ,  $\tilde{V}_0(\lambda)$  из «одевающих» соотношений:

$$\begin{aligned} \Phi^\dagger(\lambda = \infty) [U(\lambda) - U(\lambda = \infty)] \Phi(\lambda = \infty) &= \\ &= [\partial_\xi \Psi(\lambda) + \Psi(\lambda) \tilde{U}_0(\lambda)] \Psi^\dagger(\lambda), \\ \Phi^\dagger(\lambda = \infty) [V(\lambda) - V(\lambda = \infty)] \Phi(\lambda = \infty) &= \\ &= [\partial_\eta \Psi(\lambda) + \Psi(\lambda) \tilde{V}_0(\lambda)] \Psi^\dagger(\lambda). \end{aligned} \quad (7.4.7)$$

Для этого вычислим вычеты от первого и второго равенств (7.4.7) в полюсах  $\lambda = p$  и  $\lambda = p^{-1}$  соответственно. Получим уравнения:

$$\begin{aligned} \Phi^\dagger(\lambda = \infty) \left( \frac{p^2 + 1}{2p} (\omega_{2,\xi}\sigma_1 - \omega_{1,\xi}\sigma_2) + \omega_{3,\xi}\sigma_3 \right) \Phi(\lambda = \infty) = \\ = \Psi(\lambda = p) \{ \partial_\xi A(\xi) \sigma_3 \} \Psi^\dagger(\lambda = p), \\ \Phi^\dagger(\lambda = \infty) \left( \frac{p^2 + 1}{2p} (\omega_{2,\eta}\sigma_1 - \omega_{1,\eta}\sigma_2) + \omega_{3,\eta}\sigma_3 \right) \Phi(\lambda = \infty) = \\ = \Psi(\lambda = p) \{ \partial_\eta B(\eta) \sigma_3 \} \Psi^\dagger(\lambda = p). \end{aligned} \quad (7.4.8)$$

Для определенности, формулы (7.4.8) записаны при выборе (7.3.11) в качестве частного решения модели. В общем случае в правой части каждой из формул в фигурной скобке стоит значение, соответствующее «затравочному» решению такого же выражения, что и в левой части равенства.

Дальнейшие расчеты производим в следующей последовательности. Сначала из (7.4.8) находим  $\omega_{3,\xi}$ ,  $\omega_{3,\eta}$ . После этого из (7.4.1) получаем  $\Phi(\lambda = \infty)$ . Наконец, используя выражение для  $\Phi(\lambda = \infty)$ , разрешаем уравнения (7.4.8) относительно  $\omega_{1,\xi}$ ,  $\omega_{1,\eta}$ ,  $\omega_{2,\xi}$ ,  $\omega_{2,\eta}$ .

Явное решение уравнений движения (7.2.11), (7.2.12) в терминах полей  $g(\xi, \eta) \in SU(2)$  следует из формул (7.2.21), (7.4.1), (7.4.3), (7.4.4), (7.4.6):

$$g = \exp \left( -\frac{i}{4} \pi \sigma_3 \right) \frac{\Phi(\lambda = \infty) \Psi(\lambda = 1) \chi_0(\lambda = 1)}{\sqrt{\det[\Psi(\lambda = 1) \chi_0(\lambda = 1)]}}.$$

На этом завершается обсуждение процедуры интегрирования уравнений осесимметричной модели (7.2.11), (7.2.12) при  $-1 < h < 0$ .

В случае  $h > 0$  согласование канонической нормировки задачи Римана с представлениями (7.2.14)–(7.2.16), (7.2.18) также достигается калибровочным преобразованием

$$\Phi(\lambda) = \Phi(\lambda = \infty) \chi(\lambda). \quad (7.4.9)$$

При этом явный вид матриц  $\Phi(\lambda = \infty)$  удастся найти в терминах  $g$ :

$$\Phi(\lambda = \infty) = \sigma_3 \exp \left( \frac{i}{4} \pi \sigma_3 \right) g \sigma_3. \quad (7.4.10)$$

Используя тождество

$$g^\dagger \sigma_p g = \sigma_k D_{kp} \quad (D_{ki} \in SO(3), D_{ki} D_{kj} = \delta_{ij}, \det D = 1),$$

систему линейных дифференциальных уравнений для определения  $\chi(\xi, \eta, \lambda)$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \partial_\xi \chi = \tilde{U}(\lambda) \Phi, \quad \partial_\eta \chi = \tilde{V}(\lambda) \Phi, \\ \tilde{U}(\lambda) = \frac{i}{2} \sigma_3 ([l_1(\lambda) - 1] \sigma_k D_{k3} \omega_{3,\xi} - [l_2(\lambda) + 1] \sigma_k D_{ka} \omega_{a,\xi}) \sigma_3, \\ \tilde{V}(\lambda) = \frac{i}{2} \sigma_3 ([l_3(\lambda) - 1] \sigma_k D_{k3} \omega_{3,\eta} - [l_4(\lambda) + 1] \sigma_k D_{ka} \omega_{a,\eta}) \sigma_3. \end{aligned} \quad (7.4.11)$$

Здесь по повторяющимся индексам подразумевается суммирование, причем  $a = 1, 2$ ;  $k = 1, 2, 3$ . Условие совместности системы (7.4.11), так же как исходное представление (7.2.14)–(7.2.16), (7.2.18), равносильно уравнениям (7.2.11), (7.2.12) при всех значениях параметра  $\lambda$ .

Как и ранее, выберем (7.3.11) в качестве частного решения нелинейных уравнений (7.2.11), (7.2.12). Тогда «затравочным» решением линейной системы (7.4.11) будет

$$\chi_0(\lambda) = \exp \left( \frac{i\sigma_3}{2} ([l_1(\lambda) - 1] A(\xi) + [l_3(\lambda) - 1] B(\eta)) \right). \quad (7.4.12)$$

Солитонным состояниям соответствуют «одетые» решения линейной системы (7.4.11) следующего вида:

$$\chi(\lambda) = \Psi(\lambda) \chi_0(\lambda), \quad (7.4.13)$$

где  $\Psi(\lambda)$  — решение задачи Римана с нулями. Сформулированные в предыдущем разделе ограничения на функции  $\Phi(\lambda)$  легко переносятся на матрицы  $\Psi(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} \Psi^{-1}(\lambda) &= \Psi^\dagger(\lambda^*), \quad \Psi(\lambda = \infty) = I, \\ \Psi(-\lambda^{-1}) &= \Psi(\lambda = 0) Z \Psi(\lambda) Z^\dagger, \quad Z = \chi_0(\lambda = 0) \sigma_3. \end{aligned} \quad (7.4.14)$$

Для «затравочного» решения (7.4.12)  $\chi_0(\lambda = 0) = I$ .

Как и в гл. 3, при построении солитонных решений нелинейная редукция (7.4.14) не приводит к трудностям. Матричная функция  $\Psi$  имеет вид

$$[\Psi(\lambda)]_{\sigma\sigma'} = \delta_{\sigma\sigma'} + \sum_{i,j=0}^{2N} \frac{(m_i)_\sigma (m_j)_{\sigma'}^*}{\lambda - \mu_j^*} \frac{\partial \ln \det A}{\partial A_{ji}}, \quad \det \Psi = \prod_{j=1}^{2N} \frac{\lambda - \mu_j}{\lambda - \mu_j^*},$$

где  $\sigma, \sigma' = 1, 2$ ;  $A$  — матрица  $2N \times 2N$  с элементами

$$A_{ij} = \frac{(\mathbf{m}_i^* \cdot \mathbf{m}_j)}{\mu_i^* - \mu_j}.$$

Ограничение (7.4.14) и условие отсутствия лишних полюсов в «одевающих» соотношениях будут выполняться, если

$$\mu_{k+N} = -\mu_k^{-1}, \quad \mathbf{m}_{k+N} = \sigma_3 \mathbf{m}_k, \quad \mathbf{m}_k = \chi_0(\xi, \eta, \mu_k) \mathbf{c}_k, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

где  $\mathbf{c}_k$  — произвольные постоянные комплексные векторы.

Из «одевающих» соотношений (7.4.7) можно выразить произведения  $D_{ka} \omega_{a,\xi}$ ,  $D_{ka} \omega_{a,\eta}$ ,  $D_{k3} \omega_{3,\xi}$ ,  $D_{k3} \omega_{3,\eta}$  ( $a = 1, 2$ ;  $k = 1, 2, 3$ ), которые, согласно (7.1.4), определяют плотность магнитного момента среды. Вычисления требуют более громоздких (по сравнению со случаем  $-1 < h < 0$ ) расчетов. Обсудим ключевые моменты.

Сначала из (7.2.21), (7.4.9), (7.4.10), (7.4.13) находим матричные элементы  $D_{k3}$ :

$$g^\dagger \sigma_3 g \equiv \sigma_k D_{k3} = \sigma_3 \Psi(\lambda = 0). \quad (7.4.15)$$

В формуле (7.4.15) опущен множитель  $\det^{-1/2}[\Psi(\lambda = 0)]$ , так как вследствие редукций он равен единице. С помощью  $D_{k3}$  можно разрешить относительно  $\omega_{3,\xi}$ ,  $\omega_{3,\eta}$  уравнения

$$\begin{aligned} \sigma_3 (\sigma_k D_{ka} \omega_{a,\xi} - \sqrt{h+1} \sigma_k D_{k3} \omega_{3,\xi}) \sigma_3 = \\ = \Psi(\lambda = q) \sigma_3 \left( \sigma_k D_{ka}^{(0)} \omega_{a,\xi}^{(0)} - \right. \\ \left. - \sqrt{h+1} \sigma_k D_{k3}^{(0)} \omega_{3,\xi}^{(0)} \right) \sigma_3 \Psi^\dagger(\lambda = q), \\ \sigma_3 (\sigma_k D_{ka} \omega_{a,\eta} - \sqrt{h+1} \sigma_k D_{k3} \omega_{3,\eta}) \sigma_3 = \\ = \Psi(\lambda = -q) \sigma_3 \left( \sigma_k D_{ka}^{(0)} \omega_{a,\eta}^{(0)} - \right. \\ \left. - \sqrt{h+1} \sigma_k D_{k3}^{(0)} \omega_{3,\eta}^{(0)} \right) \sigma_3 \Psi^\dagger(\lambda = -q), \end{aligned} \quad (7.4.16)$$

которые являются вычетами «одевающих» соотношений (7.4.7) в полюсах  $\lambda = q$  и  $\lambda = -q$  (индексом «нуль» помечены величины, отвечающие «затравочному» решению). Для этого умножаем уравнения (7.4.16) слева на  $\sigma_3$ , справа на  $\sigma_3 D_{p3} \sigma_p$ , вычисляем шпур от каждого из полученных выражений и учитываем условие ортогональности матриц  $D$ . Найденные в результате такой операции формулы, определяющие  $\omega_{3,\xi}$ ,  $\omega_{3,\eta}$ , можно несколько упростить, принимая во внимание редукцию (7.4.14):

$$\begin{aligned} \sqrt{h+1} \omega_{3,\xi} = -\frac{1}{2} \text{Sp} \left[ \Psi(\lambda = q) \sigma_3 \left( \sigma_k D_{ka}^{(0)} \omega_{a,\xi}^{(0)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \sqrt{h+1} \sigma_k D_{k3}^{(0)} \omega_{3,\xi}^{(0)} \right) \Psi^\dagger(\lambda = -q^{-1}) \right], \\ \sqrt{h+1} \omega_{3,\eta} = -\frac{1}{2} \text{Sp} \left[ \Psi(\lambda = -q) \sigma_3 \left( \sigma_k D_{ka}^{(0)} \omega_{a,\eta}^{(0)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \sqrt{h+1} \sigma_k D_{k3}^{(0)} \omega_{3,\eta}^{(0)} \right) \Psi^\dagger(\lambda = q^{-1}) \right]. \end{aligned}$$

С учетом явного вида величин  $D_{k3}$  и  $\omega_{3,\xi}$ ,  $\omega_{3,\eta}$ , из уравнений (7.4.16) находим произведения  $D_{ik} \omega_{k,\xi}$ ,  $D_{ik} \omega_{k,\eta}$ .

Кроме того, предложенный метод дает явное решение уравнений движения (7.2.11), (7.2.12) в терминах полей  $g(\xi, \eta) \in SU(2)$ . Окончательный результат удобно записать, используя параметризацию матрицы  $g(\xi, \eta)$  углами Эйлера (7.1.2). Два угла Эйлера  $\theta$ ,  $\varphi$  определяют соотношение (7.4.15)

$$\sigma_k D_{k3} \equiv g^\dagger \sigma_3 g = \begin{pmatrix} \cos \theta & i \sin \theta \exp(-i\varphi) \\ -i \sin \theta \exp(i\varphi) & -\cos \theta \end{pmatrix} = \sigma_3 \Psi(\lambda = 0).$$

Используя явные выражения форм Картана  $\omega_{3,\xi}$ ,  $\omega_{3,\eta}$  через углы Эйлера (7.1.3), для параметра  $\psi$  получаем дифференциальные уравнения

$$\partial_\xi \psi = \omega_{3,\xi} - \partial_\xi \varphi \cos \theta, \quad \partial_\eta \psi = \omega_{3,\eta} - \partial_\eta \varphi \cos \theta,$$

интегрированием которых находим:

$$\begin{aligned} \psi = & \int_{\xi_0}^{\xi} [\omega_{3,\xi'}(\xi', \eta) - \partial_{\xi'} \varphi(\xi', \eta) \cos(\theta(\xi', \eta))] d\xi' - \\ & - \int_{\eta_0}^{\eta} [\omega_{3,\eta'}(\xi_0, \eta') - \partial_{\eta'} \varphi(\xi_0, \eta') \cos(\theta(\xi_0, \eta'))] d\eta'. \end{aligned} \quad (7.4.17)$$

При записи (7.4.17) учли закон сохранения (7.2.13). Ввиду независимости лагранжиана (7.2.9) осесимметричной модели от поля  $\psi$ , аддитивная постоянная в определении угла  $\psi$  может быть выбрана произвольной.

Итак, в этом разделе мы изложили схему точного интегрирования уравнений (7.2.10) в осесимметричном случае ( $a_1 = a_2 \neq a_3$ ). В асимметричном случае ( $a_1 \neq a_2 \neq a_3$ ) техника интегрирования методом матричной задачи Римана требует обобщения и будет изложена отдельно.

В заключение сделаем замечание общего характера относительно решений рассмотренной модели. В терминах векторных полей,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\xi, \eta) &= \frac{\sqrt{1+h}}{2} (\omega_{1,\xi}, \omega_{2,\xi}, \sqrt{1+h} \omega_{3,\xi}), \\ \mathbf{B}(\xi, \eta) &= \frac{\sqrt{1+h}}{2} (\omega_{1,\eta}, \omega_{2,\eta}, \sqrt{1+h} \omega_{3,\eta}), \end{aligned}$$

уравнения осесимметричной модели (7.2.11), (7.2.12) принимают вид

$$\begin{aligned} \partial_\eta \mathbf{A} + [\mathbf{B} \times \mathbf{A}] + \frac{2h}{1+h} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}) [\mathbf{A} \times \mathbf{n}] &= 0, \\ \partial_\xi \mathbf{B} + [\mathbf{A} \times \mathbf{B}] + \frac{2h}{1+h} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}) [\mathbf{B} \times \mathbf{n}] &= 0, \end{aligned} \quad (7.4.18)$$

где  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ . Отсюда следует, что длина вектора  $\mathbf{A}$  не зависит от переменной  $\eta$ , а длина вектора  $\mathbf{B}$  не зависит от  $\xi$ :  $\mathbf{A}^2 = A_0^2(\xi)$ ,  $\mathbf{B}^2 = B_0^2(\eta)$ . При использовании процедуры «одевания» функции  $A_0^2(\xi)$ ,  $B_0^2(\eta)$  оказываются равными квадратам длин векторов  $\mathbf{A}_0$ ,  $\mathbf{B}_0$  «затраченного» решения:

$$[\mathbf{A}(\xi, \eta)]^2 = \mathbf{A}_0^2 = A_0^2(\xi), \quad [\mathbf{B}(\xi, \eta)]^2 = \mathbf{B}_0^2 = B_0^2(\eta). \quad (7.4.19)$$

Для доказательства утверждения достаточно возвести в квадрат равенства (7.4.8) при  $-1 < h < 0$  или же (7.4.16) при  $h > 0$  и вычислить



шпур от полученных выражений. В обоих случаях вычисления дают один и тот же результат — формулы (7.4.19).

Связи (7.4.19) следует учитывать при определении энергии системы. Кроме того, соотношения (7.4.19) полезны, когда по физическим условиям задачи представляют интерес только такие решения уравнений (7.4.18), для которых величины  $\mathbf{A}^2$ ,  $\mathbf{B}^2$  являются заданными функциями. Это имеет место, например, при рассмотрении приложений модели (7.4.18) к задаче комбинационного рассеяния в оптике [10, 11]. Необходимый класс точных решений легко выделить подходящим выбором частного решения при осуществлении процедуры «одевания».

### 7.4.2. Многоподрешеточные магнитные солитоны

Метод, изложенный в предыдущем разделе, позволяет провести полный анализ нелинейной динамики многоподрешеточных магнетиков, описываемых феноменологическими уравнениями (7.2.10) (при  $a_1 = a_2 \neq a_3$ ). В этом разделе обсуждаются солитоноподобные возбуждения, полученные «одеванием» частного решения (7.3.11). При линейной зависимости функций  $A(\xi)$ ,  $B(\eta)$  от соответствующих аргументов «затравочное» решение (7.3.11) описывает статическое распределение намагниченности. В общем случае для решения (7.3.11) распределение намагниченности  $\mathbf{M}^{(0)}$  складывается из двух спиновых волн произвольной формы, распространяющихся в противоположных направлениях:

$$\mathbf{M}^{(0)} = -\gamma \hbar a_3 \mathbf{n} \partial_t \left[ A \left( \frac{t+x}{2} \right) + B \left( \frac{t-x}{2} \right) \right], \quad (7.4.20)$$

где  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ .

При значениях  $-1 < h < 0$  окончательные формулы для односолитонного решения модели в терминах углов Эйлера имеют вид

$$\begin{aligned} \cos \theta &= 1 + \frac{(\mu^* + \mu)^2}{2\tau|\mu|^2|1 - \mu^2|^2}, \quad \tau = \frac{\text{ch}^2 y}{(\mu^* - \mu)^2} + \frac{1}{4|\mu|^2}, \\ \varphi &= -S + \frac{2p^2 A}{p^2 + 1} + \frac{2p^{-2} B}{p^{-2} + 1} - C, \\ \psi &= -\frac{\pi}{2} + S - \sqrt{-h} A + \sqrt{-h} B - C, \end{aligned} \quad (7.4.21)$$

где введены сокращенные обозначения:

$$\begin{aligned} C &\equiv \arctg \left[ \frac{i(\mu^* - \mu)(1 + |\mu|^2)}{(\mu^* + \mu)(1 - |\mu|^2)} \text{th } y \right], \\ y &= \ln \left| \frac{m^{(1)}}{m^{(2)}} \right| = \ln \left| \frac{c^{(1)}}{c^{(2)}} \right| + i(\mu^2 - \mu^{*2}) \sqrt{-h} \left[ \frac{p^2 A}{|p^2 - \mu^2|^2} - \frac{p^{-2} B}{|p^{-2} - \mu^2|^2} \right], \\ S &= \arg \frac{m^{(1)}}{m^{(2)}} = \arg \frac{c^{(1)}}{c^{(2)}} + \frac{(2p^2 - \mu^{*2} - \mu^2)}{|p^2 - \mu^2|^2} p^2 \sqrt{-h} A - \\ &\quad - \frac{(2p^{-2} - \mu^{*2} - \mu^2)}{|p^{-2} - \mu^2|^2} p^{-2} \sqrt{-h} B. \end{aligned}$$

Распределение намагниченности  $\mathbf{M}$  для односолитонного решения (7.4.21) выразим через матрицу  $g(\xi, \eta)$  и формы Картана, процедура вычисления которых указана в предыдущем разделе. После простых алгебраических преобразований находим:

$$\begin{aligned} \frac{M_3}{\gamma \hbar a_1} &= -\frac{1}{2} \sum_{\lambda=p, p^{-1}} [\alpha^* \delta c_-(\lambda) + \alpha \delta^* c_+(\lambda) + \\ &\quad + (1+h) c_3(\lambda)(1-2|\delta|^2)]; \\ \frac{M_1 - iM_2}{\gamma \hbar a_1} &= -\frac{1}{2} \exp(-i\chi) \sum_{\lambda=p, p^{-1}} [\alpha^2 c_+(\lambda) - \\ &\quad - \delta^2 c_-(\lambda) - 2\alpha \delta (1+h) c_3(\lambda)]. \end{aligned} \quad (7.4.22)$$

Здесь величины  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $\gamma$ ,  $c$  определяются формулами

$$\begin{aligned} c_+(\lambda) &= c_-(\lambda) = \\ &= \frac{4(\mu^2 - \mu^{*2}) \lambda^2 c(\lambda)}{[\mu^* \exp(y) + \mu \exp(-y)]^2 (1 + \lambda^2)} \left( \frac{\mu^* \exp(y)}{\lambda^2 - \mu^{*2}} + \frac{\mu \exp(-y)}{\lambda^2 - \mu^2} \right), \\ c_3(\lambda) &= c(\lambda) \left( 1 + \frac{\lambda^2 (\mu^* + \mu)^2}{2\tau |\mu|^2 |\lambda^2 - \mu^2|^2} \right), \quad c(p) = \partial_\xi A, \quad c(p^{-1}) = \partial_\eta B, \\ \alpha &= \frac{\mu(1 - \mu^{*2}) \exp(y) + \mu^*(1 - \mu^2) \exp(-y)}{[\mu \exp(y) + \mu^* \exp(-y)] |1 - \mu^2|}, \\ \delta &= \frac{\mu^2 - \mu^{*2}}{[\mu^* \exp(y) + \mu \exp(-y)] |1 - \mu^2|}, \quad \chi = -S + \frac{2p^2 A}{p^2 + 1} + \frac{2p^{-2} B}{p^{-2} + 1}. \end{aligned}$$

Важно, что в случае  $-1 < h < 0$  вычисление обусловленной солитонами намагниченности среды не требует интегрирований. Матрица  $\Phi(\lambda = \infty)$ , для нахождения которой необходимо интегрирование, сокращается с матрицей  $\Phi^{-1}(\lambda = \infty)$  в полном выражении для плотности магнитного момента среды  $\mathbf{M}$ . Таким образом,  $\mathbf{M}$  является алгебраической функцией элементов матрицы  $\Psi(\lambda)$ . Это обстоятельство облегчает анализ асимптотических значений поля намагниченности.

В случае  $h > 0$  односолитонное решение, полученное по схеме предыдущего раздела, имеет вид

$$\begin{aligned} \cos \theta &= 1 + \frac{1}{2\tau}, \quad \tau = |\mu|^2 \left[ \left( \frac{\operatorname{ch} y}{\mu^* - \mu} \right)^2 + \left( \frac{\operatorname{sh} y}{1 + |\mu|^2} \right)^2 \right], \\ \varphi &= -S + C, \quad \psi = A + B + S + C, \end{aligned} \quad (7.4.23)$$

где обозначено

$$\begin{aligned}
 C &= \operatorname{arctg} \left[ \frac{i(\mu^* - \mu)(1 - |\mu|^2)}{(\mu^* + \mu)(1 + |\mu|^2)} \operatorname{th} y \right], \\
 y &= \ln \left| \frac{m^{(1)}}{m^{(2)}} \right| = \ln \left| \frac{c^{(1)}}{c^{(2)}} \right| + \frac{q}{2i} (1 + q^2) \sqrt{h+1} (\mu^* - \mu)(1 + |\mu|^2) (\tilde{A} - \tilde{B}), \\
 S &= \arg \frac{m^{(1)}}{m^{(2)}} = \arg \frac{c^{(1)}}{c^{(2)}} - \frac{1}{2} (1 + q^2) \sqrt{h+1} \left( [2(1 - q^2)|\mu|^2 + \right. \\
 &\quad \left. + q(|\mu|^2 - 1)(\mu^* + \mu)] \tilde{A} + [2(1 - q^2)|\mu|^2 - q(|\mu|^2 - 1)(\mu^* + \mu)] \tilde{B} \right), \\
 \tilde{A} &\equiv \frac{A}{|(\mu - q)(\mu q + 1)|^2}, \quad \tilde{B} \equiv \frac{B}{|(\mu + q)(\mu q - 1)|^2}.
 \end{aligned}$$

При  $h > 0$  намагниченность среды  $\mathbf{M}$ , связанная с солитонами, выражается через комбинации  $D_{ik} \omega_{k,\xi}$ ,  $D_{ik} \omega_{k,\eta}$ . Как и ранее,  $\mathbf{M}$  является алгебраической функцией элементов матрицы  $\Psi(\lambda)$ .

Односолитонному решению (7.4.23) соответствует следующая намагниченность среды:

$$\begin{aligned}
 \frac{M_3}{\gamma \hbar a_1} &= -\frac{\sqrt{1+h}}{2} \left( A_0 + \frac{A_1}{\tau} + \frac{A_2}{\tau^2} \right), \\
 A_0 &= \sqrt{h+1} (\partial_\xi A + \partial_\eta B), \quad A_2 = \frac{|\mu|^2}{2} q^2 \sqrt{h+1} (\partial_\xi \tilde{A} + \partial_\eta \tilde{B}), \\
 A_1 &= \frac{\sqrt{h}}{2q} (\partial_\xi A + \partial_\eta B) + q(\mu + \mu^*)(1 - |\mu|^2) (\partial_\xi \tilde{A} - \partial_\eta \tilde{B}) + \\
 &\quad + \left( \sqrt{h+1} |\mu|^2 - 2|\mu|^2 - \frac{q^2}{2} |1 - \mu^2|^2 \right) (\partial_\xi \tilde{A} + \partial_\eta \tilde{B}); \\
 \frac{M_1 - iM_2}{\gamma \hbar a_1} &= \frac{\sqrt{1+h}}{2} \exp(iS) \times \\
 &\quad \times \sum_{\lambda=q, -q} c(\lambda) \left( \frac{\sqrt{h}}{2q\tau} \left[ \frac{\mu^* + \mu}{\mu^* - \mu} \operatorname{ch} y + \frac{1 - |\mu|^2}{1 + |\mu|^2} \operatorname{sh} y \right] \times \right. \\
 &\quad \times \left[ 1 + \frac{|\mu|^2(1 + \lambda^2)}{2\tau|(\lambda - \mu)(\lambda\mu + 1)|^2} \right] - \frac{\mu}{\tau(1 + \lambda\mu)(\lambda - \mu)} \times \\
 &\quad \times \left[ \frac{\lambda(1 - |\mu|^2) - \mu^* - \mu}{\mu^* - \mu} \operatorname{ch} y - \frac{1 - |\mu|^2 + \lambda(\mu^* + \mu)}{1 + |\mu|^2} \operatorname{sh} y \right] \times \\
 &\quad \times \left( 1 + \frac{\exp y}{2\tau(1 + \lambda\mu^*)(\lambda - \mu^*)} \left[ \frac{\lambda(1 + |\mu|^2) + \mu - \mu^*}{\mu^* - \mu} \operatorname{ch} y + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1 + |\mu|^2 + \lambda(\mu^* + \mu)}{1 + |\mu|^2} \operatorname{sh} y \right] \right) \Bigg); \\
 c(q) &\equiv \partial_\xi A, \quad c(-q) \equiv \partial_\eta B.
 \end{aligned} \tag{7.4.24}$$

Перейдем к анализу полученных результатов. Наиболее простой вид односолитонные решения имеют при линейной зависимости функций  $A(\xi)$  и  $B(\eta)$  от своих аргументов:

$$A(\xi) = 2u_1\xi, \quad B(\eta) = 2u_2\eta. \quad (7.4.25)$$

Здесь  $u_1, u_2$  — вещественные постоянные. В этом случае переменные  $y, S$  приобретают вид

$$y = y_0 + \kappa_1(x - Vt), \quad S = S_0 + \omega t + \kappa_2(x - Vt), \quad (7.4.26)$$

где  $y_0, S_0, \kappa, V, \omega$  — вещественные параметры.

Приведенный выбор «затравочного» решения предполагает наличие спонтанной намагниченности в основном состоянии среды. Согласно (7.4.22), (7.4.24), односолитонным состояниям соответствуют пространственно локализованные волны намагниченности с асимптотикой:

$$\mathbf{M} \rightarrow -\gamma\hbar a_1(1+h)(u_1+u_2)\mathbf{n} \quad \text{при} \quad x \rightarrow \pm\infty,$$

где  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ . Вспоминая замечание разд. 7.2 о связи между моделями неколлинеарных антиферро- и ферримагнетиков, заключаем, что полученные решения описывают нелинейные возбуждения в неколлинеарных ферримагнетиках. Область локализации каждого магнитного возбуждения движется с постоянной скоростью  $V$ . В системе координат, связанной с солитоном, намагниченность прецессирует с постоянной частотой,

$$\begin{aligned} \Omega &= |\partial_t \chi + V \partial_x \chi| \quad (-1 < h < 0), \\ \Omega &= |\partial_t S + V \partial_x S| \quad (h > 0), \end{aligned}$$

вокруг оси  $Ox_3$ , причем  $M_1^2 + M_2^2, M_3^2$  и начальная фаза прецессии зависят от  $x - Vt$  (см. рис. 7.3). При этом длина вектора плотности магнитного момента среды  $\mathbf{M}^2$  не остается постоянной, а изменяется в пространстве и со временем. Наличие дополнительных степеней свободы у многоподрешеточных солитонов расширяет интервал допустимых скоростей их движения.

График функции  $\cos \theta$  (7.4.21), (7.4.23) представляет уединенную волну в форме ямки, которая движется со скоростью  $V = -\partial_t y / \partial_x y$  и обладает асимптотикой:  $\cos \theta \rightarrow 1$  при  $|x| \rightarrow \infty$  (см. рис. 7.4). Характерный размер ямки  $d \sim 2(\partial_x y)^{-1}$ . При  $|c^{(1)}| = |c^{(2)}|$  в пределе  $\mu \rightarrow \pm i$  решение (7.4.21) вырождается в слаболокализованный алгебраический солитон, в центре которого  $\cos \theta = -1$ . Скорость движения солитона  $V = (u_2 - u_1)/(u_1 + u_2)$ . Любопытно, что в данном случае формирование перемагниченной области обусловлено только обменными силами. В гл. 6 это обстоятельство объяснялось неэквивалентностью магнитных подрешеток ферримагнетика.

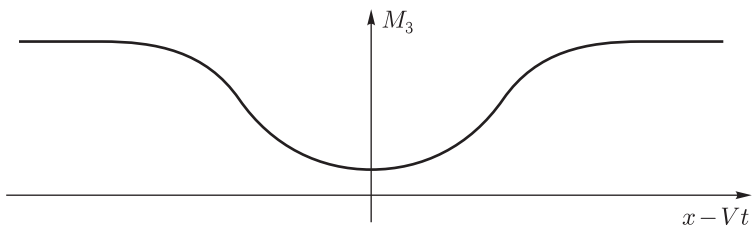
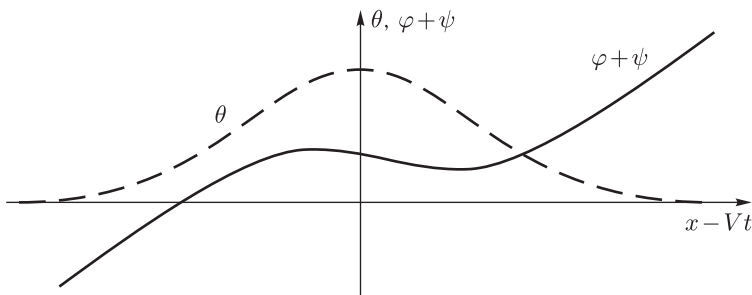


Рис. 7.3. Прецессионный солитон в неколлинеарном ферримагнетике

Рис. 7.4. Квазиклассические поля магнонов для простейшего солитона в неколлинеарном антиферромагнетике. Смещение графика для  $\varphi + \psi$  вдоль оси ординат пропорционально времени  $t$ 

Поле  $\varphi - \psi$  является линейной функцией от  $x, t$ , а  $\varphi + \psi$  — суммой линейной функции от  $x, t$  и функции типа перегиба, которая зависит от  $x - Vt$ .

В общем случае формулы (7.4.22), (7.4.24) описывают локализованное возбуждение на фоне нелокализованных волн намагниченности (7.4.20). Решение станет нагляднее в частном случае, когда функции  $A(\xi)$  и  $B(\eta)$  имеют вид

$$A(\xi) = 2u_1\xi + u_3\sin(2k\xi), \quad B(\eta) = 2u_2\eta, \quad (7.4.27)$$

где  $u_i$  — вещественные постоянные ( $i = 1, 2, 3$ ). При  $u_3 = 0$  полученное решение совпадает с рассмотренным ранее. Когда  $u_3 \neq 0$ , решение обладает асимптотикой:

$$\mathbf{M} \rightarrow -\gamma\hbar a_1(1+h)\mathbf{n}[u_1 + u_2 + k u_3 \cos(k(x+t))] \quad \text{при } x \rightarrow \pm\infty,$$

и, следовательно, его можно интерпретировать (во всяком случае, при малых  $u_3$ ) как взаимодействие спиновой волны

$$\mathbf{M}_0 = -\gamma\hbar a_1(1+h)\mathbf{n} k u_3 \cos(k(x+t)) \quad (7.4.28)$$

с рассмотренным выше локализованным магнитным возбуждением. Такое взаимодействие приводит, в частности, к осцилляциям «центра тяжести» возбуждения.

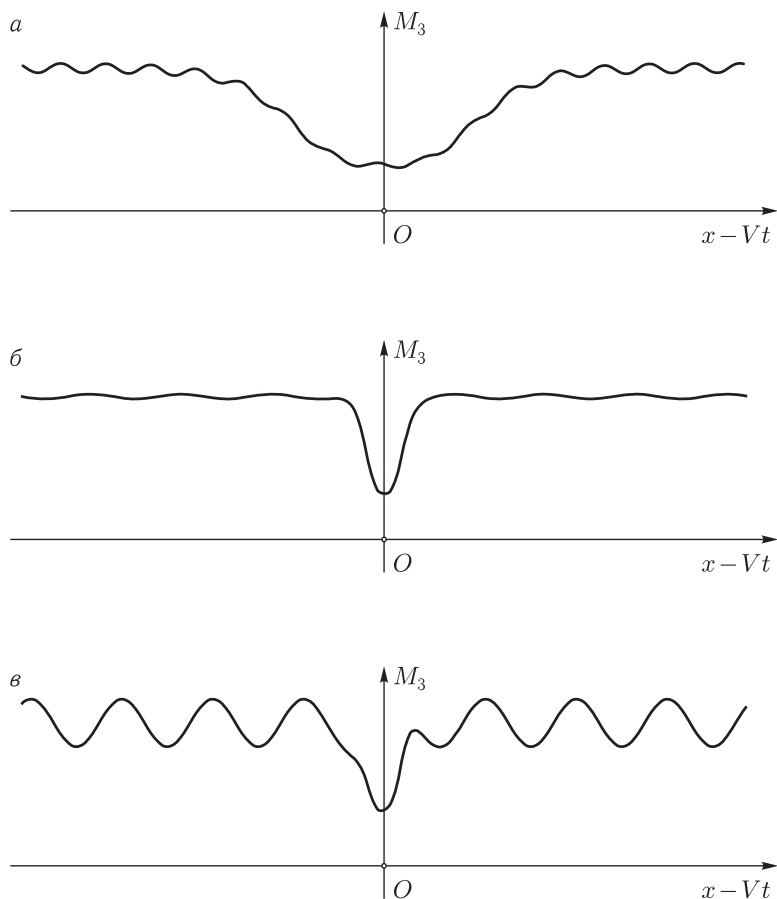


Рис. 7.5. Прецессионный солитон на фоне бегущей спиновой волны при  $r \gg 1$ ,  $|dk| \gg 1$  (а); при  $r \gg 1$ ,  $|dk| \sim 1$  (б); при  $r \ll 1$  (в)

По мере увеличения параметра  $r = (\partial_x y)^2|_{u_3=0} (\partial y / \partial (\sin 2k\xi))^{-2}$  уменьшаются ширина локализованного возбуждения и уровень его амплитудной модуляции. При условии  $r \gg 1$  локализованное возбуждение хорошо различимо на фоне спиновой волны. В этом случае по области локализации магнитного возбуждения, движущегося как целое со средней скоростью  $V$ , бежит спиновая волна малой амплитуды (рис. 7.5 а, б). При распространении волны изменяются все три компоненты вектора намагниченности среды. Если  $|dk| \gg 1$ , то на длине локализованного возбуждения укладывается несколько периодов бегущей волны (рис. 7.5 а). При достаточно большой амплитуде спиновой волны ( $r \ll 1$ ) она разрушает локализованное возбуждение (рис. 7.5 в).

Для иллюстрации решений (7.4.22), (7.4.24) в области, где отсутствуют локализованные магнитные возбуждения, выберем

$$A(\xi) = \sin 2\xi, \quad B(\eta) = \sin 2\eta,$$

тогда распределение намагниченности представится следующей зависимостью:

$$M_k = \sum_{\alpha=1,2} m_k^{(\alpha)} (\sin 2\xi, \cos 2\eta) \cos [t - (-1)^\alpha x]. \quad (7.4.29)$$

Векторные функции  $\mathbf{m}^{(\alpha)}$  в (7.4.29) определяются формулами (7.4.22), (7.4.24) и имеют достаточно сложный вид. Такое решение описывает волну намагниченности, полученную в результате амплитудной и фазовой модуляций спиновой волны (7.4.28). Оно обладает интересными особенностями. Согласно (7.4.29), с течением времени не происходит равномерного распределения энергии по всем волновым числам. Не наблюдается также распада волны (7.4.29) на устойчивый набор солитонов. На самом деле имеет место периодическое во времени перераспределение энергии между определенным числом взаимодействующих мод.

Солитонные распределения намагниченности являются рациональными функциями от элементов матрицы задачи Римана. Поэтому посредством факторизации  $N$ -солитонной матрицы в произведение одно-солитонных матриц так же, как в гл. 2, можно детально исследовать процесс рассеяния в системе из  $N$  магнитных возбуждений, локализованных на фоне волны (7.4.20). В частности, если  $A(\xi)$ ,  $B(\eta)$  имеют вид (7.4.27), двухсолитонное решение описывает упругое столкновение изолированных солитонов. Единственным результатом столкновения будут изменения координат их центров и сдвиг фазы поля  $M_1 + iM_2$  у каждого из солитонов. При последовательных столкновениях  $N$  локализованных на фоне спиновой волны магнитных солитонов указанные изменения их параметров аддитивно суммируются.

## 7.5. Многосолитонные решения общих уравнений динамики голдстоуновских возбуждений (асимметричная киральная $SU(2)$ -модель)

*Внутри каждой большой задачи сидит маленькая, пытающаяся пробиться наружу.*

*Закон больших задач Хоара*

В настоящем разделе изложен прямой метод построения солитонных решений уравнений (7.2.1) в случае  $a_1 \neq a_2 \neq a_3$ ,  $\mathbf{b} = 0$  (асимметричная киральная  $SU(2)$ -модель). Метод основан на матричной

задаче Римана с нулями на торе. Техника вычислений подобна той, что использована в гл. 5. Обсудим ключевые моменты.

В разд. 7.2 мы показали, что уравнения (7.2.1) допускают представление в форме условия совместности вспомогательной линейной системы (7.2.3), (7.2.4). Коэффициенты  $c_{ik}$ ,  $d_{ik}$  подчиняются алгебраическим уравнениям (7.2.5)–(7.2.7). Их решение зависит от значений параметров  $a_{ik}$ . Без потери общности примем  $a_{ik} = \text{diag}(a_1, a_2, a_3)$ ,  $0 < a_1 < a_2 < a_3$ . Для дальнейшего анализа полезна униформизация уравнений (7.2.5)–(7.2.7) в терминах комплексного параметра  $u$ :

$$\begin{aligned} c_{21} &= -\frac{(a_3 - a_1)}{a_3} a(u) \operatorname{cnu} \operatorname{dnu}, & c_{12} &= \frac{a_3 - a_1}{a_3} a(u) \operatorname{cnu}, \\ c_{33} &= \frac{a_3 - a_1}{a_3} a(u) \operatorname{dnu}, & d_{21} &= \sqrt{\frac{a_3 - a_1}{a_2}} \frac{a_1}{a_3} a(u) \operatorname{cnu}, \\ d_{12} &= -\frac{\sqrt{a_2(a_3 - a_1)}}{a_3} a(u) \operatorname{cnu} \operatorname{dnu}, \\ d_{33} &= -\sqrt{\frac{a_3 - a_1}{a_2}} a(u) \operatorname{cnu} \operatorname{cnu}, \end{aligned} \quad (7.5.1)$$

где  $a(u) = 1/(\operatorname{cn}^2 u - a_1/a_3)$  и модуль эллиптических функций Якоби:

$$k = \sqrt{\frac{a_3(a_2 - a_1)}{a_2(a_3 - a_1)}} \quad (0 < k < 1).$$

При этом дополнительный модуль:

$$k' = \sqrt{1 - k^2} = \sqrt{\frac{a_1(a_3 - a_2)}{a_2(a_3 - a_1)}}.$$

В данном случае коэффициенты  $c_{ik}$ ,  $d_{ik}$  — мероморфные двоякопериодические функции параметра  $u$  с периодами  $4K$ ,  $4iK'$ , где  $K = K(k)$ ,  $K' = K(k')$  — эллиптические интегралы первого рода. В комплексной  $u$ -плоскости в фундаментальном прямоугольнике со сторонами  $4K$ ,  $4iK'$  единственные особенности функций  $c_{ik}(u)$ ,  $d_{ik}(u)$  — это простые полюсы.

Как и в предыдущих разделах этой главы, все формулы будут проще, если перейти от переменных  $x$ ,  $t$  к новым переменным  $\xi = (t + x)/2$ ,  $\eta = (t - x)/2$ . В переменных  $\xi$ ,  $\eta$  уравнения движения рассматриваемой модели и структурные уравнения Мауэра–Картана примут вид

$$\begin{aligned} a_1 (\partial_\eta \omega_{1,\xi} + \partial_\xi \omega_{1,\eta}) - (a_2 - a_3) (\omega_{2,\xi} \omega_{3,\eta} + \omega_{2,\eta} \omega_{3,\xi}) &= 0, \\ \partial_\eta \omega_{1,\xi} - \partial_\xi \omega_{1,\eta} + \omega_{2,\eta} \omega_{3,\xi} - \omega_{2,\xi} \omega_{3,\eta} &= 0. \end{aligned} \quad (7.5.2)$$

Циклическая перестановка индексов 1, 2, 3 добавляет еще четыре уравнения.

Уравнения (7.5.2) эквивалентны условию совместности линейной системы

$$\partial_\xi \Phi = U \Phi, \quad \partial_\eta \Phi = V \Phi, \quad (7.5.3)$$



где матрицы  $U$ ,  $V$  определяются формулами

$$\begin{aligned} U &\equiv V_0 + V_1 = \frac{i}{2} [\sigma_1 (c_{12} - d_{12}) \omega_{2,\xi} + \\ &\quad + \sigma_2 (c_{21} - d_{21}) \omega_{1,\xi} + \sigma_3 (c_{33} - d_{33}) \omega_{3,\xi}], \\ V &\equiv V_0 - V_1 = \frac{i}{2} [\sigma_1 (c_{12} + d_{12}) \omega_{2,\eta} + \\ &\quad + \sigma_2 (c_{21} + d_{21}) \omega_{1,\eta} + \sigma_3 (c_{33} + d_{33}) \omega_{3,\eta}]. \end{aligned} \quad (7.5.4)$$

Поскольку коэффициенты  $c_{ik}(u)$ ,  $d_{ik}(u)$  являются двоякопериодическими функциями спектрального параметра  $u$ , свойства решений системы (7.5.3) достаточно проанализировать в пределах элементарной ячейки со сторонами  $4K$ ,  $4iK'$  в комплексной  $u$ -плоскости.

Как и ранее, из соотношений  $\text{Sp } U = \text{Sp } V = 0$  и уравнений (7.5.3) следует, что  $\det \Phi$  не зависит от переменных  $\xi$ ,  $\eta$ , а из условий

$$U^\dagger(u^*) = -U(u), \quad V^\dagger(u^*) = -V(u)$$

закключаем, что решения  $\Phi^{-1}(u)$  и  $\Phi^\dagger(u^*)$  системы (7.5.3) можно выбрать совпадающими.

Учитывая трансформационные свойства коэффициентов (7.5.1), нетрудно проверить, что решения системы (7.5.3), (7.5.4) удовлетворяют ограничениям

$$\Phi(u) = \sigma_3 \Phi(u + 2K) \sigma_3, \quad \Phi(u) = \Phi^*(u^* + 2iK').$$

Так же как и в разд. 7.2, из представления (7.5.1), (7.5.3), (7.5.4) находим явное выражение матриц  $g(\xi, \eta) \in SU(2)$  через значение матричной функции  $\Phi(\xi, \eta, u)$  в точке  $u = 0$ :

$$g = \exp\left(-\frac{i}{4}\pi\sigma_3\right) \Phi(u=0) [\det \Phi(u=0)]^{-1/2}. \quad (7.5.5)$$

Выберем для определенности (7.3.11) в качестве частного решения нелинейных уравнений (7.5.2) асимметричной  $SU(2)$ -модели. Решение линейных уравнений (7.5.3), соответствующее такому выбору, имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_0(\xi, \eta, u) = \exp\left(\frac{i\sigma_3}{2} [(c_{33}(u) - d_{33}(u)) A(\xi) + \right. \\ \left. + (c_{33}(u) + d_{33}(u)) B(\eta)]\right). \end{aligned} \quad (7.5.6)$$

В контексте метода «одевания» новые решения линейной системы (7.5.3) представим в форме

$$\Phi(u) = \Psi(u) \Phi_0(u). \quad (7.5.7)$$

Для солитонных состояний новая матричная функция  $\Psi(u)$  — это мероморфная двоякопериодическая функция от параметра  $u$  с периодами  $4K$ ,  $4iK'$ , которая должна удовлетворять редукциям

$$\begin{aligned}\Psi^{-1}(u) &= \Psi^\dagger(u^*), \quad \Psi(u) = \sigma_3 \Psi(u + 2K) \sigma_3, \\ \Psi(u) &= \Psi^*(u^* + 2iK').\end{aligned}\quad (7.5.8)$$

Согласно первому из равенств (7.5.8), нули функции  $\Psi(u)$  совпадают с полюсами функции  $\Psi^\dagger(u^*)$ . Из двух последних следует, что нули функции  $\Psi(u)$  расположены симметрично относительно прямой  $\text{Im} u = K'$  и распадаются на две группы:

$$\mu_\alpha^{(1)} = u_\alpha + iK', \quad \mu_\alpha^{(2)} = u_\alpha + iK' + 2K \quad (7.5.9)$$

и

$$\begin{aligned}\mu_\alpha^{(1)} &= u_\alpha + iK' + i\theta_\alpha, \quad \mu_\alpha^{(2)} = \mu_\alpha^{(1)*} + 2iK', \\ \mu_\alpha^{(3)} &= \mu_\alpha^{(1)} + 2K, \quad \mu_\alpha^{(4)} = \mu_\alpha^{(1)*} + 2K + 2iK', \\ &(\alpha = 1, 2, \dots, N),\end{aligned}\quad (7.5.10)$$

где  $-2K \leq u_\alpha \leq 0$ ,  $0 < \theta_\alpha < K'$ .

Рассмотрим сначала второй случай, когда матричная функция  $\Psi(u)$  обладает простыми нулями в точках (7.5.10). Как и в гл. 5, будем искать матричную функцию  $\Psi^\dagger(u^*)$  в виде разложения по дзета-функциям Вейерштрасса  $\zeta(u) \equiv \zeta(u|2K, 2iK')$  с периодами  $4K$ ,  $4iK'$ , а точнее, по функциям:

$$f_\alpha^{(i)}(u) = \zeta(u - \mu_\alpha^{(i)}) + c^{(i)}, \quad c^{(1)} = -\eta_3 = -c^{(2)}, \quad c^{(3)*} = -\eta_2 = c^{(4)},$$

которые, как следует из соотношений

$$\begin{aligned}f_\alpha^{(s)}(u - 2K) &= f_\alpha^{(s+2)}(u) - \eta_1, \\ f_\alpha^{(2s-1)}(u + 2iK') &= [f_\alpha^{(2s)}(u^*)]^* \quad (s = 1, 2),\end{aligned}$$

образуют (с точностью до произвольного постоянного слагаемого) представление группы редукций (7.5.8). Здесь и далее используем стандартные сокращенные обозначения [17, 18]:

$$\begin{aligned}\zeta(2K|2K, 2iK') &= \eta_1, \quad \zeta(-2K - 2iK'|2K, 2iK') = \eta_2 \equiv -\eta_1 - \eta_3, \\ \zeta(2iK'|2K, 2iK') &= \eta_3.\end{aligned}$$

Тогда

$$\Psi^\dagger(u^*) = \left( I + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^4 R_i^\alpha f_\alpha^{(i)}(u) \right) C, \quad (7.5.11)$$

где матрицы  $R_i^\alpha$ ,  $C$  не зависят от спектрального параметра  $u$ . Поскольку функции  $\zeta(u)$  квазипериодичны (см. [17, 18] и приложение), представление (7.5.11) будет иметь периоды  $4K$ ,  $4iK'$  только при условии

$$\sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^4 R_i^\alpha = 0. \quad (7.5.12)$$

Как и в гл. 5, дальнейшие вычисления проводим в предположении справедливости равенства (7.5.12). Окончательный результат подтвердит правильность построений.

Нетрудно показать, что два последних ограничения (7.5.8) приводят к соотношениям

$$R_1^\alpha = R_2^{\alpha*} = \sigma_3 R_3^\alpha \sigma_3 = \sigma_3 R_4^{\alpha*} \sigma_3, \quad C = C^* = \sigma_3 C^* \sigma_3. \quad (7.5.13)$$

Отсюда следует, что  $C$  — диагональная матрица с вещественными элементами.

Явный вид матриц  $R_i^\alpha$  определим следующим образом. Требуя обращения в нуль вычетов в полюсах произведения  $\Psi(u)\Psi^\dagger(u^*)$ , получим, вследствие (7.5.13),  $N$  независимых матричных уравнений:

$$[R_1^\alpha]^\dagger \Psi^\dagger(u^*)|_{u=\lambda_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, N), \quad (7.5.14)$$

где для упрощения записи введено обозначение:  $\lambda_\alpha = \mu_\alpha^{(1)*}$ . Элементы вырожденных матриц  $R_1^\alpha$  запишем в виде

$$(R_1^\alpha)_{ab} = (m^\alpha)_a (X^\alpha)_b \quad (a, b = 1, 2; \alpha = 1, 2, \dots, N). \quad (7.5.15)$$

Подстановка (7.5.15) в (7.5.14) определяет векторы  $\mathbf{X}^\alpha$  из системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^{\beta*} + \sum_{\alpha=1}^N [(\mathbf{m}^{\beta*} \cdot \mathbf{m}^\alpha) \mathbf{X}^\alpha f_\alpha^{(1)}(\lambda_\beta) + (\mathbf{m}^{\beta*} \cdot \mathbf{m}^{\alpha*}) \mathbf{X}^{\alpha*} f_\alpha^{(2)}(\lambda_\beta) + \\ + (\mathbf{m}^{\beta*} \cdot \sigma_3 \mathbf{m}^\alpha) \mathbf{X}^\alpha \sigma_3 f_\alpha^{(3)}(\lambda_\beta) + \\ + (\mathbf{m}^{\beta*} \cdot \sigma_3 \mathbf{m}^{\alpha*}) \mathbf{X}^{\alpha*} \sigma_3 f_\alpha^{(4)}(\lambda_\beta)] = 0. \end{aligned} \quad (7.5.16)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^\alpha &= (m_1^\alpha, m_2^\alpha), \quad \mathbf{X}^\alpha = (X_1^\alpha, X_2^\alpha), \\ (\mathbf{m}^\alpha \cdot \mathbf{m}^\beta) &= m_1^{\alpha*} m_1^\beta + m_2^{\alpha*} m_2^\beta. \end{aligned}$$

Результат решения уравнений (7.5.16) проще представить в терминах  $N$ -мерных матриц  $F_a$ ,  $Q_a$  и векторов  $\mathbf{p}_a = (m_a^1, m_a^2, \dots, m_a^N)$ ,  $\mathbf{X}_a = (X_a^1, X_a^2, \dots, X_a^N)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_a &= -[F_a - Q_a F_a^{*-1} Q_a^*]^{-1} (\mathbf{p}_a^* - Q_a F_a^{*-1} \mathbf{p}_a); \\ (F_a)_{\beta\alpha} &= (\mathbf{m}^{\beta*} \cdot \mathbf{m}^\alpha) f_\alpha^{(1)}(\lambda_\beta) - \\ &\quad - (-1)^a (\mathbf{m}^{*\beta} \cdot \sigma_3 \mathbf{m}^\alpha) f_\alpha^{(3)}(\lambda_\beta), \\ (Q_a)_{\beta\alpha} &= (\mathbf{m}^{\beta*} \cdot \mathbf{m}^{\alpha*}) f_\alpha^{(2)}(\lambda_\beta) - \\ &\quad - (-1)^a (\mathbf{m}^{\beta*} \cdot \sigma_3 \mathbf{m}^{\alpha*}) f_\alpha^{(4)}(\lambda_\beta). \end{aligned} \quad (7.5.17)$$

Постоянные в определении функций  $f_\alpha^{(s)}(u)$  выбраны так, что выполняются тождества

$$F_a^* = -F_a^T, \quad Q_a^T = -Q_a. \quad (7.5.18)$$

Свойства симметрии (7.5.18) существенно облегчают вычисления. Например, для односолитонного ( $N = 1$ ) решения числа  $Q_a$  равны нулю, а  $F_a$  — чисто мнимые величины. Для двухсолитонного решения обратная матрица (7.5.17) имеет простой вид:

$$[F_a - Q_a F_a^{*-1} Q_a^*]^{-1} = \frac{1}{\det F_a - |(Q_a)_{12}|^2} \begin{pmatrix} (F_a)_{22} & -(F_a)_{12} \\ -(F_a)_{21} & (F_a)_{11} \end{pmatrix}.$$

Кроме того, из формул (7.5.13), (7.5.15)–(7.5.18) следует справедливость соотношения (7.5.12).

Используя первое равенство (7.5.8), выразим матрицу  $C$  через  $R_i^\alpha$ :

$$\begin{aligned} (C^{-1})^2 &= \left( I + \sum_{i=1}^4 \sum_{\alpha=1}^N R_i^{\alpha\dagger} f_\alpha^{(i)*}(u^*) \right) \times \\ &\quad \times \left( I + \sum_{j=1}^4 \sum_{\beta=1}^N R_j^\beta f_\beta^{(j)}(u) \right). \end{aligned} \quad (7.5.19)$$

Из предыдущего анализа вытекает, что правая часть равенства (7.5.19) не содержит полюсов и является положительно определенной диагональной матрицей, не зависящей от параметра  $u$ . Удобное представление для матрицы  $C$  получим, если в (7.5.19) положим  $u = 0$ .

Отметим, что матрица  $C$  определена нами с точностью до умножения на матрицу  $W = \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ ,  $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1$ . Далее показано, что отмеченная неоднозначность несущественна для построения методом «одевания» новых решений модели из-за инвариантности уравнений модели (7.5.2) относительно замены  $\omega_1 \rightarrow -\omega_1$ ,  $\omega_2 \rightarrow -\omega_2$ ,  $\omega_3 \rightarrow \omega_3$ .

Эволюция векторов  $\mathbf{m}^\alpha$  определяется уравнениями, обеспечивающими отсутствие дополнительных полюсов, связанных с задачей

Римана, в «одевающих» соотношениях (7.3.13). Решение этих уравнений выражается через выбранное частное решение

$$\mathbf{m}^\alpha = \Phi_0(\lambda_\alpha^*, \xi, \eta) \mathbf{c}^\alpha,$$

где  $\mathbf{c}^\alpha$  — произвольные постоянные комплексные векторы ( $\alpha = 1, 2, \dots, N$ ).

Окончательные формулы для матриц задачи Римана  $\Psi(u)$ ,  $\Psi^\dagger(u^*)$  содержат комбинации дзета-функций Вейерштрасса, которые могут быть выражены через более популярные эллиптические функции Якоби:

$$\begin{aligned} \alpha_\beta(u) &\equiv f_\beta^{(1)}(u) - f_\beta^{(3)}(u) = \frac{\operatorname{dn} v}{2 \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v} = \frac{1 + \operatorname{dn} 2v}{2 \operatorname{sn} 2v}, \quad v = \frac{u - \mu_\beta^{(1)}}{2}; \\ \varphi_\beta(u) - \varphi_\beta(\lambda_\beta) &= \alpha_\beta(\lambda_\beta) \frac{\alpha_\beta(u)}{\alpha_\beta^*(u^*)}, \\ \varphi_\beta(u) &= f_\beta^{(2)}(u) + f_\beta^{(4)}(u) - f_\beta^{(1)}(u) - f_\beta^{(3)}(u); \\ f_\beta^{(2)}(u) - f_\beta^{(4)}(u) &= \frac{k^2}{4 \alpha_\beta^*(u^*)}. \end{aligned} \tag{7.5.20}$$

Тождества (7.5.20) уже использовались ранее. В гл. 5 и в приложении приведена схема их доказательства.

В частности, с помощью формул (7.5.20) элементы односолитонной матрицы  $\Psi^\dagger(u^*)$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} [\Psi^\dagger(u^*)]_{11} &= i r \alpha(\lambda_1) \left( |m_1|^2 \frac{\alpha(u)}{\alpha^*(u^*)} + |m_2|^2 \right), \\ [\Psi^\dagger(u^*)]_{12} &= i r \left( -m_1 m_2^* \alpha(u) + m_1^* m_2 \frac{k^2}{4 \alpha^*(u^*)} \right), \\ [\Psi^\dagger(u^*)]_{21} &= i r \left( -m_1^* m_2 \alpha(u) + m_1 m_2^* \frac{k^2}{4 \alpha^*(u^*)} \right), \\ [\Psi^\dagger(u^*)]_{22} &= i r \alpha(\lambda_1) \left( |m_2|^2 \frac{\alpha(u)}{\alpha^*(u^*)} + |m_1|^2 \right). \end{aligned} \tag{7.5.21}$$

В соотношениях (7.5.21) опущена матрица  $W = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ ,  $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1$ . Величины  $r > 0$ ,  $\alpha(u)$ ,  $\det \Psi^\dagger(u^*)$  выражаются через эллиптические функции Якоби с модулем  $k$ :

$$\begin{aligned} r^{-2} &= -\alpha^2(\lambda_1) \left( |m_1|^4 + |m_2|^4 \right) + \delta |m_1 m_2|^2 - (m_1^2 m_2^{*2} + m_1^{*2} m_2^2) k^2 / 4, \\ \delta &= \frac{k^4}{16 |\alpha(0)|^2} + |\alpha(0)|^2 - \alpha^2(\lambda_1) \left( \frac{\alpha(0)}{\alpha^*(0)} + \frac{\alpha^*(0)}{\alpha(0)} \right); \\ \det \Psi^\dagger(u^*) &= \frac{\alpha(u)}{\alpha^*(u^*)}; \quad \alpha(u) = \frac{\operatorname{dn} \bar{u}}{2 \operatorname{sn} \bar{u} \operatorname{cn} \bar{u}}, \quad \bar{u} = \frac{u - \lambda_1^*}{2}. \end{aligned}$$

Перейдем к построению функций  $\Psi(u)$  с особыми нулями (7.5.9). Примеры, приведенные в главах 3–5, показывают, что учет в процедуре

«одевания» особых нулей может изменить основное состояние системы на бесконечности и привести к решениям, описывающим некомпенсированные домены. Этого не происходит, если функция  $\Psi(u)$  содержит четное число различных групп из простых нулей (7.5.9). С учетом сформулированного критерия и редукций (7.5.8), будем искать  $\Psi^\dagger(u^*)$  в виде следующего разложения по дзета-функциям Вейерштрасса:

$$\Psi^\dagger(u^*) = \left( I + \sum_{\alpha=1}^{2N} [R^\alpha g_\alpha^{(1)}(u) + \sigma_3 R^\alpha \sigma_3 g_\alpha^{(2)}(u)] \right) C, \quad R^\alpha = R^{\alpha*},$$

$$g_\alpha^{(1)}(u) = \zeta(u - \mu_\alpha^{(1)}) + \eta_3, \quad g_\alpha^{(2)}(u) = \zeta(u - \mu_\alpha^{(2)}) - \eta_2.$$

Здесь  $C$  — диагональная вещественная матрица,

$$\mu_\alpha^{(1)} = u_\alpha + iK', \quad \mu_\alpha^{(2)} = \mu_\alpha^{(1)} + 2K, \quad -2K \leq u_\alpha \leq 0.$$

Как и ранее, представим элементы вырожденных матриц  $R^\alpha$  в форме

$$(R^\alpha)_{ab} = (m^\alpha)_a (X^\alpha)_b \quad (a, b = 1, 2; \alpha = 1, 2, \dots, 2N).$$

Матрица  $R^\alpha$  будет вещественной, например, при вещественных векторах  $\mathbf{m}^\alpha$ ,  $\mathbf{X}^\alpha$ , тогда функция  $\Psi^\dagger(u^*)$  будет двоякопериодической при ограничении:

$$\sum_{\alpha=1}^{2N} \text{diag} [m_1^\alpha X_1^\alpha, m_2^\alpha X_2^\alpha] = 0. \quad (7.5.22)$$

Далее при расчетах предполагаем вещественность векторов  $\mathbf{m}^\alpha$ . Вещественность векторов  $\mathbf{X}^\alpha$  и соотношение (7.5.22) окажутся следствиями вещественности  $\mathbf{m}^\alpha$ .

Условие обращения в нуль вычетов в полюсах произведения  $\Psi(u)\Psi^\dagger(u^*)$  дает алгебраические уравнения для расчета векторов  $\mathbf{X}^\alpha = (X_1^\alpha, X_2^\alpha)$  ( $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 2N$ ). Как и прежде, их решение удобно записать в терминах  $2N$ -мерных матриц  $G_a$  и векторов  $\mathbf{p}_a = (m_a^1, m_a^2, \dots, m_a^{2N})$ ,  $\mathbf{X}_a = (X_a^1, X_a^2, \dots, X_a^{2N})$ :

$$\mathbf{X}_a = -G_a^{-1} \mathbf{p}_a, \quad [G_a^{-1}]_{\alpha\beta} = \frac{\partial \ln \det G_a}{\partial [G_a]_{\beta\alpha}},$$

$$(G_a)_{\beta\alpha} = (\mathbf{m}^\beta \cdot \mathbf{m}^\alpha) g_\alpha^{(1)}(\lambda_\beta) - (-1)^a (\mathbf{m}^\beta \cdot \sigma_3 \mathbf{m}^\alpha) g_\alpha^{(2)}(\lambda_\beta),$$

где  $a, b = 1, 2$ ;  $\lambda_\beta = \mu_\beta^{(1)*}$ . Матрицы  $G_a$  обладают свойствами симметрии:

$$G_a^T = -G_a, \quad G_a^* = G_a,$$

с помощью которых нетрудно проверить, что следствиями вещественности векторов  $\mathbf{m}^\alpha$  оказываются свойство вещественности векторов  $\mathbf{X}^\alpha$  и тождество (7.5.22).

Как и ранее, эволюция векторов  $\mathbf{m}^\alpha$  определяется формулой

$$\mathbf{m}^\alpha = \Phi_0(\lambda_\alpha^*, \xi, \eta) \mathbf{c}^\alpha, \quad \lambda_\alpha^* \equiv \mu_\alpha^{(1)} = u_\alpha + iK'.$$

Для «затравочного» решения (7.5.6) матрица  $\Phi_0(\lambda_\alpha^*, \xi, \eta)$  вещественна. Отсюда следует, что векторы  $\mathbf{m}^\alpha$  будут вещественными только тогда, когда  $\mathbf{c}^\alpha = (c_1^\alpha, c_2^\alpha)$  — произвольные постоянные вещественные векторы. Без ограничения общности числа  $c_{1,2}^\alpha$  можно выбрать так, чтобы выполнялось условие  $c_1^\alpha c_2^\alpha > 0$  (по  $\alpha$  нет суммирования).

Приведем выражение для элементов односолитонной матрицы (с точностью до несущественной матрицы  $W = \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ ):

$$\begin{aligned} [\Psi^\dagger(u^*)]_{11} &= r(\alpha_1(u)\alpha_2(u)m_1^1 m_1^2 + k^2 m_2^1 m_2^2 / 4), \\ [\Psi^\dagger(u^*)]_{12} &= r\alpha_1(\lambda_2^*)[-m_1^1 m_2^2 \alpha_1(u) + m_2^1 m_1^2 \alpha_2(u)], \\ [\Psi^\dagger(u^*)]_{21} &= r\alpha_1(\lambda_2^*)[-m_1^2 m_2^1 \alpha_1(u) + m_2^2 m_1^1 \alpha_2(u)], \\ [\Psi^\dagger(u^*)]_{22} &= r(\alpha_1(u)\alpha_2(u)m_2^1 m_2^2 + k^2 m_1^1 m_1^2 / 4), \end{aligned} \quad (7.5.23)$$

где

$$\alpha_\beta(u) = \frac{1 + \text{dn}v}{2 \text{sn}v} \Big|_{v=u-\mu_\beta^{(1)}} = \frac{k}{2} [\text{sn}(u - u_\beta) + i \text{cn}(u - u_\beta)], \quad \beta = 1, 2;$$

$$\begin{aligned} r^{-2} &= (k/2)^4 \left( (m_1^1 m_1^2)^2 + (m_2^1 m_2^2)^2 + \right. \\ &\quad \left. + [2k^{-1} \alpha_1(\lambda_2^*)]^2 [(m_1^1 m_2^2)^2 + (m_2^1 m_1^2)^2] + 2\delta m_1^1 m_2^1 m_1^2 m_2^2 \right), \\ \delta &= \text{sn}u_1 \text{sn}u_2 - \text{cn}u_1 \text{cn}u_2 - [2k^{-1} \alpha_1(\lambda_2^*)]^2 (\text{sn}u_1 \text{sn}u_2 + \text{cn}u_1 \text{cn}u_2). \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} \det \Psi^\dagger(u^*) &= 4k^{-2} \alpha_1(u) \alpha_2(u) = \\ &= -[\text{cn}(u - u_1) - i \text{sn}(u - u_1)][\text{cn}(u - u_2) - i \text{sn}(u - u_2)]. \end{aligned}$$

На этом заканчивается построение мультисолитонных матриц задачи Римана для асимметричной киральной модели. Отметим, что редукции в задачах Римана для уравнений Ландау–Лифшица двухосного ферромагнетика и для модели асимметричной киральной модели хотя и не совпадают, но являются близкими. Поэтому формулы для матриц задач Римана (5.2.27) и (7.5.21), (5.2.47) и (7.5.23) мало отличаются друг от друга. Отсюда следует, что решения уравнений асимметричной киральной модели с качественной точки зрения должны быть близки к решениям модели двухосного ферромагнетика.

Согласно формулам (7.5.5), (7.5.7) по выбранному «затравочному» решению  $\Phi_0$  с помощью мультисолитонных матриц  $\Psi$  находим новые решения асимметричной киральной модели в терминах полей  $g(\xi, \eta) \in SU(2)$ :

$$g = \exp\left(-\frac{i}{4}\pi\sigma_3\right) \frac{\Psi(u=0)\Phi_0(u=0)}{\sqrt{\det[\Psi(u=0)\Phi_0(u=0)]}}.$$

Приведем рабочие формулы для «одетых» форм Картана. Заметим, что матричные функции  $U(\lambda)$ ,  $V(\lambda)$  (7.5.4) имеют простые полюсы в точках, являющихся корнями уравнения  $\operatorname{sn} u = \sqrt{a_1/a_3}$ . Пусть  $u_0$  — корень уравнения  $\operatorname{sn} u = \sqrt{a_1/a_3}$ , лежащий в интервале  $0 \leq \operatorname{Re} u_0 \leq K$ ,  $\operatorname{Im} u_0 = 0$ . Тогда

$$\operatorname{sn} u_0 = \sqrt{\frac{a_3 - a_1}{a_3}}, \quad \operatorname{cn} u_0 = \sqrt{\frac{a_1}{a_3}}, \quad \operatorname{dn} u_0 = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}.$$

Приравнивая вычеты в полюсах  $u = \pm u_0$  «одевающих» соотношений (7.3.13), получаем простые формулы, выражающие новые формы Картана через «затравочные»:

$$\begin{aligned} \sigma_1 \sqrt{a_2} \omega_{2,\xi} - \sigma_2 \sqrt{a_1} \omega_{1,\xi} + \sigma_3 \sqrt{a_3} \omega_{3,\xi} &= \\ &= \Psi(u = u_0) \left[ \sigma_1 \sqrt{a_2} \omega_{2,\xi}^{(0)} - \sigma_2 \sqrt{a_1} \omega_{1,\xi}^{(0)} + \sigma_3 \sqrt{a_3} \omega_{3,\xi}^{(0)} \right] \Psi^\dagger(u = u_0); \\ \sigma_1 \sqrt{a_2} \omega_{2,\eta} - \sigma_2 \sqrt{a_1} \omega_{1,\eta} + \sigma_3 \sqrt{a_3} \omega_{3,\eta} &= \\ &= \Psi(u = -u_0) \left[ \sigma_1 \sqrt{a_2} \omega_{2,\eta}^{(0)} - \sigma_2 \sqrt{a_1} \omega_{1,\eta}^{(0)} + \sigma_3 \sqrt{a_3} \omega_{3,\eta}^{(0)} \right] \Psi^\dagger(u = -u_0). \end{aligned} \quad (7.5.24)$$

Определим векторные поля:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\xi, \eta) &= \frac{(a_1 + a_2 + a_3)}{2\sqrt{a_1 a_2 a_3}} (\sqrt{a_1} \omega_{1,\xi}, \sqrt{a_2} \omega_{2,\xi}, \sqrt{a_3} \omega_{3,\xi}), \\ \mathbf{B}(\xi, \eta) &= \frac{(a_1 + a_2 + a_3)}{2\sqrt{a_1 a_2 a_3}} (\sqrt{a_1} \omega_{1,\eta}, \sqrt{a_2} \omega_{2,\eta}, \sqrt{a_3} \omega_{3,\eta}). \end{aligned}$$

Как и в предыдущих разделах, из соотношений (7.5.24) вытекает, что длины векторов  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ , построенных процедурой «одевания», совпадают с таковыми для «затравочных» решений:  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}_0^2$ ,  $\mathbf{B}^2 = \mathbf{B}_0^2$ . Для частного решения (7.3.11) длина вектора  $\mathbf{A}$  не зависит от  $\eta$ , а длина вектора  $\mathbf{B}$  не зависит от  $\xi$ . Это не случайно, так как уравнения асимметричной модели (7.5.2) в терминах полей  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  имеют вид

$$\begin{aligned} \partial_\eta \mathbf{A} + [\mathbf{B} \times \mathbf{A}] + 2(a_1 + a_2 + a_3)^{-1} [\mathbf{A} \times a\mathbf{B}] &= 0, \\ \partial_\xi \mathbf{B} + [\mathbf{A} \times \mathbf{B}] + 2(a_1 + a_2 + a_3)^{-1} [\mathbf{B} \times a\mathbf{A}] &= 0, \end{aligned} \quad (7.5.25)$$

где  $a = \operatorname{diag}(a_1, a_2, a_3)$ .

Рассмотрим сначала односолитонное решение асимметричной модели, полученное «одеванием» частного решения (7.3.11) с помощью задачи Римана с нулями (7.5.10). Окончательный результат удобно записать через углы Эйлера  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  (определяющие, в частности, ориентацию трех взаимно перпендикулярных антиферромагнитных векторов



равновесной обменной структуры). После простых преобразований получаем:

$$\cos \theta = 1 - \frac{2(\operatorname{ch} 2\sigma - \cos 2S)}{\operatorname{ch} 2\sigma - \cos 2S + [2ik^{-1}\alpha(\lambda_1)]^2(\operatorname{ch} 2y + \cos 2\gamma)}, \quad (7.5.26)$$

$$\begin{aligned} \varphi + \psi &= -\frac{\pi}{2} + A(\xi) + B(\eta) + \frac{1}{i} \ln \frac{\operatorname{ch}(y - i\gamma)}{\operatorname{ch}(y + i\gamma)}, \\ \psi - \varphi &= -\frac{\pi}{2} - A(\xi) - B(\eta) + \frac{1}{i} \ln \frac{\operatorname{sh}(\sigma + iS)}{\operatorname{sh}(\sigma - iS)}, \end{aligned} \quad (7.5.27)$$

где вещественные параметры  $y$ ,  $S$ ,  $\sigma$ ,  $\gamma$  определяются соотношениями:

$$y = \ln \left| \frac{m_1}{m_2} \right|, \quad S = \arg \frac{m_1}{m_2}, \quad \alpha(0) = \frac{k}{2} \exp(\sigma + i\gamma).$$

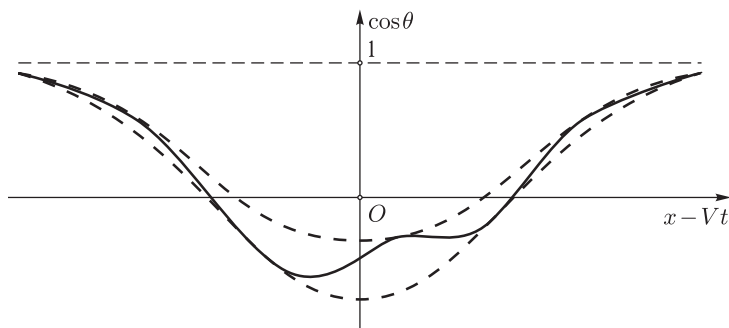
Обсудим решение простейшего вида. Выберем функции  $A(\xi)$ ,  $B(\eta)$  в виде (7.4.25). Тогда переменные  $y$ ,  $S$  примут вид (7.4.26). Выражение для  $\cos \theta$  (7.5.26) представляет пространственно локализованную волну типа ямки, которая движется как единое целое со скоростью  $V = -\partial_t y / \partial_x y$ . Но, в отличие от решения (7.4.23) осесимметричной модели, в данном случае профиль ямки претерпевает дополнительные пульсации с частотой  $\Omega = 2\partial_t S$  (рис. 7.6). Интересно, что, с точностью до обозначений, выражение для  $\cos \theta$  (7.5.26) совпадает с формулой (5.2.31) для третьей компоненты вектора намагниченности в двухосном ферромагнетике. Поэтому, согласно результатам гл. 5, ямка на рис. 7.6 становится наиболее протяженной и глубокой, когда комплексный параметр бризера  $\mu_1^{(1)} = \lambda_1^*$  приближается к особым значениям (7.5.9). В этом случае она ограничена стенками шириной порядка  $(\partial_x y)^{-1}$ , в пределах которых  $\cos \theta$  быстро изменяется от одного предельного значения  $\cos \theta \approx 1$  до другого  $\cos \theta \approx -1$ . Расстояние между стенками (протяженность ямки) определяется условием  $\cos \theta \approx 0$  и оказывается много больше ширины стенок. Стенки, ограничивающие ямку, совершают колебания относительно «центра тяжести» бризера. В пределе  $\mu_1^{(1)} \rightarrow u_1 + iK'$  размах колебаний возрастает настолько, что происходит распад бризера на два кинка, удаляющихся друг от друга (см. рис. 5.5).

Формула для поля  $(\varphi + \psi)$  (7.5.27) напоминает решение (7.4.23) в осесимметричной модели. В то же время, поле  $(\psi - \varphi)$  описывается не просто линейной функцией от  $x$ ,  $t$ , а суммой линейной и периодической функций от переменных  $x$ ,  $t$ .

Распределение намагниченности, соответствующее многоподрешечному солитону, имеет однородную асимптотику:

$$\mathbf{M} \rightarrow -\gamma \hbar a_3 (u_1 + u_2) \mathbf{n} \quad \text{при} \quad x \rightarrow \pm\infty,$$

где  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ , и представляет крайне сложное пространственно локализованное пульсирующее образование, движущееся с постоянной скоростью. В области локализации солитона оси локальных поворотов

Рис. 7.6. Распределение поля  $\cos \theta$  для пульсирующего солитона

вектора намагниченности и положения антиферромагнитных векторов обменной структуры испытывают колебания во времени и изменяются в пространстве при удалении от центра солитона.

Обсудим простейшее решение асимметричной модели, полученное «одеванием» частного решения (7.3.11) с помощью матриц  $\Psi(u)$  (7.5.23) с особыми нулями (7.5.9). В терминах углов Эйлера окончательный результат имеет вид

$$\begin{aligned} \cos \theta &= 1 - \\ &- \frac{2D^2 [\operatorname{ch}(y_2 - y_1) - \cos(\gamma_2 - \gamma_1)]}{\operatorname{ch}(y_2 + y_1) - \cos(\gamma_2 + \gamma_1) + D^2 [\operatorname{ch}(y_2 - y_1) - \cos(\gamma_2 - \gamma_1)]}; \quad (7.5.28) \\ \varphi + \psi &= \frac{\pi}{2} + A(\xi) + B(\eta) + \frac{1}{i} \ln \frac{\operatorname{sh}[(y_2 + y_1 + i(\gamma_2 + \gamma_1))/2]}{\operatorname{sh}[(y_2 + y_1 - i(\gamma_2 + \gamma_1))/2]}, \\ \psi - \varphi &= \frac{\pi}{2} - A(\xi) - B(\eta) + \frac{1}{i} \ln \frac{\operatorname{sh}[(y_2 - y_1 - i(\gamma_2 - \gamma_1))/2]}{\operatorname{sh}[(y_2 - y_1 + i(\gamma_2 - \gamma_1))/2]}. \end{aligned}$$

Вещественные параметры  $D$ ,  $y_\beta$ ,  $\gamma_\beta$  определяются формулами

$$D = 2k^{-1} \alpha_1 (\lambda_2^*), \quad y_\beta = \ln \frac{m_2^\beta}{m_1}, \quad \gamma_\beta = \operatorname{am}(u_\beta, k), \quad \beta = 1, 2,$$

где  $\operatorname{am}(u, k)$  — амплитуда  $u$ :

$$\exp[i \operatorname{am}(u, k)] = \operatorname{cn}(u, k) + i \operatorname{sn}(u, k).$$

При выборе линейных функций  $A(\xi)$ ,  $B(\eta)$  (7.4.25) переменные  $y_\beta$  принимают вид

$$y_\beta = y_\beta^{(0)} + \kappa_\beta (x - V_\beta t),$$

где  $y_\beta^{(0)}$ ,  $\kappa_\beta$ ,  $V_\beta$  — вещественные параметры. В этом случае выражение (7.5.28) для поля  $\cos \theta$  лишь константой  $D^2 \cos(\gamma_2 - \gamma_1)$  в числителе отличается от проекции  $S_3$  вектора намагниченности  $\mathbf{S}$  двухосного ферромагнетика в решении, которое описывает упругое столкновение двух доменных стенок (5.2.49). Отсюда следует, что поле  $\cos \theta$  (7.5.28)

описывает упругое столкновение двух кинков, подобное изображенному на рис. 5.6. В системе отсчета, связанной с одним из них, когда кинки расходятся на большие расстояния (в пределе  $y_{1,2} = \text{const}$ ,  $y_{2,1} \rightarrow \pm\infty$ ), решение (7.5.28) описывает отдельный кинк. При этом асимптотики функций  $\varphi \pm \psi$  отличаются от «затравочных» значений лишь постоянными слагаемыми.

В общем случае, выбирая разные функции  $A(\xi)$ ,  $B(\eta)$ , мы получаем пульсирующие солитоны или уединенные волны типа перегибов на фоне нелокализованных волн намагниченности и можем детально описать их взаимодействия.

Основанная на формализме Гельфанда–Левитана–Марченко схема интегрирования уравнений (7.5.25) с однородной асимптотикой полей **A**, **B** на бесконечности обсуждалась в работе [19]. Показано, что в этом случае элементарные возбуждения системы образуют идеальный газ из солитонов и квазичастиц с непрерывным спектром.

# СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫЕ МАГНИТОСТАТИЧЕСКИЕ И МАГНИТОУПРУГИЕ СОЛИТОНЫ

Когда внешнее воздействие на систему значительно, ее описание в терминах фурье-гармоник (или линейных квазичастиц) становится неадекватным, так как увеличивается взаимодействие между гармониками. В то же время, если амплитуды волн не слишком велики, то взаимодействие гармоник является слабым. В этом случае нелинейную динамику реальной физической системы удается корректно аппроксимировать в рамках нелинейной редуктивной теории возмущений (РТВ) [1]. До настоящего времени РТВ — это единственный мостик между линейной теорией и теорией солитонов. При построении РТВ, исходя из физики задачи, в реальной системе выделяются пространственно-временные области, где вводятся медленные (пространственные и временные) переменные. Медленные переменные вводятся посредством масштабных преобразований. Конечная цель — описание системы в терминах теории солитонов. Поскольку солитон, как известно, — результат баланса дисперсии и нелинейности, масштабные преобразования выбираются так, чтобы согласовать пространственно-временной отклик системы на возмущение с линейным законом дисперсии и сбалансировать эффекты дисперсии и нелинейности. При верном выборе масштабных преобразований низшие порядки РТВ дают замкнутое эффективное уравнение слабонелинейной динамики реальной системы. Практически важно, что РТВ, выделяя скрытые алгебраические симметрии, как правило, приводит к уравнениям, которые обладают поразительной универсальностью и оказываются интегрируемыми или близкими к ним. Тем самым достигается детальное описание реальной системы в рамках метода обратной задачи рассеяния или солитонной теории возмущений.

Построение и использование нелинейных моделей приводит к предсказанию новых типов солитонов и нелинейных дефектов, меняет представления о микроструктуре и свойствах среды. На этом пути теория может претендовать на аналитическое описание термодинамических, кинетических, механических, электрических и других свойств существенно нелинейных систем.

На основе различных вариантов нелинейной теории возмущений построены упрощенные модели слабонелинейной динамики целого ряда магнитных, упругих и магнитоупругих систем с необычным основным состоянием или нетривиальным характером взаимодействий, связанным с наличием сверхструктур, спонтанных деформаций,

проявлениями магнитостатики, теоретическое описание которых вызывает затруднения. В ферро- и антиферромагнитных пластинах исследованы особенности слабонелинейной динамики обменно-дипольных спиновых волн, связанные с конкуренцией обменной и нелокальной магнитостатической дисперсий, влиянием поверхности образца [2–9]. Установлено [2–6], что модуляции огибающей активационных спиновых волн не всегда описываются традиционно используемой моделью [10–19] — нелинейным уравнением Шредингера. Предложены альтернативные, в том числе нелокальные, модели, предсказаны новые типы нелинейных возбуждений. Исследована нелинейная динамика бесщелевых обменно-дипольных волн в антиферромагнитных пленках [7–9]. В антиферромагнетиках с геликоидальной структурой и в магнитоупругих средах описана перекачка энергии в области интенсивного резонансного взаимодействия активационных и бесщелевых мод, изучены различные солитонные режимы в окрестности нелинейного резонанса [20–23]. Вдали от резонанса слабонелинейная динамика магнитоупругих волн в ферро- и антиферромагнетиках рассматривалась в [24–27]. Трехволновые взаимодействия в антиферромагнетиках, удовлетворяющие условиям синхронизма, были исследованы в [28]. Вблизи ориентационных фазовых переходов при наличии управляющих электрического, магнитного полей, внешнего механического напряжения исследованы двухподрешеточные магнитоупругие солитоны, в том числе ассоциированные с разными ветвями линейного спектра, которые резонансно связаны между собой (см. [29] и ссылки, приведенные там).

В данной главе проиллюстрирована эффективность методов РТВ на примере теоретического описания малоамплитудных обменно-дипольных солитонов в ферро- и антиферромагнитных пластинах и магнитоупругих солитонов в ферромагнетиках. Перечисленные среды не эквивалентны по интенсивности нелинейных взаимодействий. Наиболее значительна нелинейность магнитных сред. В магнитоупругих средах упругий ангармонизм в основном индуцирован магнитной подсистемой.

### **8.1. Нелинейная динамика обменно-дипольных спиновых волн в ферромагнитной пластине конечной толщины**

*Ничего не выбрасывай.*

*Первое правило умного ремонта.*

Прогресс в области исследования особенностей возбуждения и распространения нелинейных спиновых волн в магнитных пластинках (пленках) стимулируется многообразием нелинейных явлений в пленках,

фундаментальными физическими свойствами этих материалов, а также их возможными приложениями в микроэлектронике и вычислительной технике (различные модуляторы и мультипликаторы, элементы логических устройств), в диагностике и контроле продукции. Пленочные материалы имеют интересные особенности, отсутствующие или слабо выраженные у массивных образцов. Тонкие ферромагнитные пленки железо-иттриевых гранатов с толщиной от нескольких микрон до десятков микрон и длиной от нескольких до десятков сантиметров обладают свойствами ферромагнитной среды в интервале от 1 ГГц до 20 ГГц. Этот частотный интервал интенсивно исследуется благодаря возможности возбуждения распространяющихся вдоль пленки обменно-дипольных спиновых волн. Одним из главных результатов такого изучения явилось обнаружение солитонов огибающей спиновых волн в ферромагнитных пленках [12–15].

При теоретическом описании слабонелинейной динамики спиновых волн в магнитных пленках, как правило, используют локальное нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) [10–19]. Его решения при различных начальных и краевых условиях исследовались методом обратной задачи рассеяния [30–36], численными методами [17–19]. Обычно в длинноволновой области приводят упрощенный вывод НУШ, использующий нелинейное дисперсионное соотношение  $\omega = \omega(k, |\varphi|)$  для спиновых волн. Упрощенный подход предполагает дифференцируемость  $\omega(k, |\varphi|)$  по волновому числу  $k$ . Однако в области малых волновых чисел ( $|kd| \ll 1$ ,  $d$  — толщина пленки)  $\omega(k, |\varphi|)$  является недифференцируемой функцией [37] и, следовательно, вывод НУШ некорректен. Вопросы о структуре солитоноводных состояний, об интерпретации данных по форме «огибающей», ее координатной и функциональной зависимостях требуют более детального теоретического анализа. Речь идет о последовательном учете эффектов, связанных с обменным и диполь-дипольным взаимодействиями. Если в линейных задачах об этих эффектах можно говорить, когда обменная и дипольная энергии сравнимы по величине, то специфика нелинейной задачи во многом определяется не их соотношением, а конкуренцией двух типов пространственной дисперсии — обменной и магнитостатической. Кроме того, учет магнитостатики делает задачу не только не одномерной, но и нелокальной, требует корректного учета краевых условий на поверхности образца.

При изучении процессов распространения активационных волн с волновым вектором  $\mathbf{k}$  в ферромагнитной пластине необходимо учитывать следующую иерархию масштабов. Во-первых, считается справедливым континуальное приближение, т.е.  $k^{-1} \gg a$ , где  $a$  — постоянная решетки,  $k \equiv |\mathbf{k}|$ . Во-вторых, полагается, что для описания колебаний намагниченности достаточно магнитостатического приближения, т.е.  $k \gg \omega/c$ , где  $\omega$  — частота колебаний,  $c$  — скорость света [38]. Для реальных значений соответствующих параметров  $\omega/c \approx 1 \div 10 \text{ см}^{-1}$ . В-третьих, получаемые уравнения

должны описывать пространственные модуляции намагниченности с характерным масштабом  $\lambda$ , большим  $k^{-1}$ , но меньшим линейного размера (длины) образца  $L$ . В настоящем разделе исследуется слабонелинейная динамика обменно-дипольных спиновых возбуждений в ферромагнитной пластине в следующем интервале масштабов:

$$L \gg \lambda \gg k^{-1} \gg a, \quad \lambda \ll c/\omega.$$

В указанном интервале возможно корректное описание взаимодействия спиновых волн в рамках локальных уравнений динамики. В этом разделе при построении эффективных локальных уравнений используется вариант редуктивной теории возмущений (РТВ), предложенный в работе [6]. Используемый подход не пригоден в области слишком малых  $k$ . Однако в области умеренных и больших значений волновых чисел он обладает значительными преимуществами и позволяет преодолеть трудности, связанные как с нелокальностью и неоднородностью магнитостатических взаимодействий, так и с нелинейностью задачи.

Известно [37–44], что из-за пространственного квантования волнового вектора спиновой волны вдоль нормали к поверхности пластины обменно-дипольный спектр описывается отдельными кривыми, каждая из которых отвечает своей волне, бегущей вдоль пластины. Подход работы [6] позволяет строить уравнения эволюции огибающих для любой спин-волновой моды из этого спектра в пластинах произвольной толщины.

Когда закон дисперсии спиновых волн не имеет особенностей, эффективное уравнение сводится к НУШ. Специально подчеркнем, что при последовательном выводе НУШ константа взаимодействия волн учитывает неоднородности распределения намагниченности вдоль нормали к пластине и нетривиально зависит от волнового вектора основной гармоник и толщины пластины. Поэтому предложенный в [11] и ставший традиционным вывод НУШ посредством разложения нелинейного дисперсионного соотношения  $\omega = \omega(k, |\varphi|)$  по степеням амплитуды спиновой волны  $|\varphi|$  в общем случае приводит к неверным результатам. При традиционном подходе зависимость частоты от амплитуды берется такой же, как в теории однородного ферромагнитного резонанса:  $\omega = \omega(k = 0, |\varphi|)$ . В результате не учитываются особенности взаимодействия неоднородных по толщине пластины и распространяющихся вдоль пластины спиновых волн с близкими значениями не равных нулю волновых векторов.

Интересно, что из-за конкуренции двух типов дисперсии — обменной и магнитостатической — для нижней по энергии ветви спектра спиновых волн зависимость  $\omega = \omega(k)$  имеет точку перегиба (точку нулевой дисперсии) в области умеренных значений волновых чисел. В окрестности точки перегиба происходит смена режима распространения волн. В этой области эффективное уравнение хотя и остается

локальным, но не сводится к НУШ. Особенности нелинейной динамики магнитостатических волн в окрестности точки нулевой дисперсии обсудим отдельно.

### 8.1.1. Редуктивная теория возмущений

Рассмотрим изотропную ферромагнитную пластину толщиной  $d$  в направлении  $Oz$ , неограниченную в плоскости  $xOy$ , намагниченную до насыщения однородным внешним постоянным магнитным полем  $\mathbf{H}_0$ , направленным вдоль нормали к поверхности (по оси  $Oz$ ). Будем считать, что в основном состоянии пластина однородно намагничена. Пусть спиновые волны распространяются вдоль пластины по оси  $Ox$ . Динамика вектора намагниченности описывается уравнением Ландау–Лифшица. Поскольку мы рассматриваем малоамплитудные волны, то в исходных уравнениях ограничимся кубическими слагаемыми по амплитуде отклонений намагниченности от основного состояния  $M_0\mathbf{n}$  ( $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ ):

$$\mathbf{M} = M_0\mathbf{n} + \mathbf{m}; \quad m_z \cong -\frac{m_x^2 + m_y^2}{2M_0}. \quad (8.1.1)$$

В этом приближении уравнения Ландау–Лифшица принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \partial_t m_x &= -\gamma [m_y (H_0 + H_z^{(m)} + \alpha \Delta m_z) - (M_0 + m_z) \alpha \Delta m_y], \\ \partial_t m_y &= -\gamma [(M_0 + m_z) (H_x^{(m)} + \alpha \Delta m_x) - \\ &\quad - m_x (H_0 + H_z^{(m)} + \alpha \Delta m_z)]. \end{aligned} \quad (8.1.2)$$

Анализ проведем для случая свободных поверхностных спинов:

$$\partial_z m_i \Big|_{z=\pm d/2} = 0, \quad i = x, y. \quad (8.1.3)$$

Хотя экспериментальная реализация этой ситуации (нормально намагниченная пластина при отсутствии закрепления спинов), по-видимому, затруднительна, тем не менее, ее рассмотрение полезно, поскольку позволяет выявить ряд особенностей, которые могут встретиться в более сложных случаях.

Размагничивающее поле  $\mathbf{H}^{(m)}$  удовлетворяет уравнениям магнитостатики:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= 4\pi \operatorname{div} \mathbf{m}; \quad \mathbf{H}^{(m)} = -\nabla \varphi; \quad |z| < d/2; \\ \Delta \tilde{\varphi} &= 0; \quad \mathbf{H}^{(m)} = -\nabla \tilde{\varphi}; \quad |z| > d/2. \end{aligned}$$

Здесь  $\varphi$  и  $\tilde{\varphi}$  — скалярные магнитостатические потенциалы внутри и вне пластины соответственно. Условия их сшивания на границе пластины имеют следующий вид:

$$\varphi \Big|_{z=\pm d/2} = \tilde{\varphi} \Big|_{z=\pm d/2}; \quad -\partial_z \tilde{\varphi} \Big|_{z=\pm d/2} = (-\partial_z \varphi + 4\pi (M_0 + m_z)) \Big|_{z=\pm d/2}.$$



Для дальнейшего важно, что краевую задачу можно переформулировать так, чтобы полностью исключить использование потенциала вне пластины  $\tilde{\varphi}$ . Для этого в потенциалах  $\varphi$  и  $\tilde{\varphi}$  выделим слагаемые, отвечающие равновесному состоянию:

$$\varphi = 4\pi M_0 z + f; \quad \tilde{\varphi} = \begin{cases} 2\pi M_0 d + \tilde{f}, & z \geq d/2, \\ -2\pi M_0 d + \tilde{f}, & z \leq -d/2. \end{cases}$$

Тогда уравнения магнитостатики и краевые условия примут вид:

$$\Delta f = 4\pi \operatorname{div} \mathbf{m}, \quad -\partial_z \tilde{f} \Big|_{z=\pm d/2} = (-\partial_z f + 4\pi m_z) \Big|_{z=\pm d/2}; \quad (8.1.4)$$

$$\Delta \tilde{f} = 0, \quad \tilde{f}(z = \pm d/2) = f(z = \pm d/2); \quad \tilde{f} \rightarrow 0 \quad (|z| \rightarrow \infty). \quad (8.1.5)$$

Решение краевой задачи Дирихле (8.1.5) по определению потенциала  $\tilde{f}$  вне пластины имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x, z) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x', z = d/2)(z - d/2)}{(x' - x)^2 + (z - d/2)^2} dx', \quad z \geq \frac{d}{2}; \\ \tilde{f}(x, z) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x', z = -d/2)(z + d/2)}{(x' - x)^2 + (z + d/2)^2} dx', \quad z \leq -\frac{d}{2}. \end{aligned} \quad (8.1.6)$$

С помощью (8.1.6) нетрудно выразить предельные значения производной  $\partial_z \tilde{f} \Big|_{z=\pm d/2}$  через  $f$ :

$$\partial_z \tilde{f} \Big|_{z=\pm d/2} = \pm \partial_x \hat{H} f(x', z = \pm d/2) = \pm \hat{H} \partial_{x'} f(x', z = \pm d/2). \quad (8.1.7)$$

Здесь  $\hat{H}$  — оператор преобразования Гильберта:

$$\hat{H} u = \frac{1}{\pi} \text{V. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(\xi')}{\xi' - \xi} d\xi'.$$

После подстановки (8.1.7) в (8.1.4) получим эффективную краевую задачу для определения потенциала  $f$ :

$$\begin{aligned} \Delta f &= 4\pi \operatorname{div} \mathbf{m}; \\ \mp \hat{H} \partial_{x'} f \left( z = \pm \frac{d}{2} \right) &= [-\partial_z f + 4\pi m_z] \Big|_{z=\pm d/2}. \end{aligned} \quad (8.1.8)$$

Таким образом, можно ограничиться решением магнитостатических уравнений внутри пластины, однако при этом условия на поверхности пластины становятся интегро-дифференциальными. Физически появление подобных краевых условий является следствием дальнего действия характера диполь-дипольных сил. Последнее обстоятельство

упущено в [10, 11] при выводе НУШ для магнитостатических спиновых волн.

Линеаризованная задача (8.1.2), (8.1.3), (8.1.8) имеет решения в форме плоских волн  $\propto \exp(ikx + i\omega(k)t)$ . Наша цель состоит в том, чтобы описать модуляции этих линейных мод, обусловленные взаимодействием гармоник. Для малоамплитудных волн взаимодействия являются слабыми, поэтому естественно предположить, что модуляции быстро осциллирующих волн также будут слабыми. Решение уравнений (8.1.2), (8.1.3), (8.1.8) будем искать в виде [1, 45, 46]

$$\begin{aligned} m_j &= \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon^n \sum_{l=-\infty}^{+\infty} m_j^{(n,l)}(z, X_1, \tau) \exp i\theta_l, \quad j = x, y, \\ f &= \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon^n \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f^{(n,l)}(z, X_1, \tau) \exp i\theta_l, \quad \theta_l = l(kx + \omega t), \end{aligned} \quad (8.1.9)$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр, характеризующий отклонение системы от линейного режима,  $X_1 = \varepsilon(x + c_g t)$ ,  $c_g$  — групповая скорость,  $X_1$ ,  $\tau = \varepsilon^2 t$  — медленные переменные. Выбор масштабных преобразований пространственных и временных переменных определяется требованием баланса эффектов дисперсии и нелинейности в уравнениях РТВ и, в конечном счете, оправдывается самосогласованностью полученных результатов. Параметр  $c_g$  и закон дисперсии  $\omega = \omega(k)$  определяются в процессе решения задачи. Вещественность полей  $f$  и  $m_i$  гарантируют условия

$$m_i^{(n,l)*} = m_i^{(n,-l)}; \quad f^{(n,l)*} = f^{(n,-l)}.$$

Заметим, что здесь и далее  $\varepsilon$  выступает в качестве формально-го параметра разложения, который позволяет наглядно сгруппировать члены одного порядка величины. В конце вычислений полагаем  $\varepsilon = 1$ . В то же время, после того как ряд (8.1.9) будет получен, сравнением порядков величины его членов нетрудно выявить физический малый параметр и тем самым установить область применимости асимптотического разложения (8.1.9). В данной задаче физический малый параметр разложения — это  $(k\lambda)^{-1} \ll 1$ .

Разложение потенциала по степеням параметра  $\varepsilon$  (8.1.9) приводит к разложению поля  $\mathbf{H}^{(m)}$  следующего вида:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{(m)} &= -\nabla\varphi = -4\pi M_0 \mathbf{n} + \\ &+ \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon^n \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (\mathbf{H}^{(m)})^{(n,l)} \exp[i l (kx + \omega t)]; \\ (H_x^{(m)})^{(1,l)} &= -i k l f^{(1,l)}; \\ (H_x^{(m)})^{(n,l)} &= -i k l f^{(n,l)} - \partial_{X_1} f^{(n-1,l)}, \quad n \geq 2; \\ (H_z^{(m)})^{(n,l)} &= -\partial_z f^{(n,l)}, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (8.1.10)$$

После подстановки (8.1.9), (8.1.10) в уравнения (8.1.2), (8.1.8) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , приходим к системе зацепляющихся уравнений для коэффициентов  $m_i^{(n,l)}$  и  $f^{(n,l)}$ .

Краевые условия для уравнений теории возмущений получаются разложением по степеням параметра  $\varepsilon$  исходных граничных условий (8.1.3), (8.1.8). В частности, (8.1.3) дает

$$\partial_z m_i^{(n,l)} \Big|_{z=\pm d/2} = 0.$$

Специфика рассматриваемой задачи состоит в том, что краевое условие в (8.1.8) носит интегральный характер. В результате возникают связи между коэффициентами  $f^{(n,l)}$  с различными  $n$ . После подстановки (8.1.9) в (8.1.8) левая часть второй формулы (8.1.8) содержит две группы членов: слагаемые с  $l = 0$  и  $l \neq 0$ . Поскольку ядро оператора Гильберта является однородной функцией, для первой группы слагаемых выполняются соотношения типа

$$\hat{H} \partial_{x'} f^{(n,0)}(X'_1) = \varepsilon \hat{H} \partial_{X'_1} f^{(n,0)}(X'_1),$$

которые показывают, что слагаемые с индексом  $n$  формируют краевые условия в следующем порядке  $O(\varepsilon^{n+1})$  РТВ. Краевые условия для коэффициентов  $f^{(n,0)}$  имеют вид

$$\begin{aligned} & \left[ -\partial_z f^{(1,0)} + 4\pi m_z^{(1,0)} \right] \Big|_{z=\pm d/2} = 0; \\ & \left[ -\partial_z f^{(n,0)} + 4\pi m_z^{(n,0)} \right] \Big|_{z=\pm d/2} = \mp \hat{H} \partial_{X'_1} f^{(n-1,0)} \left( X'_1, z = \pm \frac{d}{2} \right), \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Вторая группа слагаемых (с  $l \neq 0$ ) содержит интегралы вида

$$\begin{aligned} & \hat{H} \partial_{x'} [f^{(n,l)}(X'_1) \exp(i k l x')] = \\ & = \hat{H} [(\varepsilon \partial_{X'_1} f^{(n,l)}(X'_1) + i k l f^{(n,l)}(X'_1)) \exp(i k l x')]. \end{aligned} \quad (8.1.11)$$

Анализ показывает, что в первых порядках теории возмущений ( $n = 1, 2, 3$ ) при вычислении интеграла (8.1.11) можно пренебречь зависимостью подынтегральной функции от медленной переменной  $X_1$  и воспользоваться соотношением

$$\hat{H} \exp(i k l x') = i \operatorname{sign}(k l) \exp(i k l x).$$

Подчеркнем, что следующие порядки РТВ требуют более аккуратного разложения интеграла (8.1.11) по степеням  $\varepsilon$ , которые, однако, нам не понадобятся при выводе эффективных динамических уравнений. Как будет видно из дальнейшего анализа, уравнения слабонелинейной динамики спиновых волн получаются в третьем порядке РТВ ( $n = 3$ ).

При этом краевые условия для коэффициентов  $f^{(n,l)}$  с  $l \neq 0$  ( $n = 1, 2, 3$ ) принимают простой локальный вид:

$$\begin{aligned} \left[ -\partial_z f^{(1,l)} + 4\pi m_z^{(1,l)} \right] \Big|_{z=\pm d/2} &= \pm |kl| f^{(1,l)} \left( X_1, z = \pm \frac{d}{2} \right); \\ \left[ -\partial_z f^{(n,l)} + 4\pi m_z^{(n,l)} \right] \Big|_{z=\pm d/2} &= \pm |kl| f^{(n,l)} \left( X_1, z = \pm \frac{d}{2} \right) \mp \\ &\mp i \operatorname{sign}(kl) \partial_{X_1} f^{(n-1,l)} \left( X_1, z = \pm \frac{d}{2} \right), \quad n = 2, 3. \end{aligned}$$

Замечательно, что все магнитостатические краевые задачи допускают явное решение. Результаты вычисления потенциалов  $f^{(n,l)}$  с  $l, k \neq 0$  ( $n = 1, 2, 3$ ) можно объединить формулой

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n \sum_{l=-\infty, l \neq 0}^{l=+\infty} f^{(n,l)}(z, X_1, \tau) \exp i\theta_l &= \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n \sum_{l=-\infty, l \neq 0}^{l=+\infty} \exp i\theta_l \times \\ &\times \sum_{m=1}^2 \frac{\varepsilon^m}{m!} (-i \partial_{lk})^m \left( \hat{G}_l \partial_{X_1}^m m_x^{(n,l)} + \left( \frac{\partial_z \hat{G}_l}{i k l} \right) \partial_{X_1}^m m_z^{(n,l)} \right). \end{aligned} \quad (8.1.12)$$

Здесь  $\hat{G}_l$  — интегральный оператор:

$$\hat{G}_l \varphi = -2\pi \operatorname{sign}(kl) \int_{-d/2}^{d/2} \exp(-|lk(z-z')|) \varphi(z') dz'.$$

Для получения эффективного уравнения динамики потребуется также  $f^{(2,0)}$ . Мы нашли:

$$f^{(2,0)} = 4\pi \int_{-d/2}^z m_z^{(2,0)}(z', X_1, \tau) dz'. \quad (8.1.13)$$

Здесь и далее, в соответствии с (8.1.1), учитываем, что  $m_z^{(n,l)}$  выражается через  $m_j^{(n,l)}$  ( $j = x, y$ ).

С помощью соотношений (8.1.12), (8.1.13) в уравнениях динамики намагнитченности (8.1.2) выразим размагничивающие поля  $\mathbf{H}^{(m)}$  через  $m_j^{(n,l)}$ . В результате динамические уравнения становятся интегро-дифференциальными. Сушественно, что интегрирования проводятся лишь по переменной  $z$ , характеризующей неоднородность намагнитченности вдоль нормали к пластине. Успех метода основан на возможности разделения переменных  $z$  и  $X_1, \tau$  в каждом порядке РТВ. Последовательно осуществляя эту процедуру, получим эффективное локальное уравнение, описывающее распространение спиновых волн вдоль пластины.

### 8.1.2. Первый порядок теории возмущений. Спектр спиновых возбуждений

Первый порядок теории возмущений по  $\varepsilon$  дает систему однородных линейных уравнений, которая при  $l = \pm 1$  (гармоники  $\propto \exp(\pm i(\omega t + kx))$ ) определяет спектр спиновых волн и собственные функции, характеризующие неоднородность распределения намагниченности вдоль нормали к пластине. При  $l \neq \pm 1$  оператор однородной линейной системы не вырожден, и поэтому она имеет лишь тривиальные решения:  $m_i^{(1,l)} = f^{(1,l)} = 0$  при  $l \neq \pm 1$ . При  $l = 1$  решение для  $m_i^{(1,1)}$  можно представить в форме

$$m_i^{(1,1)}(X_1, \tau, z) = S_i(z) \Psi(X_1, \tau), \quad i = x, y,$$

где  $\Psi(X_1, \tau)$  — произвольная функция медленных переменных, которая будет определена в дальнейшем. Векторная функция  $\mathbf{S}(z) = (S_x, S_y)$  является решением системы интегро-дифференциальных уравнений

$$\widehat{L}_1 \mathbf{S} = 0; \quad \partial_z \mathbf{S} \Big|_{z=\pm d/2} = 0, \quad (8.1.14)$$

соответствующим собственному значению  $\omega = \omega(k)$ . Здесь мы ввели оператор

$$\widehat{L}_1 = \begin{pmatrix} i\omega & \omega_H - \gamma M_0 \alpha (\partial_z^2 - k^2) \\ \omega_H - \gamma M_0 \alpha (\partial_z^2 - k^2) + ik\gamma M_0 \widehat{G}_1 & -i\omega \end{pmatrix},$$

где  $\omega_H = \gamma H_0$ . Различные собственные значения  $\omega(k)$  отвечают различным ветвям спектра спиновых волн.

Развиваемая теория возмущений в равной мере пригодна для изучения взаимодействия спиновых волн, принадлежащих любой из ветвей спектра линейных мод. Далее описано взаимодействие волн, принадлежащих какой-либо одной ветви спектра, например самой низкой по энергии. В окончательных формулах специфика конкретной ветви спектра проявится лишь в форме закона дисперсии и величине постоянной взаимодействия волн.

Покажем, что задача (8.1.14) на собственные значения и собственные функции допускает явное решение. Из первого уравнения системы (8.1.14) выразим  $S_x$  через  $S_y$ :

$$S_x = -\frac{1}{i\omega} [\omega_H - \gamma M_0 \alpha (\partial_z^2 - k^2)] S_y$$

и подставим во второе уравнение:

$$\begin{aligned} & \left( [\omega_H - \gamma M_0 \alpha (\partial_z^2 - k^2) + i\gamma M_0 k \widehat{G}_1] \times \right. \\ & \quad \left. \times [\omega_H - \gamma M_0 \alpha (\partial_z^2 - k^2)] - \omega^2 \right) S_y = 0. \end{aligned} \quad (8.1.15)$$

Поделимся на уравнение (8.1.15) оператором  $\partial_z^2 - k^2$ . Вследствие тождества

$$(\partial_z^2 - k^2) \hat{G}_1 \varphi = 4\pi i k \varphi,$$

справедливого для произвольной функции  $\varphi$ , получаем

$$\begin{aligned} & \left( [\omega_H (\partial_z^2 - k^2) - \gamma M_0 \alpha (\partial_z^2 - k^2)^2 - \omega_M k^2] \times \right. \\ & \left. \times [\omega_H - \gamma M_0 \alpha (\partial_z^2 - k^2)] - \omega^2 \right) S_y = 0, \end{aligned} \quad (8.1.16)$$

где обозначено  $\omega_M = 4\pi\gamma M_0$ . Решение уравнения (8.1.16) имеет вид

$$S_y = \sum_{j=1}^6 C_j \exp(i f_j z), \quad (8.1.17)$$

где  $C_j$  — постоянные интегрирования, а  $f_i = f_i(k, \omega)$  — корни уравнения

$$\begin{aligned} & k^2 [\Omega^2 + \omega_M \Omega - \omega^2] + f^2 [\Omega^2 - \omega^2] = 0; \\ & \Omega = \omega_H + \gamma M_0 \alpha (f^2 + k^2). \end{aligned} \quad (8.1.18)$$

Поскольку уравнение (8.1.18) является кубическим относительно  $f^2$ , корни имеют вид  $\pm f_1, \pm f_2, \pm f_3$ . Соотношение (8.1.18) для параметров  $f_j$  эквивалентно приведенному в работе [37], где использовался иной подход при вычислении спектра спиновых волн.

Поскольку уравнение (8.1.18) получено как результат действия на (8.1.15) оператора  $(\partial_z^2 - k^2)$ , решение (8.1.17), вообще говоря, не удовлетворяет (8.1.15). А именно, после подстановки (8.1.17) в соотношение (8.1.15), левая часть (8.1.15) не обращается в нуль, а дает некоторое решение однородного уравнения

$$(\partial_z^2 - k^2) \varphi = 0.$$

Если в этом решении приравнять нулю коэффициенты при линейно независимых функциях вида  $\exp(\pm k z)$ , мы получим условия на параметры  $C_j$ , при выполнении которых функция (8.1.17) удовлетворит исходному интегро-дифференциальному уравнению (8.1.15):

$$\sum_{j=1}^6 \frac{C_j}{|k| \pm i f_j} \exp\left(\mp i f_j \frac{d}{2}\right) = 0. \quad (8.1.19)$$

Краевые условия  $\partial_z \mathbf{S} \Big|_{z=\pm d/2} = 0$  дают еще четыре соотношения:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^6 f_j C_j \exp\left(\pm i f_j \frac{d}{2}\right) = 0; \\ & \sum_{j=1}^6 C_j (f_j^2 + k^2) f_j \exp\left(\pm i f_j \frac{d}{2}\right) = 0. \end{aligned} \quad (8.1.20)$$

Система однородных линейных уравнений для постоянных  $C_j$  имеет нетривиальное решение лишь при условии, что ее детерминант обращается в нуль. Это требование дает трансцендентное уравнение для определения спектра спиновых волн  $\omega = \omega(k)$ . Простой анализ соотношений (8.1.18)–(8.1.20) приводит к важному заключению. Когда внешнее поле перпендикулярно поверхности пластины, спектр линейных мод зависит лишь от  $|\mathbf{k}|$  [37]. Это обстоятельство приводит к недифференцируемости закона дисперсии спиновых волн в точке  $\mathbf{k} = 0$ . Следовательно, в области малых волновых чисел не применима традиционная схема вывода НУШ путем дифференцирования закона дисперсии спиновых волн по компонентам вектора  $\mathbf{k}$ . Слабонелинейная динамика длинноволновых магнитостатических возбуждений оказывается нелокальной и описывается другой моделью [2–5].

### 8.1.3. Приближенное решение краевой задачи на собственные значения

В пластине конечной толщины для получения приближенных (но достаточно точных) решений задачи на собственные значения (8.1.14) эффективен подход [44], основанный на разложении  $\mathbf{S}(z)$  по полной, ортогональной на отрезке  $|z| \leq d/2$  системе функций  $\mathbf{S}_n^p(z)$ :

$$\mathbf{S}(z) = \sum_{p=1}^2 \sum_{n=0}^{+\infty} C_n^p \mathbf{S}_n^p(z); \quad (8.1.21)$$

$$\mathbf{S}_n^p(z) = \frac{[i(-1)^p, 1]}{\sqrt{1 + \delta_{n0}}} \cos \left[ \kappa_n \left( z + \frac{d}{2} \right) \right], \quad \kappa_n = \frac{\pi n}{d}.$$

Функции  $\mathbf{S}_n^p(z)$  соответствуют спин-волновым резонансным колебаниям в режиме стоячих волн, коэффициенты  $C_n^p$  определяют амплитуды различных мод,  $n$  — число узлов в распределении намагниченности вдоль нормали к пластине. В результате краевая задача на собственные значения (8.1.14) редуцируется к алгебраической бесконечной однородной системе, определяющей постоянные  $C_n^p$  [44]:

$$\begin{aligned} [\omega + \Omega_n(k)] C_n^1 + \frac{\omega_M}{2} \sum_{n'} P_{nn'} [C_{n'}^1 - C_{n'}^2] &= 0; \\ [\omega - \Omega_n(k)] C_n^2 + \frac{\omega_M}{2} \sum_{n'} P_{nn'} [C_{n'}^1 - C_{n'}^2] &= 0, \end{aligned} \quad (8.1.22)$$

где

$$\begin{aligned} P_{nn'} &= \frac{k^2}{k_{n'}^2} \left( \delta_{nn'} - \frac{k^2}{k_n^2} F_n \left[ \frac{1 + (-1)^{n+n'}}{2} \right] [(1 + \delta_{n0})(1 + \delta_{n'0})]^{-\frac{1}{2}} \right); \\ F_n &= \frac{2}{|kd|} [1 - (-1)^n \exp(-|kd|)], \\ \Omega_n(k) &= \omega_H + \gamma M_0 \alpha k_n^2, \quad k_n^2 = k^2 + \kappa_n^2. \end{aligned}$$

В (8.1.22) слагаемые с  $n \neq n'$  характеризуют взаимные влияния мод различных типов. В области волновых чисел, где различные ветви спектра достаточно удалены друг от друга, недиагональную часть оператора линейной системы (8.1.22) можно учесть по теории возмущений [47]. В главном приближении (при  $n = n'$ ) из (8.1.22) находим

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \Omega_n(k) [\Omega_n(k) + \omega_M P_{nn}]; \\ C_n^2 &= -\frac{\omega_M}{2} P_{nn} \left[ \omega - \Omega_n(k) - \frac{\omega_M}{2} P_{nn} \right]^{-1} C_n^1.\end{aligned}\quad (8.1.23)$$

Подчеркнем, что разложение (8.1.21) позволяет корректно аппроксимировать лишь динамику объемных спиновых волн, распространяющихся вдоль пластины. Используемые базисные функции непригодны для описания поверхностных волн.

#### 8.1.4. Нелинейное уравнение эволюции для огибающей спиновых волн при $\partial_k^2 \omega \neq 0$

Во втором порядке  $O(\varepsilon^2)$  РТВ функции  $m_i^{(2,l)}$  ( $i = x, y$ ) отличны от нуля только при  $l = 0, \pm 1, \pm 2$ . Мы нашли [6]:

$$\begin{aligned}m_i^{(2,0)} &= A_i(z) |\Psi|^2, \quad \mathbf{m}^{(2,1)} = -i \partial_k \mathbf{S} \partial_{X_1} \Psi + \mathbf{S} \Psi_1, \\ m_i^{(2,2)} &= B_i(z) \Psi^2; \quad i = x, y.\end{aligned}$$

Здесь  $\Psi_1(X_1, \tau)$  — вторая произвольная функция от медленных переменных. Функции  $A_j(z)$  и  $B_j(z)$ , характеризующие неоднородность распределения намагниченности вдоль нормали к пластине, могут быть вычислены явно и представляют наборы из экспонент [6]. Заметим, что векторная функция  $\mathbf{m}^{(2,1)} = (m_x^{(2,1)}, m_y^{(2,1)})$  удовлетворяет неоднородной линейной системе типа

$$\hat{L}_1 \mathbf{m}^{(2,1)} = \mathbf{q}.$$

Поскольку оператор  $\hat{L}_1$  вырожден, система разрешима лишь при выполнении условия ортогональности [48]:

$$\int_{-d/2}^{+d/2} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{q}) dz = 0,$$

где  $\mathbf{P} = (S_y, -S_x)$  — решение сопряженного однородного уравнения:  $\mathbf{P} \hat{L}_1 = 0$ . Условие ортогональности будет выполнено, когда параметр  $c_g$  совпадает с групповой скоростью спиновых волн:  $c_g = \partial_k \omega$ .

Эффективное уравнение для огибающей спиновых волн получается в третьем порядке теории возмущений  $O(\varepsilon^3)$  при рассмотрении неоднородной линейной системы для функции  $\mathbf{m}^{(3,1)} = (m_x^{(3,1)}, m_y^{(3,1)})$ .



Линейный оператор этой системы снова совпадает с  $\widehat{L}_1$ . Условие разрешимости неоднородной системы приводит к замкнутому уравнению на функцию от медленных переменных  $\Psi(X_1, \tau)$ , которая была произвольной в низших порядках теории возмущений. Это уравнение и будет эффективным уравнением динамики спиновых волн. В результате получаем, что квазиодномерная динамика спиновых волн в пластине конечной толщины описывается НУШ:

$$i \partial_\tau \Psi - \frac{1}{2} \partial_k^2 \omega(k) \partial_{X_1}^2 \Psi + g |\Psi|^2 \Psi = 0, \quad (8.1.24)$$

где постоянная взаимодействия спиновых волн носит интегральный характер, зависит от  $k$  и определяется выражением

$$g = \int_{-d/2}^{d/2} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{f}) dz \left[ \int_{-d/2}^{d/2} (\mathbf{P} \cdot \sigma_3 \mathbf{S}) dz \right]^{-1}, \quad (8.1.25)$$

где  $\mathbf{f} = (f_x, f_y)$ ;

$$\begin{aligned} f_y(\mathbf{S}) &= c_x(\mathbf{S}) - i\gamma \left( (\partial_z \widehat{G}_1) [S_x A_x + S_x^* B_x + S_y A_y + S_y^* B_y] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{M_0} [|\mathbf{S}|^2 (i k \widehat{G}_1 S_x) + \frac{1}{2} (i k \widehat{G}_1 S_x)^* S^+ S^-] \right), \\ f_x(\mathbf{S}) &= c_y(\mathbf{S}), \quad S^\pm = S_x \pm i S_y, \quad |\mathbf{S}|^2 = |S_x|^2 + |S_y|^2, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \\ c_j &= -i\gamma \left( \frac{\alpha}{M_0} \left[ \frac{S_j^*}{2} (\partial_z^2 - 4k^2) S^+ S^- - \frac{S^+ S^-}{2} (\partial_z^2 - k^2) S_j^* + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + S_j \partial_z^2 |\mathbf{S}|^2 - |\mathbf{S}|^2 (\partial_z^2 - k^2) S_j \right] - \frac{4\pi}{M_0} S_j |\mathbf{S}|^2 + A_j (\partial_z \widehat{G}_1) S_x + \right. \\ &\quad \left. + B_j (\partial_z \widehat{G}_1)^* S_x^* + S_j^* \left[ (\partial_z \widehat{G}_2) B_x - \frac{1}{4 i k M_0} (\partial_z^2 \widehat{G}_2) S^+ S^- \right] \right), \quad j = x, y. \end{aligned}$$

Функции  $\mathbf{S}$  и  $\Psi$  описывают медленную эволюцию огибающей основной гармоники:

$$m_x^{(1,1)} + i m_y^{(1,1)} = S^+ \Psi.$$

Для нижней по энергии ветви спиновых волн в тонкой пластине распределение намагниченности вдоль нормали к пластине близко к однородному [49]. Поэтому можно пренебречь зависимостью функций  $S_i$ ,  $A_i$ ,  $B_i$  ( $i = x, y$ ) от координаты  $z$ . Существенного упрощения задачи можно достичь, если определить указанные функции из усредненных по толщине пластины уравнений РТВ. Это дает [6]:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \Omega(k) [\Omega(k) + \omega_M \sigma(k)], \quad \Omega(k) = \omega_H + \gamma M_0 \alpha k^2, \\ \sigma(k) &= 1 - \frac{1 - \exp(-|kd|)}{|kd|}, \quad S_y = -i \frac{\omega}{\Omega} S_x, \quad A_i = B_i = 0. \end{aligned} \quad (8.1.26)$$

Без ограничения общности далее полагаем  $S_x = 1$ . Усредненное описание (8.1.26) в точности соответствует ветви спектра с  $n = 0$  в (8.1.22), для которой распределение намагниченности не имеет узлов вдоль нормали к пластине. Согласно [44], только эта ветвь возбуждается переменным магнитным полем в перпендикулярно намагниченной пленке при свободных поверхностных спинах. В результате постоянная взаимодействия волн принимает вид

$$g = \frac{\gamma \Omega}{2\omega M_0} \left[ (4\pi - \alpha k^2) \left( 1 + \frac{\omega^2}{\Omega^2} \right)^2 + \left( \frac{3}{2} \alpha k^2 + 2\pi\mu(k) \right) \left( 1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2} \right)^2 - 2\pi\sigma(k) \left( 3 + \frac{\omega^2}{\Omega^2} \right) \right], \quad (8.1.27)$$

где  $\mu(k) = [1 - \exp(-|2kd|)] |2kd|^{-1}$ .

Известно, что уравнение (8.1.24) допускает экспоненциальные солитоны, если его параметры удовлетворяют критерию Лайтхилла [50]:

$$g \partial_k^2 \omega < 0. \quad (8.1.28)$$

Пусть параметры пластины таковы, что распределение намагниченности вдоль нормали к поверхности близко к однородному. Используем для проверки критерия (8.1.28) результаты усредненного описания (8.1.26), (8.1.27). Как показывает численный анализ, в случае достаточно толстых пленок (рис. 8.1) для принятых значений материальных параметров условие (8.1.28) удовлетворяется в достаточно широкой области изменения  $|kd|$ , вплоть до  $|kd| \approx 10$ .

Что касается более тонких пленок (рис. 8.2), для тех же значений материальных параметров условие (8.1.28) нарушается уже при  $|kd| \approx 1$ ; вблизи этой точки величина  $\partial_k^2 \omega(k)$  обращается в нуль, а затем меняет

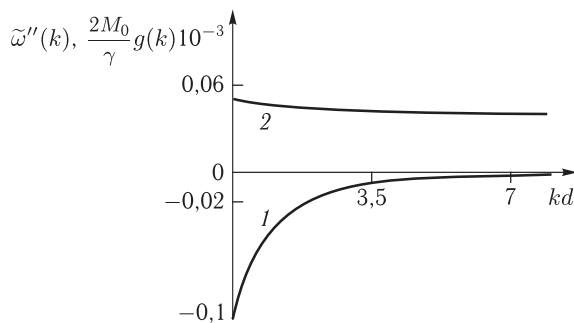


Рис. 8.1. Зависимость от волнового вектора  $k$  второй производной от закона дисперсии,  $\tilde{\omega}'' = \partial^2 \omega / \partial (kd)^2$  (кривая 1) и параметра взаимодействия волн  $g$  (кривая 2) для перпендикулярно намагниченной пленки со свободными поверхностными спинами толщиной  $d = 1$  мкм. При расчете принято  $\alpha = 5 \cdot 10^{-11}$  см<sup>2</sup>;  $\omega_M / \omega_H = 1/2$

знак, становясь положительной. В этом интервале волновых чисел дисперсионное слагаемое уравнения (8.1.24) близко к нулю.

При  $k = 0$  выражение (8.1.27) для постоянной взаимодействия волн совпадает с полученным в [11] из разложения по амплитуде частоты однородного ферромагнитного резонанса. В то же время, приведенные на рис. 8.1 и 8.2 зависимости свидетельствуют о чувствительности указанной постоянной к параметрам пластины и значениям волнового вектора основной гармоник. Поэтому вычисление постоянной взаимодействия из разложения по намагниченности частоты однородного ферромагнитного резонанса не может привести к верной теории.

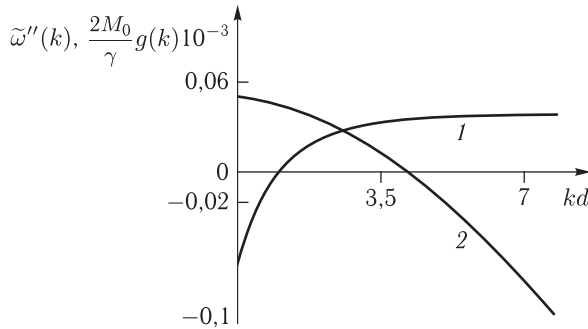


Рис. 8.2. Зависимость от волнового вектора  $k$  второй производной от закона дисперсии,  $\tilde{\omega}_k'' = \partial^2 \omega / \partial (kd)^2$  (кривая 1) и параметра взаимодействия волн  $g$  (кривая 2) для перпендикулярно намагниченной пленки со свободными поверхностными спинами толщиной  $d = 0,1$  мкм. При расчете принято  $\alpha = 5 \cdot 10^{-11}$  см<sup>2</sup>;  $\omega_M / \omega_H = 1/2$

Одной из важных проблем рассматриваемой задачи является вопрос об условиях зарождения солитонов в области (8.1.28). Пусть  $\lambda$ ,  $T$  и  $A$  — характерные пространственный, временной масштабы модуляции спиновых волн и их амплитуда соответственно. Поскольку при образовании солитонов имеет место баланс эффектов дисперсии и нелинейности, из (8.1.24) получаем оценки:

$$\lambda^2 \sim \frac{|\partial_k^2 \omega(k)|}{gA^2}, \quad T \sim \frac{1}{gA^2}.$$

Если формирование солитонов происходит из импульсов продолжительностью  $\tau_0$ , то  $\lambda \sim c_g \tau_0$ . Тогда для пороговой амплитуды спиновых волн, начиная с которой происходит формирование солитонов, получаем оценку [11]:

$$gA^2 \sim \frac{|\partial_k^2 \omega|}{(c_g \tau_0)^2}.$$

При этом должно выполняться неравенство  $\lambda \gg k^{-1}$ , т. е.

$$\tau_0 d \omega_H k \frac{\partial \tilde{\omega}(kd)}{\partial (kd)} \gg 1; \quad \tilde{\omega}(k) = \frac{\omega(k)}{\omega_H}.$$

Полагая  $\omega_H \approx 10^{10}$  Гц,  $\tau_0 \approx 10\text{--}20$  нс и принимая во внимание численные значения производной от закона дисперсии на рис. 8.1 и 8.2, можно видеть, что в области существования солитонных состояний  $k \gg 10^3\text{--}10^4$  см $^{-1}$ . При этом в условиях эксперимента всегда выполняется неравенство  $L \gg k^{-1}$ , поскольку линейные размеры образца  $L$ , как правило, порядка 2–5 мм [18].

## 8.2. Квазисолитоны в окрестности точки нулевой дисперсии

*Если вам непонятно какое-то слово в техническом тексте, не обращайтесь к нему внимания. Текст полностью сохранит смысл и без него.*

*Закон Купера*

Анализ спектра спиновых волн в ферромагнитных пленках привел к любопытному заключению. По крайней мере, для ветви спектра с  $n = 0$  (см. (8.1.23)) имеется интервал волновых чисел, где вторая производная закона дисперсии близка к нулю. Существование такой области — результат конкуренции обменных и диполь-дипольных взаимодействий. Описание слабонелинейной динамики в рамках НУШ (8.1.24) в этом интервале волновых чисел становится некорректным, так как возрастает роль дисперсии, описываемой высшими производными по медленной координате. Для получения соответствующего эволюционного уравнения требуется модификация изложенной выше схемы РТВ.

Мы нашли, что при  $\partial_k^2 \omega = 0$ ,  $\partial_k^3 \omega \neq 0$  баланс эффектов дисперсии и нелинейности отражает следующая форма масштабных преобразований:

$$m_j = \sum_{n=3}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{l=-\infty}^{+\infty} m_j^{(n,l)}(z, X, \tau) \exp i\theta_l, \quad \theta_l = \omega t + kx, \quad j = x, y;$$

$$f = \sum_{n=3}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f^{(n,l)}(z, X, \tau) \exp i\theta_l, \quad X = \varepsilon^2 (x + c_g t),$$

$$\tau = \varepsilon^6 t, \quad c_g = \partial_k \omega,$$

где  $\varepsilon$  — параметр разложения в РТВ.

Эффективное уравнение для огибающей спиновых волн получается в девятом порядке по параметру  $\varepsilon$  как условие разрешимости неоднородной линейной системы, определяющей  $m_j^{(9,1)}$ . Поскольку вычисления аналогичны уже рассмотренным, приведем окончательный результат [51]:

$$i \partial_\tau \varphi + \frac{i}{2} \partial_k^3 \omega \partial_X^3 \varphi + g |\varphi|^2 \varphi = 0;$$

$$m_x^{(3,1)} + i m_y^{(3,1)} = S^+(z) \varphi(X, \tau). \quad (8.2.1)$$

Здесь значение  $\partial_k^3 \omega$  вычисляется в точке, где  $\partial_k^2 \omega(k) = 0$ . Несмотря на отличия в промежуточных вычислениях, выражения для функций  $S_j(z)$  ( $j = x, y$ ) и постоянной взаимодействия волн  $g$  совпадают с прежними (см. (8.1.14) и (8.1.25)). Далее для определенности считаем  $g > 0$ ,  $\partial_k^3 \omega > 0$ .

Аналитически и численными методами в [51] проанализированы сценарии эволюции различных начальных распределений намагниченности. Установлено, что в аномальной области начальное про-

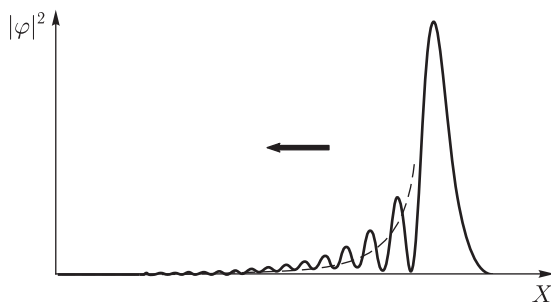


Рис. 8.3. «Отщепление» нелинейного волнового цуга от начального локализованного распределения намагниченности. Штриховой линией обозначена степенная зависимость  $|\varphi|^2 \sim (-X)^{-3}$

странственно локализованное распределение намагниченности вначале «сбрасывает» часть энергии, излучая нелинейный волновой цуг. Интересно, что при  $\partial_k^2 \omega = 0$  полевой импульс распределения намагниченности зависит от градиента фазы поля  $\varphi$ :

$$P = \frac{4}{\gamma M_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_X \theta R^2 dX.$$

Здесь мы ввели амплитуду  $R$  и фазу  $\theta$  поля  $\varphi$ :

$$\varphi = R \exp i\theta.$$

Градиенты фазы излученного волнового цуга и оставшейся части распределения намагниченности отличаются знаком. В результате «сброшенное» излучение и оставшаяся локализованная часть распределения намагниченности движутся в одном направлении, и это не противоречит закону сохранения импульса.

Уравнение (8.2.1) по типу дисперсии подобно модели Кортевега–де Вриза (КдВ), а по характеру нелинейности — НУШ. По аналогии с результатами, известными для этих моделей [52–54], мы предполагаем, что в пространственно-временном интервале  $|X| \leq (\partial_k^3 \omega \tau)^{1/3}$  эволюция нелинейного волнового цуга определяется автомодельными решениями типа

$$\varphi = \tau^{-1/2} \chi(\eta), \quad \eta = \tau^{-1/3} X. \quad (8.2.2)$$

Автомодельный волновой режим (8.2.2) развивается после того как начальное распределение намагниченности приобретает слева степенную асимптотику типа  $|\varphi|^2 \propto (-X)^{-3}$  при  $X \rightarrow -\infty$ . Интересно, что в области  $X < 0$  уравнение (8.2.1) имеет следующее точное решение:

$$\varphi = \sqrt{\frac{8}{3} \left| \frac{\partial_k^3 \omega}{g} \right|} \frac{\sqrt[4]{7}}{\sqrt{2(a-X)^3}} \exp \left( -i \operatorname{sign}(g \partial_k^3 \omega) \sqrt{\frac{7}{4}} \ln(a-X) + i\delta \right).$$

Осцилляции с левой стороны от начального распределения намагниченности на рис. 8.3, вероятно, можно интерпретировать как результат развития неустойчивостей приведенного решения.

Аналитически функцию  $\chi(\eta)$  в (8.2.2) вычислить не удастся, однако можно исследовать ее асимптотическое поведение:

$$\begin{aligned} \chi(\eta) &= R_1 \exp i\theta + R_2 \exp(-i\theta) + O \left[ (-\eta)^{-3/2} \right], \\ \theta &= \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{\partial_k^3 \omega}} (-\eta)^{-3/2}, \\ R_1 &= R_1^{(0)} \exp \left[ \frac{3}{2} i g \ln(-\eta) \left( 2|R_2^{(0)}|^2 + |R_1^{(0)}|^2 \right) \right], \\ R_2 &= R_2^{(0)} \exp \left[ \frac{3}{2} i g \ln(-\eta) \left( 2|R_1^{(0)}|^2 + |R_2^{(0)}|^2 \right) \right], \quad \eta \rightarrow -\infty; \\ \chi(\eta) &= O \left( \exp \left( -\frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{\partial_k^3 \omega}} \eta^{3/2} \right) \right), \quad \eta \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (8.2.3)$$

На границе области применимости автомодельного решения комплексные постоянные  $R_i^{(0)}$  ( $i = 1, 2$ ) в (8.2.3) приобретают зависимость от медленной переменной  $\xi = X/\tau$ . При  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $X/\tau = \text{const}$  автомодельное решение (8.2.3) сшивается со следующим асимптотическим решением уравнения (8.2.1):

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{m=1}^{\infty} \tau^{-m+1/2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f_{m,l}(\xi, \tau) \exp[i(2l-1)\theta], \\ \theta &= \frac{\tau}{3} (\partial_k^3 \omega)^{-1/2} (-2\xi)^{3/2}, \\ f_{m,l}(\xi, \tau) &= \exp[i\tau \chi_{m,l}(\xi, \tau)] \left( R_{m,l}^{(0,0)}(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(\ln \tau)^k}{\tau^n} R_{m,l}^{(n,k)}(\xi) \right), \\ \chi_{m,l}(\xi, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(\ln \tau)^k}{\tau^n} \chi_{m,l}^{(n,k)}(\xi), \quad \xi = \frac{X}{\tau}, \quad \xi < 0. \end{aligned}$$

«Сбросив» часть энергии, начальное распределение намагниченности трансформируется в долгоживущее солитоподобное образование,

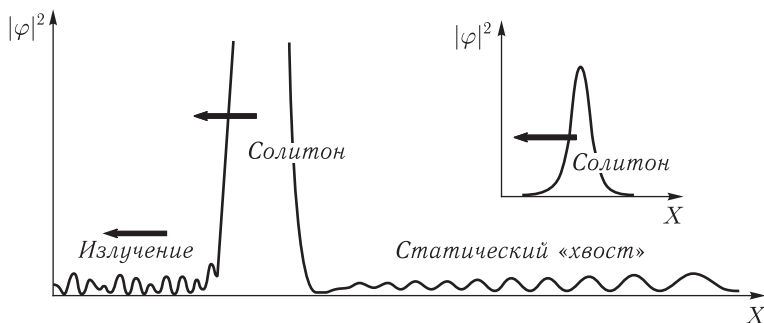


Рис. 8.4. Движущийся «светлый» квазисолитон. У основания солитона (при увеличении рисунка) заметны квазистатический «хвост» и малоамплитудное излучение вперед

движущееся с почти постоянной скоростью справа налево. Изменения формы такого «светлого» квазисолитона происходят по двум причинам: во-первых, этот объект продолжает излучать вперед (влево) малоамплитудные волны; во-вторых, квазисолитон оставляет за собой квазистатический малоамплитудный хвост, который при больших временах представляет почти статическую периодическую волну с малыми колебаниями  $|\varphi|$  около некоторого постоянного значения (рис. 8.4).

Следуя [55, 56], определим координату «центра тяжести»  $\langle X \rangle$  квазисолитона и его скорость  $v$ :

$$\langle X \rangle = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} X R^2 dX, \quad N = \int_{-\infty}^{+\infty} R^2 dX,$$

$$v = \frac{d\langle X \rangle}{d\tau} = -\frac{\partial_k^3 \omega}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ (\partial_X R)^2 + (\partial_X \theta)^2 R^2 \right] dX.$$

Величина  $N$  является интегралом движения. Таким образом, скорость квазисолитона зависит от градиентов амплитуды и фазы поля  $\varphi$ . Направление его движения определяется только знаком третьей производной от закона дисперсии (в нашем случае знак «+», поэтому квазисолитон движется влево).

Из результатов численного моделирования следует, что в области локализации светлого квазисолитона градиент фазы поля  $\varphi$ :  $\partial_X \arg \varphi = k_0 \approx \text{const} < 0$ , и он такой по величине, что размер квазисолитона  $\Delta$  больше длины волны, модулирующей его профиль  $(\Delta > |k_0|^{-1})$ .

Используем эту информацию для построения приближенного решения уравнения (8.2.1), которое будет описывать внутреннюю структуру квазисолитона. Построению асимптотического решения по степеням

параметра  $|k_0|^{-1} \Delta^{-1}$  соответствует следующая версия нелинейной теории возмущений:

$$\varphi = R(\varsigma) \exp \left( i \left[ k_0 X + \frac{\partial_k^3 \omega}{6} k_0^3 \tau + \tau \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \Omega^{(n)} + \chi(\varsigma) \right] \right), \quad (8.2.4)$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр, характеризующий медленную эволюцию формы волны,  $\varsigma = \varepsilon(X + v\tau)$ ,

$$v = v^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n v^{(n)}, \quad R(\varsigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n R^{(n)}(\varsigma), \quad \chi = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \chi^{(n)}(\varsigma).$$

Уравнения, появляющиеся в каждом порядке по параметру  $\varepsilon$ , последовательно разрешаются. Функции  $\chi^{(n)}(\varsigma)$  выражаются через коэффициенты  $R^{(n)}(\varsigma)$ , а для поправки  $R^{(1)}(\varsigma)$  получается замкнутое уравнение:

$$\Omega^{(2)} R^{(1)} + \frac{1}{2} \partial_k^3 \omega k_0 \partial_k^3 R^{(1)} - g (R^{(1)})^3 = 0.$$

Среди его ограниченных решений имеются пространственно локализованные и периодические. Постоянные интегрирования и параметры  $\Omega^{(n)}$ ,  $v^{(n)}$  для обоих типов решений можно выбрать так, чтобы не возникали секулярные члены, обусловленные сдвигами фазы волны и ее трансляцией, которые пропорциональны  $R^{(1)}$  и  $\partial_{\varsigma} R^{(1)}$ . Для локализованной волны после простых вычислений находим:

$$\begin{aligned} v^{(0)} &= \frac{k_0^2}{2} \partial_k^3 \omega, \quad v^{(2)} = -\frac{\kappa^2}{6} \partial_k^3 \omega, \quad \Omega^{(2)} = \frac{\kappa^2}{2} |\partial_k^3 \omega|, \\ v^{(1)} &= \Omega^{(1)} = R^{(2)} = \Omega^{(3)} = \Omega^{(4)} = 0, \quad R^{(1)} = \kappa \sqrt{\left| \frac{\partial_k^3 \omega k_0}{g} \right|} \operatorname{sech}(\kappa \varsigma), \\ \chi^{(1)} &= -\frac{\kappa}{2k_0} \operatorname{th}(\kappa \varsigma), \quad \frac{\Omega^{(2)}}{g} > 0, \quad g k_0 \partial_k^3 \omega < 0. \end{aligned}$$

Здесь  $\kappa$  — параметр, определяющий размер квазисолитона ( $\Delta \sim \sim \kappa^{-1} > |k_0|^{-1}$ ). Такой солитон не может быть стационарным, поскольку резонансно взаимодействует с волной излучения, фазовая скорость которой совпадает со скоростью  $v \approx v^{(0)} + v^{(2)}$  солитона.

Интересно и важно, что малоамплитудное излучение не может быть описано в рамках традиционной теории возмущений (8.2.4) по степеням физического малого параметра  $\delta = O(|k_0|^{-1} \Delta^{-1})$ , так как его амплитуда  $C$  не аналитически зависит от  $\delta$  [51, 57–61]:

$$C \sim \delta^{-1} \exp \left( -\frac{\pi}{2\delta} \right).$$

Здесь  $\delta = |\kappa/r_0| < 1$ ,  $r_0 = -3k_0 > 0$  — волновое число, соответствующее условию «черенковского резонанса». Для описания излучения,



связанного с солитоном, в работах [57–61] предложены специальные варианты теории возмущений, близкие к методу Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна. В этих работах слагаемое с дисперсией третьего порядка трактовалось как малое возмущение для НУШ с квадратичной дисперсией. В [51] нами проанализирован противоположный предельный случай, когда эффекты дисперсии высшего порядка доминируют. Найдены явные выражения, описывающие изменения во времени параметров «светлого» квазисолитона в результате излучения.

Обсудим возможность возбуждения вблизи точки нулевой дисперсии пространственно нелокализованных монохроматических нелинейных волн:

$$\varphi_0 = \sqrt{w_0} \exp [i (\Omega_0 \tau + k_0 X)], \quad \Omega_0 = \frac{1}{6} \partial_k^3 \omega k_0^3 + g w_0. \quad (8.2.5)$$

Здесь  $w_0 = \text{const} > 0$ ,  $k_0$  — изменение волнового числа при сдвиге от особой точки, где  $\partial_k^2 \omega = 0$ . В результате линейного анализа устойчивости установлено, что волна (8.2.5) устойчива относительно длинноволновых возмущений лишь при условии  $g k_0 \partial_k^3 \omega > 0$ . В нашем случае  $g \partial_k^3 \omega > 0$ , поэтому волна (8.2.5) устойчива при  $k_0 > 0$ . Развитие модуляционной неустойчивости волны (8.2.5) с  $k_0 < 0$  ведет к образованию «светлых» квазисолитонов, которые мы уже обсуждали.

С целью исследования длинноволновых малоамплитудных модуляций волны (8.2.5) будем искать приближенные решения уравнения (8.2.1) в следующем виде:

$$\varphi_0 = \sqrt{w(X, \tau)} \exp [i (\Omega_0 \tau + k_0 X + \chi(X, \tau))], \quad (8.2.6)$$

$$w(X, \tau) = w_0 (1 + \nu(X, \tau)),$$

где  $|\nu| \ll 1$ ,  $|\partial_X \chi| \ll |k_0|$ ,  $|\partial_\tau \chi| \ll |\Omega_0|$ . В длинноволновом пределе в линейных членах уравнений для функций  $\nu$  и  $\chi$  можно пренебречь пространственными производными выше четвертого порядка, а из нелинейных членов следует оставить лишь ведущие — квадратичные по полям  $\nu$ ,  $\chi$ , содержащие минимальное число производных. В указанном приближении параметр  $\nu$  выражается через поле  $\chi$ :

$$w_0 g \nu = \hat{L} \chi, \quad \hat{L} = \partial_\tau - \frac{k_0^2}{2} \partial_k^3 \omega \partial_X,$$

а для расчета  $\chi$  получается замкнутое уравнение [51]:

$$\left[ -\hat{L}^2 - \frac{1}{3} \partial_k^3 \omega \hat{L} \partial_X^3 + \partial_k^3 \omega k_0 g \partial_X^2 - \left( \frac{\partial_k^3 \omega}{2} k_0 \right)^2 \partial_X^4 \right] \chi +$$

$$+ \frac{\partial_k^3 \omega}{2} \partial_X \left[ g w_0 (\partial_X \chi)^2 + 2 k_0 \partial_X \chi \hat{L} \chi \right] + \frac{\partial_k^3 \omega}{2} k_0 \hat{L} (\partial_X \chi)^2 = 0. \quad (8.2.7)$$

Уравнение (8.2.7) допускает ограниченные решения типа волн стационарного профиля. В частности, при определенных условиях существуют самолокализованные волны следующего вида:

$$\partial_{\xi} \chi = -\frac{\gamma}{\delta} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{\gamma} \xi}{2} \right), \quad \xi = X + u\tau, \quad (8.2.8)$$

где постоянные параметры  $\gamma > 0$ ,  $\delta$  выражаются через коэффициенты уравнения (8.2.7),  $u = \text{const}$ .

Результат численного моделирования решений уравнения (8.2.1), которые получаются после импульсного возбуждения неоднородности на фоне гармонической волны (8.2.5) ( $k_0 > 0$ ), представлен на рис. 8.5. В процессе эволюции начальной неоднородности на фоне волны (8.2.5) образуется долгоживущее локализованное состояние — «темный» квазисолитон, профиль которого хорошо согласуется с решением (8.2.8).

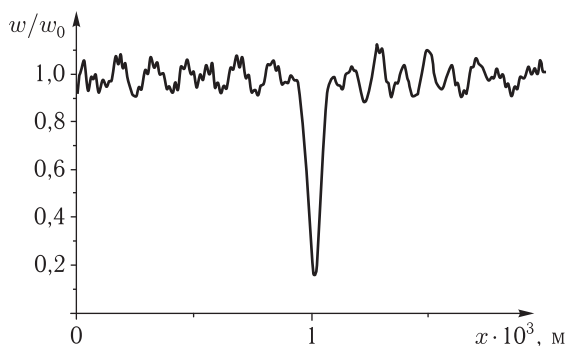


Рис. 8.5. «Темный» квазисолитон на фоне нелинейной монохроматической волны:  $k_0 d \approx 0,1$ ,  $\partial_k^3 \omega \approx 0,04$ ,  $g \approx 0,9$ ,  $d \approx 1$  мкм. Длина пластины в направлении распространения волны  $\approx 0,5$  см

Решение (8.2.8) напоминает солитон уравнения КдВ. Это не случайно. Квазисолитоны (8.2.8) можно интерпретировать как связанные состояния малоамплитудных голдстоуновских мод, распространяющихся на фоне волны (8.2.5) с приращением волнового числа  $k_0 > 0$ . Голдстоуновские моды имеют законы дисперсии  $\lambda_i(p)$  ( $i = 1, 2$ ):

$$\lambda_i(p) = \left( \frac{k_0^2}{2} \partial_k^3 \omega + \varepsilon_i m \right) p + \left( \frac{1}{6} \partial_k^3 \omega + \varepsilon_i n \right) p^3,$$

где

$$\varepsilon_1 = 1, \quad \varepsilon_2 = -1, \quad m^2 = g k_0 w_0 \partial_k^3 \omega > 0, \quad n = (k_0 \partial_k^3 \omega)^2 / (8m).$$

При записи формулы (8.2.8) предполагаем

$$k_0 d (pd)^2 < 4g w_0 / \partial_k^3 \omega.$$

Анализ показывает, что на фоне волны (8.2.5) наиболее интенсивно взаимодействуют между собой моды с  $\varepsilon_1 = 1$ . Когда модуляции волны (8.2.5) обусловлены возбуждением и взаимодействием только таких мод, удобно перейти в систему отсчета, движущуюся с фазовой скоростью  $v = m + k_0^2 \partial_k^3 \omega / 2$  этих мод и воспользоваться новыми переменными:  $\xi = X + v\tau$ ,  $T = \tau$ . Тогда зависимость поля  $\chi(\xi, T)$  от переменной  $T$  будет слабой и в уравнении (8.2.7) можно пренебречь слагаемыми с  $\partial_T^2 \chi$ ,  $\partial_T \partial_X^3 \chi$ , а также нелинейными членами, содержащими производные  $\partial_T \chi$ . В результате (8.2.7) сведется к интегрируемому методом обратной задачи рассеяния уравнению КдВ:

$$\partial_T f + \left( \frac{1}{6} \partial_k^3 \omega + n \right) \partial_\xi^3 f - \frac{\partial_k^3 \omega}{4} \left( 3k_0 + \frac{g w_0}{m} \right) \partial_\xi f^2 = 0, \quad (8.2.9)$$

где  $f = \partial_\xi \chi$ . Нетрудно проверить, что решение (8.2.8) обобщает односолитонное решение модели КдВ (8.2.9).

Интересно, что данная задача связана с предыдущей, так как позволяет теоретически описать модуляции «хвоста» «светлого» квазисолитона. В главном приближении «хвост» соответствует статической волне (8.2.5), где  $\Omega_0 = 0$ ,  $k_0 = -(6g w_0 / \partial_k^3 \omega)^{1/3} < 0$ . С точки зрения линейного анализа при  $k_0 < 0$  такая волна нестабильна. Однако компьютерное моделирование дает неожиданный результат. Малоамплитудная волна, которая формируется позади «светлого» квазисолитона, остается неизменной в течение длительного времени, претерпевая лишь малые пространственные периодические модуляции. Не зависящая от времени «модулированная структура» (8.2.6) ( $\Omega_0 = 0$ ) существует потому, что ее энергия, приходящаяся на один пространственный период, меньше чем энергия состояния с  $\varphi = 0$ . Нелинейные взаимодействия при определенных условиях могут стабилизировать статическую волну.

В [51] найдено приближенное решение уравнения (8.2.7), описывающее модуляции хвоста «светлого» квазисолитона:

$$\varphi \approx \sqrt{w_0(1 + \nu(X))} \exp \left[ -i \left( \frac{6g w_0}{\partial_k^3 \omega} \right)^{1/3} X + i \chi(X) \right],$$

$$\nu = b \operatorname{dn}^2 \eta - a, \quad \eta = mX, \quad \partial_X \chi = -c\nu.$$

Положительные постоянные параметры  $b > a, c, m$  и модуль функции Якоби выражаются через параметры уравнения (8.2.1) и  $w_0$ .

Перечисленные тенденции к формированию квазисолитонов вполне естественны, так как в результате излучения волнового цуга или же возбуждения нелокализованных волн мы сдвигаемся от точки нулевой дисперсии в область волновых чисел, где обычное НУШ с квадратичной дисперсией допускает формирование «светлых» или «темных» солитонов.

Как уже упоминалось ранее, в области слишком малых волновых чисел нельзя пренебречь нелокальным характером связи между намаг-

ниченностью и магнитным полем, обусловленным дальнедействующим диполь-дипольным взаимодействием. В этой области эффективные уравнения в тонких ферромагнитных пленках оказываются интегро-дифференциальными [2–5]. Нелокальная часть магнитостатической дисперсии сглаживает неоднородности распределения намагниченности в пленках. В результате в длинноволновом пределе в тонких ферромагнитных пленках оказывается невозможным существование чисто экспоненциальных магнитных солитонов, описываемых локальными уравнениями типа НУШ. В то же время, в таких пленках предсказаны и аналитически описаны новые слаболокализованные обменно-дипольные состояния типа алгебраических солитонов [2–5]. В следующем разделе при анализе магнитостатических волн в антиферромагнитной пленке обсуждаются близкие вопросы.

### 8.3. Нелокальная динамика голдстоуновских возбуждений в антиферромагнитной пленке

*Если я и открыл некоторые новые истины в науках, то я могу утверждать, что все они либо являются прямыми следствиями пяти или шести главных задач, которые мне удалось решить, либо зависят от них; я рассматриваю их как такое же число сражений, в которых военное счастье было на моей стороне.*

*Р. Декарт*

Интерес к антиферромагнитным пленкам появился сравнительно недавно и обусловлен не только специфическими свойствами этих материалов, но и успехами в приготовлении высококачественных образцов — пленок — благодаря достижениям молекулярно-лучевой эпитаксии [62, 63]. В рамках НУШ слабонелинейная динамика активационных обменно-дипольных спиновых волн в антиферромагнитных пленках исследовалась в работе [16]. Однако существует широкий класс, например, двухподрешеточных антиферромагнетиков с анизотропией типа «легкая плоскость», где более важны бесщелевые (голдстоуновские) моды, так как для их возбуждения требуется меньшая энергия. В таких материалах внешнее магнитное поле, перпендикулярное плоскости пленки, изменяет не только закон дисперсии спиновых волн, но и интенсивность их взаимодействия.

Условие отсутствия намагниченности в основном состоянии антиферромагнетиков не препятствует существованию в них магнитостатических спиновых волн [63, 64]. Отмеченные ранее особенности взаимодействия обменно-дипольных спиновых волн в ферромагнитных пленках характерны и для антиферромагнитных пленок. В то же время,

наличие нескольких магнитных подрешеток проявляется в формировании в антиферромагнитных пленках новых мультисолитонных состояний с другим по сравнению с ферромагнетиками поведением во внешнем магнитном поле.

В этом разделе изложены результаты работ [7–9]. Получены интегро-дифференциальные уравнения, описывающие взаимодействие голдстоуновских обменно-дипольных волн в тонкой антиферромагнитной пленке. Предсказаны алгебраические солитоны и мультисолитонные режимы. Аналитически описан процесс релаксации солитонов.

### 8.3.1. Постановка задачи

Рассмотрим антиферромагнитную пленку с анизотропией типа «легкая плоскость». Постоянное магнитное поле  $\mathbf{H}$  и ось анизотропии направлены перпендикулярно поверхности пластины вдоль оси  $Oz$ :  $\mathbf{H} = H\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$  (рис. 8.6). В рамках двухподрешеточной модели

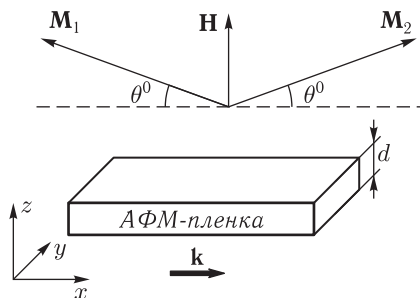


Рис. 8.6. Геометрия задачи при описании нелинейных возбуждений в антиферромагнитной пленке с анизотропией типа «легкая плоскость»

антиферромагнетика, которая достаточно проста и соответствует реальным магнитным материалам, плотность энергии имеет следующий вид [38]:

$$\begin{aligned}
 w &= w_1 + w_2; \quad w_2 = -\frac{1}{2} ((\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2) \cdot \mathbf{H}^{(m)}); \\
 w_1 &= \frac{\alpha_1}{2} [(\partial_i \mathbf{M}_1)^2 + (\partial_i \mathbf{M}_2)^2] + \\
 &\quad + \alpha_2 (\partial_i \mathbf{M}_1 \cdot \partial_i \mathbf{M}_2) + \delta (\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2) - \frac{1}{2} \beta [(\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{n})^2 + (\mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{n})^2] - \\
 &\quad - \beta' (\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{n}) - H ((\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2) \cdot \mathbf{n}),
 \end{aligned}$$

где  $\mathbf{M}_i$  ( $i = 1, 2$ ) — векторы намагниченностей подрешеток,  $\mathbf{M}_1^2 = \mathbf{M}_2^2 = M_0^2 = \text{const}$ ;  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\delta$  — постоянные неоднородного и однородного обмена соответственно,  $\beta$ ,  $\beta'$  — константы магнитной анизотропии. Для антиферромагнетика с анизотропией типа «легкая плоскость»

$\beta' > \beta$ . Размагничивающее поле  $\mathbf{H}^{(m)}$  определяется уравнениями магнитостатики:

$$\begin{aligned} -\Delta\varphi + 4\pi \operatorname{div}(\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2) &= 0; \quad \mathbf{H}^{(m)} = -\nabla\varphi; \\ \Delta\tilde{\varphi} &= 0; \quad \mathbf{H}^{(m)} = -\nabla\tilde{\varphi}, \end{aligned} \quad (8.3.1)$$

где  $\varphi$  и  $\tilde{\varphi}$  — магнитные скалярные потенциалы внутри и вне пластины соответственно.

Для дальнейшего анализа удобно использовать следующую параметризацию векторов намагниченностей подрешеток:

$$\mathbf{M}_i = M_0 (\cos\theta_i \cos\varphi_i, \cos\theta_i \sin\varphi_i, \sin\theta_i), \quad i = 1, 2.$$

Основное однородное состояние системы определяется условием минимума энергии:

$$\int \frac{\delta w}{\delta\theta_i} d^3\mathbf{r} = \int \frac{\delta w}{\delta\varphi_i} d^3\mathbf{r} = 0,$$

откуда следуют равновесные значения углов:

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(0)} - \varphi_2^{(0)} &= \pi, \quad \theta_1^{(0)} = \theta_2^{(0)} = \theta^0, \\ \sin\theta^0 &= \frac{H}{2M_0(\delta + 4\pi - \beta_2)}, \quad \beta_2 = \frac{\beta + \beta'}{2}. \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае уравнения, описывающие динамику нелинейных возбуждений, могут быть записаны с помощью функции Лагранжа с плотностью

$$L = \frac{M_0}{g} (\sin\theta_1 \partial_t \varphi_1 + \sin\theta_2 \partial_t \varphi_2) - w, \quad (8.3.2)$$

где  $g$  — гиромангнитное отношение. Система этих уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial\theta_i} - \partial_j \left[ \frac{\partial L}{\partial(\partial_j \theta_i)} \right] - \frac{\partial w_2}{\partial\theta_i} &= 0, \\ \frac{\partial L}{\partial\varphi_i} - \partial_t \left[ \frac{\partial L}{\partial(\partial_t \varphi_i)} \right] - \partial_j \left[ \frac{\partial L}{\partial(\partial_j \varphi_i)} \right] - \frac{\partial w_2}{\partial\varphi_i} &= 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (8.3.3)$$

Наличие дополнительных слагаемых  $\partial w_2/\partial\theta_i$  и  $\partial w_2/\partial\varphi_i$  в (8.3.3) объясняется тем, что поле  $\mathbf{H}^{(m)}$  не является независимым, а определяется результирующей намагниченностью  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$ . Поэтому при варьировании лагранжиана по полям  $\theta_i$  и  $\varphi_i$  следует учитывать вариации поля  $\mathbf{H}^{(m)}$  [38].

Граничные условия задачи при отсутствии закрепления спинов на поверхности пластины определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \partial_z \varphi_i|_{\pm d/2} &= \partial_z \theta_i|_{\pm d/2} = 0, \quad \varphi|_{\pm d/2} = \tilde{\varphi}|_{\pm d/2}, \\ -\partial_z \varphi|_{\pm d/2} &= [-\partial_z \varphi + 4\pi M_0 (\sin\theta_1 + \sin\theta_2)]|_{\pm d/2}. \end{aligned} \quad (8.3.4)$$

Здесь  $d$  — толщина пластины.

### 8.3.2. Эффективное уравнение слабонелинейной динамики голдстоуновских мод

Обменно-дипольный спектр линейных спиновых волн в антиферромагнитной пленке с анизотропией типа «легкая плоскость» кроме активационных ветвей имеет и бесщелевую (голдстоуновскую) ветвь. В настоящем разделе рассмотрим взаимодействие малоамплитудных голдстоуновских мод в области, где энергия внешнего воздействия недостаточна для возбуждения активационных волн. Задача имеет два характерных пространственных масштаба:  $\Delta$  — размер магнитной неоднородности (длина волны или размер солитона) и  $d$  — толщина пленки.

Мы будем рассматривать спин-волновые возбуждения, для которых выполняются условия:

$$\begin{aligned} \max \left[ \left( \alpha + \alpha'' \frac{\operatorname{tg}^2 \theta^0}{2\pi d} \right), d \right] &\ll \Delta, \\ \frac{d}{\delta \Delta} &\ll \left[ \frac{H}{2M_0 (\delta + 4\pi - \beta_2)} \right]^2 \ll 1. \end{aligned} \quad (8.3.5)$$

Здесь и далее

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}, \quad \alpha'' = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}.$$

Закон дисперсии голдстоуновских мод в этом интервале полей и пространственных масштабов является обменно-магнитостатическим и имеет вид

$$\omega^2 = (2gM_0)^2 \alpha'' k_x^2 \cos^2 \theta^0 (\delta + 4\pi - \beta_2 - 2\pi d |k_x|).$$

Заметим, что размагничивающие поля, которые определяют магнитостатическую часть спин-волнового спектра, проще всего получить, используя метод, предложенный в [3, 4, 65]. Далее, для определенности, считаем, что волны распространяются вдоль оси  $Ox$  (при выбранной геометрии задачи закон дисперсии не зависит от направления движения волны в плоскости пластины).

Для вывода эффективных уравнений, описывающих взаимодействие малоамплитудных голдстоуновских волн, используем редуکتивную теорию возмущений, основанную на методе растяжения координат [1]. Масштабные преобразования РТВ вне и внутри пластины отличаются.

Внутри пластины решение задачи (8.3.1), (8.3.3), (8.3.4) ищем в виде

$$\begin{aligned}\varphi_i &= \varphi_i^{(0)}(\xi, \tau, z) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \varphi_i^{(n)}(\xi, \tau, z), \quad \theta_i = \theta^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \theta_i^n(\xi, \tau, z), \\ \varphi &= \varphi^{(0)}(\xi, \tau, z) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(n)}(\xi, \tau, z) \varepsilon^n; \\ \xi &= \varepsilon(x + st), \quad s = 2M_0 g \cos \theta^0 \sqrt{\alpha''(\delta + 4\pi - \beta_2)}, \quad \tau = \varepsilon^2 t.\end{aligned}$$

Здесь  $\varepsilon$  — малый параметр, характеризующий отклонение системы от основного состояния:

$$\frac{d}{\delta \Delta} \operatorname{ctg} \theta^0 \sim \theta_i - \theta^0 = O(\varepsilon) \ll 1.$$

Вне пленки магнитостатический потенциал ищем в форме

$$\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}^{(0)}(\eta, z, \tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \tilde{\varphi}^{(n)}(\eta, z, \tau), \quad \eta = x + st, \quad \tau = \varepsilon^2 t.$$

Эффективные уравнения для голдстоуновских возбуждений получаются в результате сшивки этих двух вариантов теории возмущений. Аналогичный подход использовался ранее в [66] при описании волн в стратифицированной жидкости. Как и в разд. 8.1, успех метода основан на возможности разделения переменных  $\xi$  и  $z$  в уравнениях теории возмущений. Цепочку уравнений теории возмущений решаем последовательно. Необходимые для этого граничные условия получаются из разложения по параметру  $\varepsilon$  условий (8.3.4). Важно, что условия

$$\partial_z \theta_i^{(n)}|_{\pm d/2} = \partial_z \varphi_i^{(n)}|_{\pm d/2} = 0 \quad (i = 1, 2)$$

в низших порядках теории возмущений приводят к независимости от координаты  $z$  функций  $\varphi_i^{(0)}$ ,  $\varphi_i^{(1)}$ ,  $\theta_i^{(1)}$  ( $i = 1, 2$ ),  $\varphi_1^{(n)} + \varphi_2^{(n)}$  ( $n = 2, 3$ ),  $\theta_1^{(2)} + \theta_2^{(2)}$ . Это значительно упрощает задачу, но не является решающим. В принципе, метод позволяет учесть неоднородность спиновых волн и материальных параметров вдоль нормали к пленке и более сложные обменные граничные условия на ее поверхности. Из уравнений теории возмущений в порядках  $\varepsilon^0$  и  $\varepsilon$  находим:

$$\begin{aligned}\varphi_1^{(0)}(\xi, \tau) &= \pi + \varphi_2^{(0)}(\xi, \tau), \quad \theta_1^{(1)} = \theta_2^{(1)} = \gamma \partial_\xi \varphi_1^{(0)}, \\ \gamma &= \sqrt{\alpha''/(\delta + 4\pi - \beta_2)}; \\ \varphi^{(0)} &= 8\pi M_0 \sin \theta^0 z, \quad |z| \leq d/2; \\ \tilde{\varphi}^{(0)} &= \begin{cases} 4\pi M_0 d \sin \theta^0, & z \geq d/2, \\ -4\pi M_0 d \sin \theta^0, & z \leq -d/2. \end{cases}\end{aligned} \tag{8.3.6}$$



Вне пластины определение магнитостатического потенциала  $\tilde{\varphi}^{(1)}$  (порядок  $O(\varepsilon)$ ) сводится к решению задачи Дирихле. В частности, как и разд. 8.1 (см. (8.1.7)), нетрудно выразить предельные значения производных  $\partial_z \tilde{\varphi}^{(1)}(z, \eta)|_{z=\pm d/2}$  через  $\partial_\xi \varphi^{(1)}(z, \xi)|_{z=\pm d/2}$ :

$$\partial_z \tilde{\varphi}^{(1)}|_{z=\pm d/2} = \varepsilon \hat{H} \partial_{\xi'} \varphi^{(1)}(\xi', z = d/2) = O(\varepsilon). \quad (8.3.7)$$

Формулы (8.3.7) показывают, что предельные значения производной  $\partial_z \tilde{\varphi}^{(1)}|_{\pm d/2}$  в действительности принадлежат следующему порядку  $O(\varepsilon^2)$  редуктивной теории возмущений. В первом порядке по  $\varepsilon$  магнитостатический потенциал внутри пластинки определяется более простой задачей:

$$\begin{aligned} \partial_z^2 \varphi^{(1)} &= 0, \quad |z| \leq d/2; \\ [-\partial_z \varphi^{(1)} + 8\pi M_0 \cos \theta^0 \theta^{(1)}(\xi, \tau)]|_{z=\pm d/2} &= 0. \end{aligned} \quad (8.3.8)$$

Ее решение имеет вид

$$\varphi^{(1)} = 8\pi M_0 \cos \theta^0 \theta_1^{(1)}(\xi, \tau) z.$$

Анализ уравнений следующих порядков  $O(\varepsilon^2)$ ,  $O(\varepsilon^3)$  производится аналогично. Вычисление магнитостатического потенциала  $\varphi^{(2)}$  (порядок  $O(\varepsilon^2)$ ) внутри пластины сводится к решению краевой задачи:

$$\begin{aligned} \partial_z^2 \varphi^{(2)} &= 0, \quad |z| \leq d/2; \\ -\partial_z \tilde{\varphi}^{(1)}|_{z=\pm d/2} &= \left[ -\partial_z \varphi^{(2)} + \right. \\ &\quad \left. + 4\pi M_0 \left( \cos \theta^0 (\theta_1^{(2)} + \theta_2^{(2)}) - \sin \theta^0 (\theta^{(1)})^2 \right) \right]|_{z=\pm d/2}. \end{aligned} \quad (8.3.9)$$

Ввиду независимости функций  $\theta^{(1)}$  и  $\theta_2^{(2)} + \theta_1^{(2)}$  от координаты  $z$ , решение задачи (8.3.9) тривиально. В результате второй и третий порядок теории возмущений по параметру  $\varepsilon$  дают замкнутое эффективное интегро-дифференциальное уравнение для определения функции  $\theta_1^{(1)}(\xi, \tau)$ :

$$\begin{aligned} \partial_\tau \theta_1^{(1)} - \nu \hat{H}(\partial_\xi^2 \theta_1^{(1)}) + q \partial_\xi (\theta_1^{(1)})^2 &= 0, \\ \nu &= 2\pi d M_0 \gamma \cos \theta^0, \quad q = \frac{3}{2} s \operatorname{tg} \theta^0, \end{aligned} \quad (8.3.10)$$

которое совпадают с уравнением Бенджамина–Оно [66, 67]. Модель Бенджамина–Оно допускает многосолитонные возбуждения [54, 68] и может быть детально исследована методом обратной задачи рассеяния [69, 70].

### 8.3.3. Анализ солитонных решений.

#### Обменная релаксация солитонов

Обменно-магнитостатический солитон менее локализован по сравнению с типичными магнитными солитонами обменного и обменно-релятивистского происхождения. Односолитонное решение уравнения (8.3.10) описывается «алгебраической», а не экспоненциальной волной:

$$\theta_1^{(1)} = -\frac{\sigma \Delta}{(\xi + \vartheta \tau)^2 + \Delta^2}, \quad \sigma = \frac{4\pi d \operatorname{ctg} \theta^0}{3[\delta + 4\pi - \beta_2]}, \quad (8.3.11)$$

$$\Delta = 2\pi g M_0 d \gamma \vartheta^{-1} \cos \theta^0 > 0,$$

где  $\vartheta$  — положительный вещественный параметр. В исходных переменных  $x, t$  солитону (8.3.11) соответствует локализованное возмущение, распространяющееся со скоростью  $\vartheta + s$ . Заметим, что амплитуда солитона пропорциональна превышению  $\vartheta$  скорости его движения над фазовой скоростью  $s$  спиновых волн. По-видимому, солитоны возникают пороговым образом при увеличении амплитуды обменно-магнитостатических волн и реализуются лишь в динамике. Система стремится понизить свою энергию в результате излучения солитонов. Размер солитона  $2\Delta$  должен быть больше толщины пластины (см. (8.3.5)). Это требование ограничивает область значений параметра  $\vartheta$ :

$$\frac{\vartheta}{s} \sim \frac{d}{\Delta \delta} \ll 1.$$

Уравнение (8.3.10) описывает динамику лагранжевой системы. С помощью формул (8.3.6)–(8.3.9) можно показать, что в рассматриваемом приближении полное выражение (8.3.2) для плотности функции Лагранжа редуцируется к эффективному:

$$L_{\text{eff}} = c \left[ \frac{1}{2} \partial_\xi \chi \partial_\tau \chi - \frac{1}{2} \nu \partial_\xi \chi \partial_\xi \hat{H} \partial_{\xi'} \chi + \frac{1}{3} q (\partial_\xi \chi)^3 \right]. \quad (8.3.12)$$

Здесь  $c = 4M_0 a^2 (g\gamma)^{-1} \cos \theta^0$ ,  $a$  — постоянная решетки, и мы ввели потенциал  $\partial_\xi \chi = \theta_1^{(1)}$  вместо поля  $\theta_1^{(1)}$ . Варьирование по полю  $\chi$  действия, соответствующего  $L_{\text{eff}}$ , дает уравнение (8.3.10). С помощью (8.3.12) нетрудно получить выражение для энергии  $E$  и полевого импульса  $P$ :

$$E = \int \left[ \frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial (\partial_\tau \chi)} \partial_\tau \chi - L_{\text{eff}} \right] d\xi =$$

$$= c \int \left[ \frac{1}{2} \nu \theta_1^{(1)} \partial_\xi \hat{H} \theta_1^{(1)} - \frac{1}{3} q (\theta_1^{(1)})^3 \right] d\xi, \quad (8.3.13)$$

$$P = \int d\xi \frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial (\partial_\tau \chi)} \partial_\xi \chi = \frac{c}{2} \int (\theta_1^{(1)})^2 d\xi.$$

Подставляя (8.3.11) в (8.3.13) находим:

$$E = d\pi\sigma a \Delta^{-1} M_0 \cos \theta^0, \quad P = \pi(\sigma a)^2 M_0 \cos \theta^0 (g\gamma \Delta)^{-1}. \quad (8.3.14)$$

Заметим, что полученные соотношения относятся к системе, движущейся со скоростью  $-s$ . Закон дисперсии спиновых волн в этой системе координат имеет вид

$$\Omega(k) = k s - \omega(k) = 2\pi d\gamma M_0 g \cos \theta^0 |k|. \quad (8.3.15)$$

Формулы (8.3.14), (8.3.15) позволяют трактовать солитон (8.3.11) как комплекс из  $N$  невзаимодействующих магнов с волновыми векторами  $k = (2\Delta)^{-1}$ . Здесь  $2\Delta$  — параметр, характеризующий ширину солитона. Число  $N$  определяется формулой

$$N = \pi(\sigma a)^2 M_0 \cos \theta^0 (\gamma\mu_B)^{-1} \sim \pi [8\pi d M_0 (3aH)^{-1}]^2 \gg 1,$$

где  $\mu_B$  — магнетон Бора. Учитывая, что  $g = 2\mu_B/\hbar$ , формулы (8.3.14) можно переписать в виде

$$P = N\hbar k, \quad E = N\hbar \Omega(k), \quad k = (2\Delta)^{-1},$$

где  $\Omega(k)$  совпадает с законом дисперсии спиновых волн (8.3.15),  $k > 0$ .

Энергии солитона можно придать также следующую форму:

$$E = \frac{P^2}{2M_{\text{eff}}}.$$

Это позволяет интерпретировать его как частицеподобное образование с эффективной массой

$$M_{\text{eff}} = N m_0,$$

где  $m_0 \approx \hbar(4\pi d\gamma M_0 \cos \theta^0)^{-1}$  — эффективная масса одного магнона с законом дисперсии (8.3.15). Мы получили результат, характерный для «алгебраического» солитона: его энергия, импульс, масса являются суммами  $N$  соответствующих величин для отдельного магнона. Заметим однако, что в данной задаче число  $N$  не является свободным физическим параметром (как скорость  $\vartheta$  или импульс  $P$ ), а определяется внешними условиями: толщиной пластины  $d$  и величиной магнитного поля. С этой точки зрения энергия солитона зависит лишь от его импульса  $P$  и оказывается в  $N$  раз меньше энергии магнона с тем же импульсом. Мы полагаем, что интегрируемость модели гарантирует стабильность солитона (8.3.11). Мультисолитонные решения уравнения (8.3.10) описывают упругие столкновения таких «алгебраических» солитонов.

Магнитное состояние антиферромагнетика описывают векторы ферро- и антиферромагнетизма  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$  и  $\mathbf{L} = \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$  соответственно. В терминах  $\theta_1^{(1)}$  и  $\varphi_1^{(0)}$  они имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= 2M_0(0, 0, \sin \theta^0 + \cos \theta^0 \theta_1^{(1)}) + O(\varepsilon^2), \\ \mathbf{L} &= 2M_0(\cos \theta^0 \cos \varphi_1^{(0)}, \cos \theta^0 \sin \varphi_1^{(0)}, 0) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (8.3.16)$$

В области локализации солитона компонента  $M_z$  меньше, чем на бесконечности, следовательно,  $M_z$  описывает «темный» солитон. Глубина минимума пропорциональна параметру  $\vartheta$ . В соответствии с (8.3.6), (8.3.11):

$$\varphi_1^{(0)} = -\frac{\sigma}{\gamma} \operatorname{arctg} \left( \frac{\xi + \vartheta \tau}{\Delta} \right). \quad (8.3.17)$$

Согласно (8.3.16), (8.3.17), вектор  $\mathbf{L}$  лежит в плоскости пленки и в области локализации солитона совершает много оборотов, поворачиваясь на угол

$$\Delta\varphi_1^{(0)} = \frac{\pi\sigma}{\gamma} \sim \frac{8\pi^2 d M_0}{3aH} \gg \pi.$$

Интересно, что в неограниченном антиферромагнитном образце динамику малоамплитудных волн описывают локальные уравнения типа КдВ, которые имеют различный вид, в зависимости от направления распространения волн и величины внешнего магнитного поля. В этом случае реализуются обычные «экспоненциальные» солитоны, а не «алгебраические», как в тонкой пластине. Причина заключается в том, что в неограниченных образцах вклад магнитостатики менее важен и распространение волн определяется в основном короткодействующими обменными взаимодействиями. В тонкой пластине картина обратная: преобладают дальнедействующие диполь-дипольные силы, причем формирование «алгебраических» солитонов в главном приближении определяется поверхностными магнитными зарядами. Другие типы магнитостатических зарядов, например объемные, лишь уточняют внутреннюю структуру уединенных волн.

Рассмотренная нами модель соответствует реальным антиферромагнетикам. Для конкретных оценок можно брать материальные параметры  $\text{MnCO}_3$  (с точкой Нееля  $T_N = 32,5$  К), гематита ( $\alpha - \text{Fe}_2\text{O}_3$ ) с  $T_N = 950$  К, являющегося «легкоплоскостным» выше точки Морина  $T_M = 260$  К, и бората железа  $\text{FeBO}_3$  с  $T_N = 348$  К. В таких системах легко реализовать условия (8.3.5), если  $d \approx 5\text{--}10$  мкм. Вычислим параметр  $\vartheta$  для  $\text{FeBO}_3$ . Учитывая, что  $\delta \approx 10^3$  и  $M_0 \approx 1040$  Гс, получаем  $\vartheta \leq 10^2$  см/с при условиях (8.3.5). Эффективная скорость солитона  $s + \vartheta$  оказывается достаточно большой,  $\sim 10^4\text{--}10^5$  см/с, и близкой к скорости звука в этих материалах. По-видимому, магнитостатические солитоны могут быть обнаружены по их резонансному взаимодействию с упругой подсистемой антиферромагнетика.

Учет диссипации энергии — важная задача в физике солитонов. Вычисление декремента спиновых волн, обусловленного обменными взаимодействиями, приводит к выражению  $\Gamma = \mu k^2$  ( $\mu = \text{const} > 0$ ) [71]. Учтем релаксацию феноменологически, добавив член  $-\mu \partial_\xi^2 \theta_1^{(1)}$  в левую часть уравнения (8.3.10):

$$\partial_\tau \theta_1^{(1)} - \nu \hat{\mathbf{H}}(\partial_\xi^2 \theta_1^{(1)}) - \mu \partial_\xi^2 \theta_1^{(1)} + q \partial_\xi (\theta_1^{(1)})^2 = 0. \quad (8.3.18)$$

Замечательно, что полученная модель (8.3.18) допускает широкий класс точных решений [72, 73]. Простейшее из них имеет вид

$$\theta_1^{(1)} = -\sigma \frac{\Delta(\tau) + \mu \nu^{-1} [\xi + \xi_0(\tau)]}{[\xi + \xi_0(\tau)]^2 + \Delta^2(\tau)}, \quad (8.3.19)$$

$$\xi_0(\tau) = \frac{\nu}{\mu} [\Delta(\tau) - \delta_0], \quad \Delta(\tau) = \sqrt{2\mu\tau + \delta_0^2}, \quad \delta_0 = \text{const} > 0.$$

В пределе  $\mu \rightarrow 0$  решение (8.3.19) совпадает с (8.3.11). Из (8.3.19) следует, что локализованное возбуждение расплывается со временем: его размер увеличивается, а скорость и амплитуда уменьшаются.

#### 8.4. Нелинейный магнитоупругий резонанс длинных и коротких волн в магнетиках

*Наблюдения являются обильным источником открытий как в мире субъективных феноменов, так и в мире реальных явлений, воспринимаемых нашими чувствами.*

*Ш. Эрмит. «Переписка со Стильтьесом»*

Исследование магнитоакустических явлений в кристаллах отмечено рядом замечательных особенностей, природа которых обусловлена значительной нелинейностью, вносимой магнитной подсистемой в упругую благодаря магнитоупругости. Основное состояние среды нетривиально, поскольку с равновесным распределением намагниченности связаны спонтанные деформации. Это приводит к перенормировке упругих модулей и констант магнитной анизотропии. Могут наблюдаться такие интересные эффекты, как сильное уменьшение скорости квазиакустической моды, наличие дополнительного вклада в щель в спектре активационных мод, двупреломление и вращение плоскости поляризации квазиакустических волн [74–76]. Подобные эффекты проявляются, главным образом, в магнетиках с анизотропией типа «легкая плоскость», когда кристаллографическая магнитная анизотропия в плоскости базиса мала, а постоянные магнитоупругой связи велики. К таким ферромагнетикам принадлежат редкоземельные металлы диспрозий и тербий при температурах ниже некоторой критической, соответственно равной 87 К и 219 К. Отмеченные особенности могут быть значительными в антиферромагнетиках, где они усиливаются однородным обменным взаимодействием, а также вблизи точек ориентационных фазовых переходов.

В этих же системах магнитоупругие взаимодействия определяют специфику возбуждения, особенности взаимодействия и распространения малоамплитудных волн [77–80]. Заметим, что динамика слабо-нелинейных возмущений в различных магнитоупругих средах может

быть исследована в рамках универсальных интегрируемых моделей, которые допускают формирование солитонов. Если энергия внешнего воздействия на систему невелика и активационные спиновые волны не возбуждаются, то эволюцию бесщелевых магнитоупругих мод определяет уравнение типа Кортевега–де Вриза [27]. Вдали от резонанса активационных и бесщелевых мод подробное описание динамики активационных спиновых волн возможно с помощью нелинейного уравнения Шредингера [24, 25]. Если же взаимодействующие волны образуют «триаду», удовлетворяющую условиям «синхронизма» ( $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3$ ,  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$ ;  $k_i$ ,  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — волновые векторы и частоты взаимодействующих мод соответственно), обмен энергией между модами описывается уравнениями трехволнового резонанса [28].

В области резонансного взаимодействия волн различные ветви спектра интенсивно взаимодействуют между собой. Поэтому приведенное выше рассмотрение, базирующееся на выделении одной из них, становится неадекватным. Необходимо перестроить редуکتивную теорию возмущений так, чтобы все резонансные моды входили на равных основаниях. Это требует некоторой изобретательности [1, 81]. В данном разделе приводится методика, пригодная для получения эволюционных уравнений в случае резонансного взаимодействия волн из различных ветвей спектра линейных мод. Она состоит в переходе от исходных полевых переменных к нормальным модам. При этом при описании взаимодействия нормальных мод вводятся аппроксимации, которые согласованы с результатами РТВ в предельных случаях, когда доминирует одна из ветвей спектра линейных мод. В результате получаем эффективные уравнения слабонелинейной динамики, которые имеют более широкую область применимости, чем обычные варианты РТВ.

Отметим, что в средах с дисперсионными соотношениями, допускающими существование активационных и бесщелевых (голдстоуновских) волн, иногда возможен особый вид обмена энергией между бесщелевой и активационной ветвями спектра линейных мод. Активационные моды с близкими волновыми векторами за счет биений могут передавать энергию и возбуждать голдстоуновские волны. Как показал Бенни [1, 82, 83], этот процесс носит резонансный характер и наиболее эффективен, когда групповая скорость активационной волны  $c_g$  близка к фазовой скорости бесщелевой волны:  $c_g \approx c_p$ . Вопрос о достижимости условия  $c_g = c_p$  решается чисто геометрически по виду дисперсионных кривых (рис. 8.7).

Групповая скорость активационной моды совпадает с тангенсом угла наклона касательной к графику закона дисперсии  $\omega = \omega_a(k)$  активационной волны в некоторой точке  $k = k_0$ . Фазовая скорость  $c_p$  совпадает с тангенсом угла наклона касательной к бесщелевой ветви спектра в точке  $k = 0$ . Подчеркнем, что при резонансе Бенни происходит обмен энергии между волнами с разными характерными пространственными масштабами. Коротковолновые активационные моды возбуждают длинноволновые бесщелевые. Две ветви спектра, которые считались

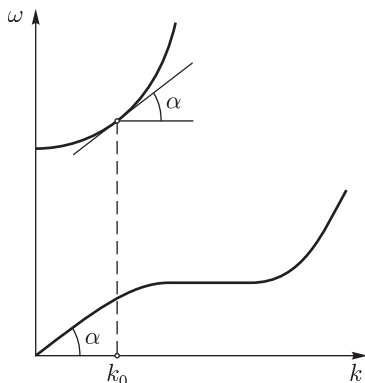


Рис. 8.7. Законы дисперсии, при которых возможен нелинейный резонанс длинных и коротких волн

независимыми в области разных длин волн, оказываются связанными. Механизм Бенни реализуется не всегда, а предполагает определенный тип нелинейных взаимодействий между активационной и бесщелевой модами. Резонансно возбуждается бесщелевая мода, эволюция которой определяется взаимодействием, квадратичным по амплитудам активационных волн.

Известно, что взаимодействие спиновой волны с ветвями упругих колебаний приводит к появлению магнитоакустического резонанса. Резонанс между упругой и спиновой подсистемами кристалла возникает при условии совпадения их собственных невозмущенных частот и может быть описан уже в рамках линейной теории [38]. В данном разделе, следуя работе [23], мы обращаем внимание на то, что в магнетиках при учете магнитоупругости всегда возможен особый вид резонанса между бесщелевой и активационной ветвями спектра магнитоупругих волн — нелинейный резонанс Бенни. На конкретном примере тетрагонального ферромагнетика с анизотропией типа «легкая плоскость» проанализированы общие закономерности взаимодействия малоамплитудных магнитоупругих волн в магнетиках. В частности, показано, что в окрестности резонанса длинных и коротких волн слабонелинейная динамика магнитоупругих возбуждений эффективно описывается интегрируемой моделью Захарова–Бенни [1].

Выражение для плотности свободной энергии  $F$  тетрагонального ферромагнетика с анизотропией типа «легкая плоскость» запишем в виде [75]:

$$\begin{aligned}
 F(\mathbf{r}) &= F_m(\mathbf{r}) + F_e(\mathbf{r}) + F_{me}(\mathbf{r}), \\
 F_m(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2} E a^2 (\partial_i \mathbf{m})^2 + \frac{1}{2} K_1^0 m_z^2 + K_2^0 m_z^4 + \\
 &\quad + \frac{1}{2} K_{\square}^0 m_x^2 m_y^2 - (\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}) + \frac{\mathbf{H}_M^2}{8\pi},
 \end{aligned}$$

$$F_e(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}C_{11}(\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2) + C_{12}\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + C_{13}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})\varepsilon_{zz} + \\ + \frac{1}{2}C_{33}\varepsilon_{zz}^2 + 2C_{44}(\varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2) + 2C_{66}\varepsilon_{xy}^2, \quad (8.4.1)$$

$$F_{me}(\mathbf{r}) = [B_1(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + B_3\varepsilon_{zz}]\mathbf{m}^2 + \\ + (B_{11}m_x^2 + B_{12}m_y^2)\varepsilon_{xx} + (B_{12}m_x^2 + B_{11}m_y^2)\varepsilon_{yy} + \\ + B_{33}m_z^2\varepsilon_{zz} + 2B_{44}(m_y m_z \varepsilon_{yz} + m_x m_z \varepsilon_{xz}) + 2B_{66}m_x m_y \varepsilon_{xy}. \quad (8.4.2)$$

Здесь  $\mathbf{M} = M_0\mathbf{m}$  — вектор намагниченности среды,  $\mathbf{M}^2 = M_0^2 = \text{const}$ ,  $E$  — постоянная обменного взаимодействия ( $a$  — параметр решетки);  $K_1^0$ ,  $K_2^0$ ,  $K_\square^0$  — константы магнитной анизотропии ( $K_1^0 > 0$ ,  $K_1^0 \gg K_2^0$ ,  $K_\square^0$ ),  $\mathbf{H}$  — внешнее магнитное поле, поле  $\mathbf{H}_M$  определяется уравнениями магнитостатики. Постоянные  $C_{sp}$  определяют упругую, а  $B_s$  и  $B_{sp}$  — магнитоупругую энергии,  $\varepsilon_{ij} = (\partial_j u_i + \partial_i u_j)/2$  — тензор деформации ( $i, j = x, y, z$ ),  $\mathbf{u}$  — вектор смещения точек среды. В (8.4.1) не учитывается собственно упругий ангармонизм, поскольку он обычно мал по сравнению с ангармонизмом, вносимым в упругую подсистему магнитной. По этой же причине пренебрегаем нелинейной зависимостью тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}$  от производных вектора смещения  $\mathbf{u}$  и рассматриваем взаимодействие упругой подсистемы с магнитной (8.4.2) в линейном по деформациям приближении.

Как следует из (8.4.2), в магнитоупругой энергии  $F_{me}(\mathbf{r})$  учитываются слагаемые, которые описывают магнитострикционные эффекты, обусловленные однородным вращением вектора намагниченности. Это не единственные слагаемые, линейные по деформациям. Если учесть зависимость обменных интегралов от деформаций среды, то при разложении изотропного обмена в ряд по  $\varepsilon_{ij}$  в выражение для свободной энергии войдут слагаемые, связанные с неоднородностью намагниченности [84]:

$$F_{me}^{(1)} = G_{ijkl}(\partial_i m_n)(\partial_j m_n)\varepsilon_{kl}. \quad (8.4.3)$$

Тензор  $\varepsilon_{kl}$  можно представить в виде суммы двух слагаемых, описывающих спонтанные и динамические деформации (см. ниже). Энергия (8.4.3) также содержит два вклада. Первый (от спонтанных деформаций) дает лишь перенормировку постоянной обменного взаимодействия и может быть тривиально учтен. Вклад в (8.4.3) от динамических деформаций в длинноволновом приближении приводит по сравнению с (8.4.2) к поправкам следующего порядка малости. В данной работе мы пренебрегли энергией (8.4.3). Однако взаимодействие (8.4.3) может оказаться важным, например, для цепочки спинов (типичный пример — одномерный ферромагнетик с анизотропией «легкая плоскость»  $\text{CsNiF}_3$ ). Как показано в [85], система уравнений для атомных смещений и спиновых отклонений может быть сведена к уравнению Давыдова [86]. Уточнение этой модели проведено в работах [25, 26].

Наш подход носит приближенный характер. Магнитная и упругая подсистемы более тонко влияют друг на друга, поскольку выражение



для свободной энергии в общем случае определяется не только симметричным тензором деформации  $\varepsilon_{ij}$ , но содержит и антисимметричные комбинации  $\omega_{ij} = (\partial_j u_i - \partial_i u_j)/2$ . Исключение  $\omega_{ij}$  соответствует пренебрежению вращениями элементов объема магнитоупругой среды. Для квазиодномерных движений учет антисимметричной части тензора  $\partial_j u_i$  существенно не меняет результатов и приводит лишь к незначительной перенормировке констант теории. При описании сильно неоднородных состояний в выражение для упругой энергии необходимо включить инварианты, зависящие от вторых пространственных производных поля смещений [87]. Заметим также, что при выходе за рамки линейного по деформации приближения необходимо пользоваться величинами, отнесенными к единице массы, а не объема ферромагнетика, и следует различать пространственные (эйлеровы) и материальные (лагранжевы) координаты, связанные с частицами тела [38].

Известно, что при исследовании магнитоупругих эффектов, связанных с резонансным взаимодействием упругих и спиновых волн, экспериментальные результаты, как правило, хорошо описываются в рамках приближенной теории магнитоупругого взаимодействия. Мы не сделаем, по-видимому, большой ошибки, используя приближенный вариант [88].

В дальнейшем удобно использовать следующую параметризацию для вектора намагниченности:

$$\mathbf{M} = M_0 \mathbf{m} = M_0 (\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, \cos \theta).$$

Основное состояние системы определяется условием минимума энергии:

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^0} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial \varphi_0} = \frac{\partial F}{\partial \theta_0} = 0,$$

где  $\varepsilon_{ij}^0$  — спонтанные деформации, а углы  $\theta_0$  и  $\varphi_0$  описывают равновесную ориентацию  $\mathbf{m}$ . Ради простоты мы ограничимся случаем  $\mathbf{m} \parallel \mathbf{H} \parallel \mathbf{x}$ . При этом  $\theta_0 = \varphi_0 = \pi/2$ , спонтанные деформации  $\varepsilon_{ij}^0$  определяются формулами [75]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^0 &= \Delta^{-1} [(C_{11} - C_{12})(C_{13}B_3 - C_{33}B_1) - \\ &\quad - B_{11}(C_{11}C_{33} - C_{13}^2) + B_{12}(C_{12}C_{33} - C_{13}^2)], \\ \varepsilon_{yy}^0 &= \Delta^{-1} [(C_{11} - C_{12})(C_{13}B_3 - C_{33}B_1) + \\ &\quad + B_{11}(C_{12}C_{33} - C_{13}^2) - B_{12}(C_{11}C_{33} - C_{13}^2)], \\ \varepsilon_{zz}^0 &= \Delta^{-1} [C_{13}(2B_1 + B_{11} + B_{12}) - B_3(C_{11} + C_{12})](C_{11} - C_{12}), \end{aligned}$$

где

$$\Delta = (C_{11} - C_{12}) [C_{33}(C_{11} + C_{12}) - 2C_{13}^2].$$

Условия устойчивости этого состояния исследованы в [75] и сводятся к следующему:

$$H_A + H > 0 \quad \text{и} \quad H_{\square} + H > 0,$$

где

$$\begin{aligned} H_A &= K_1^*/M_0, \quad H_{\square} = K_{\square}^*/M_0, \\ K_1^* &= K_1^0 + 2 [B_{33} \varepsilon_{zz}^0 - B_{11} \varepsilon_{xx}^0 - B_{12} \varepsilon_{yy}^0] - B_{44}^2/C_{44}, \\ K_{\square}^* &= K_{\square}^0 - \frac{B_{66}^2}{C_{66}} + 2 \frac{(B_{11} - B_{12})^2}{C_{11} - C_{12}}, \end{aligned} \quad (8.4.4)$$

$K_1^*$  и  $K_{\square}^*$  — перенормированные магнитострикцией константы анизотропии.

В настоящем разделе рассмотрены слабонелинейные квазиодномерные возбуждения, распространяющиеся вдоль оси  $Oy$ . При указанной геометрии задачи в линейном приближении со спиновыми волнами связана лишь ветвь поперечных звуковых волн.

#### 8.4.1. Солитоны, обусловленные взаимодействием квазиакустических мод

Для дальнейшего анализа необходимо выделить из полных деформаций  $\varepsilon_{ij}$  спонтанные:  $\varepsilon_{ij} = \tilde{\varepsilon}_{ij} + \varepsilon_{ij}^0$  ( $\tilde{\varepsilon}_{ij}$  — описывает колебания около основного состояния) и отсчитывать углы от их равновесных значений  $\theta_0 = \varphi_0 = \pi/2$ , соответствующих положению вектора намагниченности  $\mathbf{m} = (1, 0, 0)$ :  $\chi = \varphi - \pi/2$ ,  $\eta = \theta - \pi/2$ .

Ограничиваясь рассмотрением малоамплитудных возмущений, выпишем уравнения динамики с точностью до кубических слагаемых по  $\chi$ ,  $\eta$ ,  $\partial_y \tilde{u}_i \equiv \tilde{u}_{yi}$  ( $i = x, y, z$ ). В задаче имеется три характерных пространственных масштаба: постоянная решетки  $a$ , длина волны  $\lambda = k^{-1}$  активационных мод, размер магнитных неоднородностей  $d$ , причем  $\lambda \gg d \gg a$ . В длинноволновом приближении в кубических слагаемых можно пренебречь зависимостью от производных поля  $\chi$  и поля дисторсии  $\tilde{u}_{yi}$ . Анализ показывает, что при этом мы опускаем малые поправки порядка

$$O\left(\frac{E}{K_1} (ak)^2\right), \quad O\left(\frac{E}{K_1} \frac{a^2 k}{d}\right), \quad O\left(\frac{E}{K_1} \left(\frac{a}{d}\right)^2\right)$$

в эффективных константах взаимодействия. Кроме того, из-за сильной анизотропии типа «легкая плоскость» угол  $\eta$ , описывающий выход намагниченности из плоскости базиса, мал и, следовательно, зависимостью от  $\eta$  в нелинейных членах можно пренебречь. Критерием малости  $\eta$  является величина отношения

$$\frac{\eta}{\chi} \approx \frac{\sqrt{H_{\square} + H_{me6} + 4\pi M_0 + H}}{\sqrt{H_A + H_{me4} + H}} \ll 1,$$

где

$$H_{me4} = \frac{B_{44}^2}{M_0 C_{44}}, \quad H_{me6} = \frac{B_{66}^2}{M_0 C_{66}},$$

а  $H_{\square}$  и  $H_A$  определяются соотношениями (8.4.4). Тогда  $\eta$  удаётся исключить из уравнений, и мы получаем следующую систему:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{M_0}{\gamma} \right)^2 \partial_t^2 \chi + [E a^2 \partial_y^2 - K_1 - M_0 H] [(E a^2 \partial_y^2 - K_{\square}^0 - M_0 H - \\ & - K_3) \chi + B_{66} \tilde{u}_{yx}] - (K_1 + M_0 H) \left( \frac{2}{3} (K_3 + 4 K_{\square}^0) \chi^3 + \right. \\ & \left. + \frac{H}{6} M_0 \chi^3 - 2 (B_{11} - B_{12}) \tilde{u}_{yy} \chi - 2 B_{66} \tilde{u}_{yx} \chi^2 \right) = 0; \quad (8.4.5) \\ & \partial_t^2 \tilde{u}_{yx} - S_{66}^2 \partial_y^2 \tilde{u}_{yx} + B_{66} \rho^{-1} \partial_y^2 \chi - \frac{2}{3} B_{66} \rho^{-1} \partial_y^2 \chi^3 = 0; \\ & \partial_t^2 \tilde{u}_{yy} - S_{11}^2 \partial_y^2 \tilde{u}_{yy} - (B_{11} - B_{12}) \rho^{-1} \partial_y^2 \chi^2 = 0. \end{aligned}$$

Здесь

$$S_{ij}^2 = \frac{C_{ij}}{\rho}, \quad K_1 = K_1^* + \frac{B_{44}^2}{C_{44}}, \quad K_3 = 4\pi M_0^2 + 2 \frac{(B_{11} - B_{12})^2}{C_{11} - C_{12}},$$

$\gamma$  — гиромагнитное отношение,  $\rho$  — плотность вещества.

Как следует из (8.4.5), в линейном приближении с магнотонами связаны лишь поперечные звуковые волны. Спектр линейных возбуждений имеет ветви [75]:

а) активационную с законом дисперсии

$$\omega_a^2 = \omega_0^2 + f k^2, \quad (8.4.6)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \gamma^2 [H + H_{\square} + 4\pi M_0 + H_{me6}] [H_A + H_{me4} + H], \\ f &= E a^2 \gamma^2 M_0^{-1} [H_A + H_{\square} + H_{me4} + H_{me6} + 4\pi M_0 + 2H] + \\ &+ H_{me6} S_{66}^2 [H_{\square} + H_{me6} + 4\pi M_0 + H]^{-1}; \end{aligned}$$

б) бездисперсионную для продольных звуковых волн:

$$\omega = S_{11} k;$$

в) ассоциированную с поперечными звуковыми волнами голдстоуновскую:

$$\omega_G^2(k) = S^2 k^2 + r k^4, \quad (8.4.7)$$

где

$$\begin{aligned} S^2 &= S_{66}^2 \left( 1 - H_{me6} [H_{\square} + H_{me4} + 4\pi M_0 + H]^{-1} \right), \\ r &= - \frac{H_{me6} S_{66}^2}{\omega_0^2} \left( \frac{S^2 - E a^2 \gamma^2 M_0^{-1} (H_A + H_{me4} + H)}{H_{\square} + H_{me6} + 4\pi M_0 + H} \right). \end{aligned}$$

В рассматриваемой геометрии задачи «смягчение» скорости  $S$  поперечного звука за счет магнитострикции незначительно, так как обычно  $4\pi M_0 \gg H_{me}$ . Зависимость энергетической щели  $\omega_0$  от внешнего магнитного поля такова, что  $\min \omega_0 = \omega_0 (H = 0)$ .

В настоящем разделе изучено взаимодействие квазиакустических (голдстоуновских) мод (8.4.7) при условии, что энергия внешнего возмущения мала, и активационные волны при этом не возбуждаются. Для вывода эффективного уравнения эволюции гольдстоуновских мод используем вариант РТВ, основанный на растяжении координат. Будем искать решение системы уравнений (8.4.5) в форме

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{yx} &= \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \tilde{u}_{yx}^{(n)}(\xi, \tau), \quad \tilde{u}_{yy} = \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^n \tilde{u}_{yy}^{(n)}(\xi, \tau), \\ \chi &= \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \chi^{(n)}(\xi, \tau), \end{aligned} \quad (8.4.8)$$

где  $\xi = \varepsilon(y + St)$ ,  $\tau = \varepsilon^3 t$ . Параметр  $\varepsilon$  характеризует отклонение системы от равновесия. Медленные переменные  $\tau$  и  $\xi$  введены так, чтобы согласовать с законом дисперсии (8.4.7) пространственно-временной отклик среды на возмущение и сбалансировать эффекты дисперсии и нелинейности [1]. После подстановки (8.4.8) в систему (8.4.5) получим цепочку уравнений, которая выражает «старшие» коэффициенты (по индексу  $n$ ) через «младшие». Идея метода состоит в том, что при правильном выборе масштабных преобразований некоторый порядок теории возмущений (8.4.8) дает замкнутое уравнение для коэффициентов. Это и будет укороченное уравнение нелинейной динамики.

В данном случае коэффициенты  $\chi^{(1)}$  и  $\tilde{u}_{yy}^{(2)}$  выражаются через поле  $\tilde{u}_{yx}^{(1)} \equiv e$ :

$$\begin{aligned} \chi^{(1)} &= B_{66} [M_0 (H_{\square} + H_{me6} + H + 4\pi M_0)]^{-1} e; \\ \tilde{u}_{yy}^{(2)} &= (B_{11} - B_{12}) \rho^{-1} (S^2 - S_{11}^2)^{-1} (\chi^{(1)})^2, \end{aligned}$$

эволюция которого описывается модифицированным уравнением Кортевега–де Вриза (мКДВ):

$$2S \partial_{\tau} e + r \partial_{\xi}^3 e - q \partial_{\xi} e^3 = 0, \quad (8.4.9)$$

где

$$\begin{aligned} q &= 2H_{me6} \left( \frac{B_{66} S_{66}}{M_0 (H_{\square} + H_{me6} + H + 4\pi M_0)^2} \right)^2 \times \\ &\times \left( 4\pi M_0 + 2H_{me3} + \frac{5H}{4} + H_{me3} \frac{S_{11}^2 - S_{12}^2}{S^2 - S_{11}^2} \right), \\ H_{me3} &= \frac{(B_{11} - B_{12})^2}{M_0 (C_{11} - C_{12})}. \end{aligned}$$

Известно [89], что уравнение (8.4.9) имеет солитонные решения только при выполнении условия  $rq < 0$ . Поскольку  $4\pi M_0 \gg H_{me}$ , а анизотропия в базисной плоскости мала, можно рассчитывать на наблюдение солитонов лишь в веществах с  $r < 0$ , то есть при условии

$$S^2 > \frac{Ea^2\gamma^2}{M_0}(H_A + H_{me4} + H).$$

Односолитонное решение уравнения (8.4.9) имеет вид

$$e = \sqrt{\frac{4S\lambda}{q}} \operatorname{sech} \left( \sqrt{\frac{S\lambda}{|r|}} \zeta \right), \quad \tilde{u}_x = 4\sqrt{\frac{|r|}{q}} \operatorname{arctg} \exp \left( \sqrt{\frac{S\lambda}{|r|}} \zeta \right), \quad (8.4.10)$$

где  $\zeta = y + (S + \lambda)t + y_0$ ;  $y_0$ ,  $\lambda > 0$  — вещественные параметры. Как следует из (8.4.10), солитон движется со скоростью  $V = S + \lambda$ , которая больше скорости поперечного звука  $S$ . При движении солитона колебания намагниченности квазиравновесным образом подстраиваются к поперечным упругим деформациям:  $m_y \sim \tilde{u}_{yx} \sim e$ . Смещение точек среды, порождающее компоненту  $m_y$  вектора ферромагнетизма, изображено на рис. 8.8 а.

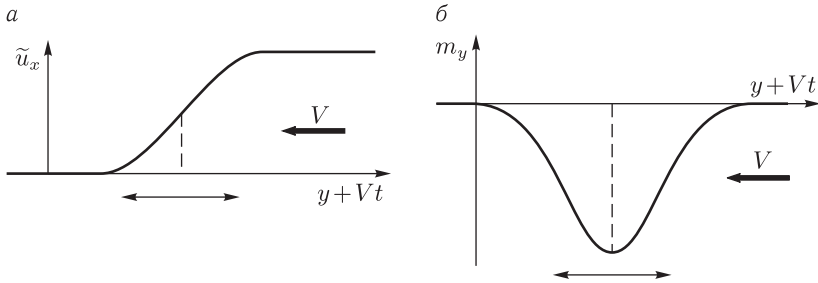


Рис. 8.8. Квазиравновесная связь деформации (а) и намагниченности (б) в магнитоупругом солитоне (8.4.10)

Распределение намагниченности, связанное с солитоном, представляет волну стационарного профиля  $\mathbf{m} \approx (1 - \chi^2/2, -\chi, 0)$ ,  $\chi \approx \chi^{(1)}$  с асимптотикой  $\mathbf{m} \rightarrow (1, 0, 0)$  при  $|y| \rightarrow \infty$  (см. рис. 8.8б и 8.9). В свою очередь, волна намагниченности за счет магнитострикции индуцирует более слабые упругие продольные деформации ( $\tilde{u}_{yy} \sim (B_{11} - B_{12})m_y^2 \sim \sim e^2$ ).

Кроме кинков, уравнение мКдВ (8.4.10) допускает еще один тип локализованных состояний — бризеры [89]. Каждый бризер представляет локализованный импульс, по которому пробегает осцилляция, зарождающаяся у одного его края и исчезающая у другого:

$$\tilde{u}_x = -2\sqrt{\frac{2|r|}{q}} \operatorname{arctg} \left( \frac{\beta}{\alpha} \sin(\alpha \tilde{\zeta} + \delta \tilde{\tau} - \varphi) \operatorname{sech}(2\beta \tilde{\zeta} + \gamma \tilde{\tau} + \psi) \right),$$

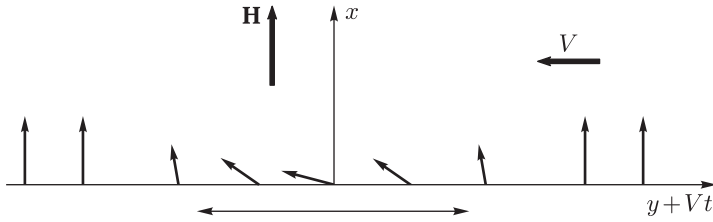


Рис. 8.9. Распределение намагниченности в плоскости  $Oxy$  для солитона (8.4.10), сформированного в результате взаимодействия бесщелевых мод

где

$$\begin{aligned}\tilde{\zeta} &= \sqrt{\frac{q}{2|r|}} \xi, \quad \tilde{\tau} = -\frac{q}{4S} \sqrt{\frac{q}{2|r|}} \tau; \\ \gamma &= 8\beta (3\alpha^2 - \beta^2), \quad \delta = 8\alpha (\alpha^2 - 3\beta^2).\end{aligned}$$

Устойчивость солитонов мКдВ исследована в [27]. Из неустойчивостей возможна гофрировка солитонов, которая экспериментально наблюдалась в работе [90].

#### 8.4.2. Взаимодействие активационных волн

Известно, что вдали от резонанса активационных и голдстоуновских мод слабонелинейная динамика спиновых волн определяется нелинейным уравнением Шредингера (НУШ) [24, 25]. Для вывода НУШ используем метод многих масштабов [1]. Решение системы уравнений (8.4.5) будем искать в виде

$$V = \sum_{l=1}^{+\infty} \varepsilon^l \sum_{n=-\infty}^{+\infty} V_n^{(l)}(\xi, \tau) \exp[i n (\omega_a(k)t + ky)] \equiv \sum_{l=1}^{+\infty} \varepsilon^l V^{(l)}.$$

Здесь  $V \equiv (\chi, \tilde{u}_{yx}, \tilde{u}_{yy})$ ,  $\varepsilon$  — малый параметр, характеризующий отклонение системы от равновесного состояния  $V = 0$ ;  $\xi = \varepsilon(y + c_g t)$ ,  $\tau = \varepsilon^2 t$  — медленные переменные,  $c_g = \partial_k \omega_a$  — групповая скорость активационных волн. Масштабные преобразования введены в соответствии с законом дисперсии активационных мод (8.4.6). Вещественность  $V$  гарантируется условием  $V_n^{(l)} = [V_{-n}^{(l)}]^*$ . Наша цель — получить уравнение, определяющее медленную эволюцию основной гармоники  $V_{\pm 1}^{(1)}$  в результате ее взаимодействия с другими гармониками. Процедура последовательного определения коэффициентов  $V_n^{(l)}$  будет согласованной, если в уравнениях редуکتивной теории возмущений отсутствуют секулярные члены. Это требование дает замкнутое эффективное уравнение для огибающей основной гармоники. Поскольку процедура вывода НУШ излагалась в разд. 8.1, отметим лишь существенный

нюанс. В магнитоупругих средах ядру оператора  $\widehat{L}$  линеаризованной задачи  $\widehat{L}V = 0$ , как правило, принадлежит не только основная гармоника ( $V_{\pm 1}^{(1)} \neq 0$ ), но и медленно меняющаяся волна  $V_0^{(2)}(\xi, \tau)$ . При этом отличными от нуля оказываются также средние потоки типа  $\partial_\xi^2 N$ :  $V_1^{(1)} V_{-1}^{(1)}$  ( $N$  — тензор постоянных), возникающие вследствие медленной зависимости огибающей от  $\xi$ . Такие потоки могут вызвать, если их не устранить, секулярный отклик в  $V_0^{(2)}$ . Устраняя секулярные члены, получаем систему уравнений на огибающую и медленно меняющуюся волну  $V_0^{(2)}$ . Обычно средние потоки  $\partial_\xi^2 N$ :  $V_1^{(1)} V_{-1}^{(1)}$  и медленное поле  $V_0^{(2)}$  равны нулю. Указанная специфика математической процедуры с точки зрения физики объясняется тем, что биения активационных мод с близкими длинами волн могут подкачивать и возбуждать ту из звуковых ветвей, эволюция которой определяется членом, квадратичным по амплитуде активационных мод. В конечном счете, поле  $V_0^{(2)}$  дает перенормировку самодействия активационных волн с «опасным» резонансным множителем  $\sim (S_{11}^2 - c_g^2)^{-1}$ . Подробное обсуждение такой же проблемы содержится в работах [21, 22].

В данной задаче поле  $V_0^{(2)}$  представляет бездисперсионную звуковую ветвь  $\tilde{u}_{yy}$ , так как ее эволюция определяется квадратом амплитуды активационных волн. Квазиакустическая мода (8.4.7) связана с активационной в следующем кубическом по амплитудам волн приближении, и поэтому не оказывает резонансного влияния на эволюцию огибающей.

Вдали от резонанса, когда  $c_g$  заметно отличается от  $S_{11}$ , поле  $\tilde{u}_{yy}$  не является свободным и следует за средним квадратом осцилляции намагниченности:

$$\chi = \Psi(\xi, \tau) \exp[i(\omega_a t + ky)] + \text{с. с.},^{1)} \\ \tilde{u}_{yy} = 2(B_{11} - B_{12})\rho^{-1}(c_g^2 - S_{11}^2)^{-1}|\Psi|^2.$$

При этом эффективное уравнение эволюции имеет вид <sup>2)</sup>

$$i\partial_t \Psi - \frac{1}{2}\partial_k^2 \omega_a \partial_\xi^2 \Psi - \left(g + \frac{2g_2(B_{11} - B_{12})}{\rho(S_{11}^2 - c_g^2)}\right)|\Psi|^2 \Psi = 0, \quad (8.4.11)$$

$$g = \frac{\gamma^2}{\omega_0}(H_A + H_{me4} + H) \times \\ \times (4\pi M_0 + 4(H_\square + H_{me6}) - 6H_{me3} + H/4); \\ g_2 = \frac{\gamma^2}{M_0 \omega_0}(B_{11} - B_{12})(H_A + H_{me4} + H). \quad (8.4.12)$$

<sup>1)</sup> Здесь и далее символ «с. с.» обозначает комплексно сопряженное слабое.

<sup>2)</sup> Пренебрегаем зависимостью от  $k$  константы  $g$ , так как ее учет дает малые поправки порядка  $O(S_{66} k H_{me6} / (4\pi \omega_0 M_0))$ .

Еще раз отметим появление «опасного» множителя  $\sim (S_{11}^2 - c_g^2)^{-1}$  в уравнении (8.4.11).

### 8.4.3. Магнитоупругий резонанс Бенни. Связь с интегрируемыми моделями

Для теоретического описания динамики малоамплитудных волн в окрестности резонанса, где  $c_g \approx S_{11}$ , необходимо рассматривать активационные и звуковые волны на равных основаниях. Используемые выше варианты РТВ с приоритетом одной из мод оказываются непригодными. Изложим простой способ преодоления указанной трудности. В итоге получим эффективные уравнения слабонелинейной динамики, пригодные даже в окрестности резонанса.

Перейдем от полей  $\tilde{u}_{yx}$  и  $\chi$  к новым динамическим переменным  $(e, v)$ , которые соответствуют нормальным модам линеаризованной задачи, то есть

$$\partial_t^2 e + \omega_G^2 (-i \partial_y) e \cong 0; \quad \partial_t^2 v + \omega_a^2 (-i \partial_y) v \cong 0. \quad (8.4.13)$$

Явный вид операторов  $\omega_a (-i \partial_\xi)$  и  $\omega_G (-i \partial_\xi)$  определяется законами дисперсии  $\omega_a(k)$  (8.4.6) и  $\omega_G(k)$  (8.4.7). Пусть  $\hat{S}(\nabla)$  — дифференциальный оператор, задающий переход к новым переменным:

$$\begin{pmatrix} e \\ v \end{pmatrix} = \hat{S}(\nabla) \begin{pmatrix} \tilde{u}_{yx} \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{u}_{yx} \\ \chi \end{pmatrix} = \hat{S}^{-1}(\nabla) \begin{pmatrix} e \\ v \end{pmatrix}. \quad (8.4.14)$$

Подействуем оператором  $\hat{S}(\nabla)$  на первые два уравнения системы (8.4.5). Тогда, в силу выбора  $\hat{S}(\nabla)$ , линейная часть системы примет вид (8.4.13). В нелинейных членах полученных уравнений сохраним лишь слагаемые, которые приводят к НУШ<sup>1)</sup>, и выразим их через поля  $e$  и  $v$  с помощью преобразования (8.4.14). В длинноволновом приближении при преобразовании этих слагаемых достаточно вычислить  $\hat{S}(\nabla)$  и  $\hat{S}^{-1}(\nabla)$  с точностью до членов, содержащих вторые производные по координате:

$$\hat{S}(\nabla) = \begin{pmatrix} 1 & -a \omega_0^{-2} \partial_y^2 \\ -b \omega_0^{-2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}^{-1}(\nabla) = \begin{pmatrix} 1 & a \omega_0^{-2} \partial_y^2 \\ b \omega_0^{-2} & 1 \end{pmatrix}, \quad (8.4.15)$$

где

$$a = \frac{B_{66}}{\rho}; \quad b = \frac{\gamma^2}{M_0} B_{66} (H_A + H_{me4} + H).$$

<sup>1)</sup> Можно показать, что другие слагаемые исчезают после усреднения по быстрым временным осцилляциям активационных мод.



Приближение (8.4.15) оказывается достаточным для воспроизведения результатов предыдущих разделов. Хотя выбор медленных переменных в различных вариантах редуктивной теории возмущений неодинаков, полученные в приближении (8.4.15) формулы

$$\chi = b\omega_0^{-2}e + v; \quad \tilde{u}_{yx} = e + a\omega_0^{-2}\partial_y^2 v$$

согласуются с обоими вариантами. В кубичных членах уравнений можно пренебречь пространственными производными от  $v$ , так как их учет дает лишь малые поправки порядка  $O((kS_{66})^2 H_{me6}/(4\pi M_0 \omega_0^2))$ .

Предполагая медленную модуляцию активационных волн, исключим из системы уравнений для полей  $e$ ,  $\tilde{u}_{yx}$  и  $\tilde{u}_{yy}$  быстрые временные осцилляции, полагая

$$v = \varphi \exp(i\omega_0 t) + \text{с. с.}, \quad \partial_t^2 v + \omega_0^2 v \cong 2i\omega_0 \partial_t \varphi \exp(i\omega_0 t) + \text{с. с.}$$

В результате усреднения по быстрым осцилляциям получим

$$\begin{aligned} \partial_t^2 e - S^2 \partial_y^2 e + r \partial_y^4 e - \partial_y^2 (\alpha_1 e^3 + \alpha_2 e |\varphi|^2 + \alpha_3 e \tilde{u}_{yy}) &= 0, \\ \partial_t^2 \tilde{u}_{yy} - S_{11}^2 \partial_y^2 \tilde{u}_{yy} - \frac{B_{11} - B_{12}}{\rho} \partial_y^2 \left( \frac{b^2}{\omega_0^4} e^2 + 2|\varphi|^2 \right) &= 0, \\ i \partial_t \varphi - f \partial_y^2 \varphi + g_1 e^2 \varphi + g_2 \tilde{u}_{yy} \varphi - g |\varphi|^2 \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (8.4.16)$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{b^2}{\omega_0^3} n_1 n_2, \quad \alpha_1 = \frac{2ab^3}{\omega_0^6} n_1 \left( 4\pi M_0 + 2H_{me3} + \frac{5}{4}H \right), \quad \alpha_2 = \frac{4ab}{\omega_0^2} n_1 n_2, \\ \alpha_3 &= \frac{2ab}{\omega_0^2} \frac{B_{11} - B_{12}}{M_0} n_1, \quad n_1 = [4\pi M_0 + H_{\square} + H_{me6} + H]^{-1}, \\ n_2 &= 4\pi M_0 - 6H_{me3} - 2(H_{\square} + H_{me6}) + 7H/4. \end{aligned}$$

Величины  $g$  и  $g_2$  были определены ранее (см. соотношения (8.4.12)).

Система уравнений (8.4.16) имеет широкую область применимости, включая окрестность резонанса  $c_g^2 = S_{11}^2$ .

Убедимся, что в предельных случаях уравнения (8.4.16) сводятся к мКдВ (8.4.9) и НУШ (8.4.11). Пусть активационные моды не возбуждаются, тогда  $\varphi = 0$  и

$$\begin{aligned} \partial_t^2 e - S^2 \partial_y^2 e + r \partial_y^4 e - \alpha_1 \partial_y^2 e^3 - \alpha_3 \partial_y^2 (\tilde{u}_{yy} e) &= 0, \\ \partial_t^2 \tilde{u}_{yy} - S_{11}^2 \partial_y^2 \tilde{u}_{yy} - \frac{B_{11} - B_{12}}{\rho} \frac{b^2}{\omega_0^4} \partial_y^2 e^2 &= 0. \end{aligned} \quad (8.4.17)$$

Система (8.4.17) описывает распространение волн в обоих направлениях и не предполагает ограничений на величину их скорости, поэтому она является более общей, чем (8.4.9). Если ограничиться рассмотре-

нием волн, движущихся в одном направлении со скоростями, близкими к фазовой скорости  $S$  голдстоуновских мод, то

$$e = e(\xi, \tau), \quad \xi = y + St; \quad (\partial_t^2 - S^2 \partial_y^2) e \cong 2S \partial_\tau \partial_\xi e;$$

$$\tilde{u}_{yy} \cong \frac{B_{11} - B_{12}}{\rho(S^2 - S_{11}^2)} \frac{b^2}{\omega_0^4} e^2$$

и система (8.4.17) редуцируется к уравнению мКдВ (8.4.9).

Солитоноподобное решение системы (8.4.17) также является более общим, чем (8.4.10):

$$e = \sqrt{\frac{2(V^2 - S^2)}{q(V)}} \operatorname{sech} \left( \sqrt{\frac{V^2 - S^2}{2|r|}} \zeta \right), \quad S^2 < V^2;$$

$$\zeta = y + Vt + y_0, \quad q(V) = \alpha_1 + \frac{b^2}{\omega_0^4} \frac{B_{11} - B_{12}}{\rho(V^2 - S_{11}^2)} \alpha_3.$$

Оно совпадает с (8.4.10), когда групповая скорость солитона  $V$  близка к скорости поперечного звука:

$$V = S + \lambda, \quad 0 < \lambda \ll 1.$$

Для того чтобы систему (8.4.16) свести к НУШ, нужно исключить быстрые пространственно-временные осцилляции, полагая

$$\varphi = \Psi(\xi, t) \exp(i k y + i \partial_k^2 \omega k^2 t / 2),$$

и перейти в систему отсчета, движущуюся с групповой скоростью  $c_g = \partial_k \omega_\alpha$  активационных волн. Если  $c_g^2 \neq S_{11}^2$ , имеем

$$e = 0, \quad \tilde{u}_{yy} \equiv \tilde{u}_{yy}(\xi, \tau),$$

$$(\partial_t^2 - S_{11}^2 \partial_y^2) \tilde{u}_{yy} \approx (c_g^2 - S_{11}^2) \partial_\xi^2 \tilde{u}_{yy}.$$

В результате система (8.4.16) оказывается эквивалентной НУШ (8.4.11).

Полная система также допускает решение, обобщающее солитон НУШ, корректное даже в окрестности резонанса ( $c_g^2 \approx S_{11}^2$ ):

$$\tilde{u}_{yy} = \sigma(V) |c|^2 \operatorname{sech}^2 \zeta, \quad \tilde{u}_y = \sigma(V) |c| \sqrt{\frac{\partial_k^2 \omega_a}{g(V)}} (1 + \operatorname{th} \zeta), \quad e = 0,$$

$$\varphi = c \operatorname{sech} \zeta \exp \left[ \frac{iV}{\partial_k^2 \omega_a} y + \frac{i}{2} t \left( \frac{V^2}{\partial_k^2 \omega_a} - g(V) |c|^2 \right) \right], \quad (8.4.18)$$

где

$$\zeta = (y + Vt)B + \zeta_0, \quad B^2 = \frac{g(V)}{\partial_k^2 \omega_a} |c|^2 > 0;$$

$V, \zeta_0$  — вещественные постоянные,  $c$  — комплексный параметр,

$$\sigma(V) = \frac{2(B_{11} - B_{12})}{\rho(V^2 - S_{11}^2)}, \quad g(V) = g - \sigma(V)g_2.$$

Решение (8.4.18) описывает локализованное возбуждение, движущееся с групповой скоростью  $V$  (рис. 8.10). Заметим, что условие  $B^2 > 0$  ограничивает интервал допустимых скоростей  $V$ . Учет самодействия активационных волн  $g$ , которое имеется всегда, расширяет этот интервал. Когда скорость солитона  $V$  приближается к скорости продольного звука  $S_{11}$ , поле  $\tilde{u}_{yy}$  в (8.4.18) неограниченно возрастает. Становятся важными собственный ангармонизм и дисперсия упругой подсистемы.

В системе координат, связанной с солитоном, вектор  $\mathbf{M}$  совершает быстрые колебания в «легкой плоскости», амплитуда которых максимальна в центре солитона. Эти колебания за счет магнитострикции порождают локализованные на солитоне продольные деформации среды (см. рис. 8.11). Последние определяются усредненным по быстрым осцилляциям квадратом амплитуды магнитных колебаний, поскольку в силу большей инертности упругая подсистема не успевает за быстрыми колебаниями вектора намагниченности.

В окрестности резонанса, когда групповая скорость активационных волн удовлетворяет неравенству

$$\left| \frac{2(B_{11} - B_{12})}{\rho(c_g^2 - S_{11}^2)} g_2 \right| \gg g,$$

можно пренебречь самодействием активационных мод по сравнению с их взаимодействием с продольным звуком. Тогда система (8.4.16) принимает более простой вид ( $e = 0$ ):

$$\begin{aligned} i\partial_\tau \varphi - \frac{1}{2} \partial_k^2 \omega_a \partial_y^2 \varphi + g_2 \tilde{u}_{yy} &= 0, \\ (\partial_t^2 - S_{11}^2) \tilde{u}_{yy} - 2 \frac{B_{11} - B_{12}}{\rho} \partial_y^2 |\varphi|^2 &= 0. \end{aligned} \quad (8.4.19)$$

Система уравнений (8.4.19) не является полностью интегрируемой, однако допускает многосолитонные решения, найденные в [91] методом Хироты. Известны и численные решения системы (8.4.19), среди которых наиболее интересными являются результаты по формированию солитона из заданного начального распределения ( $\varphi \neq 0, \tilde{u}_{yy} = 0$ ), рассеяние и «дробление» солитонов с излучением и поглощением звуковых волн [92].

Если ограничиться рассмотрением квазиакустических и активационных волн, распространяющихся в одном направлении со скоростями, близкими к скорости продольных звуковых волн  $S_{11}$ , то система (8.4.19) сводится к полностью интегрируемой модели Захарава–Бенни. Для получения соответствующих уравнений исключим

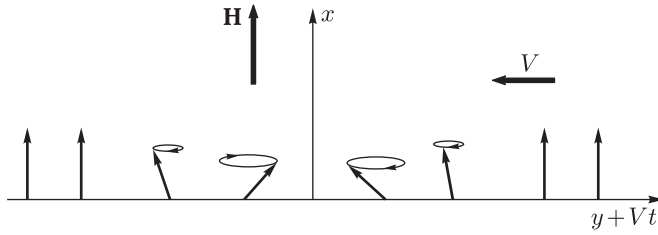


Рис. 8.10. Распределение намагниченности в «бисолитоне» (8.4.18), порожденном активационными магнитоупругими волнами

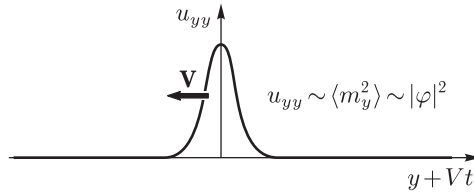


Рис. 8.11. Продольные деформации среды в магнитоупругом солитоне

быстрые пространственно-временные осцилляции и перейдем в систему координат, движущуюся с групповой скоростью активационной волны  $c_g = S_{11}$ :

$$\begin{aligned} \varphi &= \Psi(\xi, t) \exp \left( i k y + \frac{i}{2} \partial_k^2 \omega_a k^2 t \right); \\ \tilde{u}_{yy} &= \tilde{u}_{yy}(\xi, \tau), \quad \xi = y + c_g t, \quad \tau = t. \end{aligned} \quad (8.4.20)$$

Преобразование (8.4.20) аналогично тому, что использовалось при переходе от системы (8.4.16) к НУШ. Однако, поскольку в окрестности резонанса звуковая волна обнаруживает некоторую свободу, в конечных уравнениях оставим слагаемые, содержащие первые производные по «медленному» времени:

$$(\partial_t^2 - S_{11}^2 \partial_y^2) \tilde{u}_{yy} \cong 2S_{11} \partial_\tau \partial_\xi \tilde{u}_{yy}.$$

Окончательный результат сводится к уравнениям Захарова–Бенни [1]:

$$\begin{aligned} i \partial_\tau \Psi - \frac{1}{2} \partial_k^2 \omega_a \partial_\xi^2 \Psi + g_2 \Psi \tilde{u}_{yy} &= 0, \\ \partial_\tau \tilde{u}_{yy} - \frac{B_{11} - B_{12}}{\rho S_{11}} \partial_\xi |\Psi|^2 &= 0. \end{aligned} \quad (8.4.21)$$

Система (8.4.21) выражает баланс между эффектом дисперсии активационной волны и ее взаимодействием со звуковой волной, в то время как эволюция звуковой волны определяется самовоздействием активационных волн.

Решения системы (8.4.21) могут быть полностью исследованы с помощью метода обратной задачи рассеяния [93, 94]. Солитон в модели (8.4.21) движется с групповой скоростью  $V < c_g = S_{11}$  и по форме совпадает с (8.4.18).

Условие  $c_g = S_{11}$  реализуется в области с определенным волновым числом  $k_0$ . В неограниченных ферромагнетиках бегущие спиновые волны с заданным  $k_0$  могут возбуждаться однородным переменным магнитным полем, если материальные характеристики зависят от координаты. Кроме того, спиновые волны могут возбуждаться в неоднородном постоянном магнитном поле при наличии необходимого градиента [64].

Анализ уравнений (8.4.21) показывает, что порожденная внешним электромагнитным полем плоская активационная волна  $\Psi = \text{const}$ ,  $\tilde{u}_{yy} = 0$  модуляционно неустойчива. В результате развития неустойчивости могут рождаться локализованные продольные звуковые импульсы, связанные с солитоном огибающей активационной моды. Генерация солитонов скорее всего носит пороговый характер. Ниже пороговой энергии (амплитуды) активационные плоские волны расплываются из-за дисперсии.

Интересно, что поле  $\tilde{u}_{yy}$  в солитонном решении системы (8.4.19) или (8.4.21) напоминает солитон уравнения КдВ, а форма огибающей  $\varphi(\Psi)$  — такая же, как у солитона НУШ. В этом смысле модель Захарова–Бенни (8.4.21) представляет связующее звено между моделями типа КдВ, ассоциированными с голстоуновской модой, и НУШ для огибающей активационной ветви.

Модель (8.4.21) описывает так называемый длинно-коротковолновый резонанс Бенни, который иногда трактуют как предельный случай трехволнового резонанса. Условия синхронизма трех волн:

$$\omega_a(k_1) - \omega_a(k_2) = \omega_G(\kappa), \quad k_1 - k_2 = \kappa;$$

в пределе  $\kappa \rightarrow 0$  редуцируются к требованию

$$c_g = \partial_k \omega_a(k) = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{\omega_G(\kappa)}{\kappa} = c_p.$$

В рассмотренной задаче биениями активационных волн возбуждается бездисперсионная звуковая ветвь. В этом смысле механизм Бенни и условие  $c_g = c_p$  имеют более широкую область применимости.

Хотя в данном разделе рассмотрена частная задача, приведенные уравнения позволяют проанализировать общие закономерности взаимодействия малоамплитудных магнитоупругих волн в ферро- и антиферромагнетиках. Наличие анизотропии типа «легкая плоскость» упрощает анализ, но не является принципиальным. Полученные эффективные уравнения обладают поразительной универсальностью и слабо зависят от кристаллографической симметрии среды. Специфика кристалла проявляется главным образом в эффективных константах взаимодействия.

В частности, с помощью методов и моделей, рассмотренных в этом разделе, детально исследованы магнитоупругие солитоны и связанные

с ними резонансные явления в двухподрешеточных антиферромагнетиках вблизи ориентационных фазовых переходов при наличии электрического и магнитного полей и внешнего механического напряжения, которые индуцируют такие переходы (см. [29] и ссылки, приведенные там).

Поскольку дисперсионные соотношения с двойными или вообще кратными ветвями весьма обычны в физике магнетизма, резонанс длинных и коротких волн типичен не только для магнитоупругих сред. Так, модели, близкие к приведенным в этом разделе, возникают при описании солитонов на фоне геликоидальной магнитной структуры антиферромагнетика [20–22].

## НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА СПИРАЛЬНОЙ (ПОЛОСОВОЙ ДОМЕННОЙ) СТРУКТУРЫ

*Спираль — одухотворение круга.  
В ней, разомкнувшись и высвободившись  
из плоскости, круг перестает быть по-  
рочным.*

*В. Набоков. «Другие берега»*

Плоскопараллельные доменные и квазиодномерные спиральные структуры теоретически описываются в терминах решетки кинков (доменных стенок). Решетка кинков сама по себе является сильно нелинейным состоянием магнитоупорядоченной среды. Аналитическое описание коллективных, в том числе солитонных, возбуждений на таком фоне — трудная задача. Ее конструктивное решение возможно в рамках упрощенных моделей, которые корректно учитывают основные взаимодействия и, в то же время, допускают точные решения. При физически оправданных приближениях уравнения Ландау–Лифшица для ферро- и антиферромагнетиков, а также для мультиферроиков, часто сводят к универсальному нелинейному уравнению sine-Gordon [1–6]:

$$\partial_t^2 \Phi - \partial_z^2 \Phi + \sin \Phi = 0. \quad (9.1)$$

Поле  $\Phi(z, t)$  задает распределение вектора ферро- или антиферромагнетизма в структуре,  $z$  — пространственная координата,  $t$  — время.

Все решения уравнения (9.1) с однородным асимптотическим поведением поля  $\Phi(z, t)$  при  $z \rightarrow \pm\infty$  исследованы с помощью метода обратной задачи рассеяния или его модификаций [7, 8]. Наличие существенно нелинейной спиральной (полосовой доменной) структуры осложняет технику интегрирования модели. Хотя  $U$ – $V$ -пара уравнения (9.1) имеет рациональную зависимость от спектрального параметра, условие сопряжения аналитических функций, которое лежит в основе метода обратной задачи рассеяния, формулируется не в комплексной плоскости спектрального параметра, как это было в случае однородного основного состояния среды, а на римановой поверхности. Риманова поверхность связана с фоновой структурой и оказывается топологически эквивалентной тору.

Интересующие нас решения модели (9.1) практически не исследованы. Алгебро-геометрические методы конечнозонного интегрирования малоэффективны при анализе требуемых решений, так как приводят к плохо изученным трансцендентным соотношениям и многомерным те-

та-функциям [9]. Как правило, эти методы дают комплексные решения исходной модели. Выделение многообразия вещественных и ограниченных решений представляет сложную математическую проблему. Кроме того, конечнозонная техника не приспособлена для исследования нелинейных волн, связанных с непрерывным спектром традиционной задачи рассеяния.

В работах [10, 11] с использованием интегральных преобразований типа Гельфанда–Левитана–Марченко в рамках эллиптического уравнения sine-Gordon

$$\partial_x^2 \Phi + \partial_y^2 \Phi = \sin \Phi \quad (9.2)$$

исследованы двумерные дефекты в несоизмеримой (полосовой доменной) структуре магнетиков: солитонные вихри и несолитонные струнные конфигурации из отрезков доменных границ в полосовой структуре. Хотя уравнения (9.1), (9.2) близки по форме записи, техника их интегрирования и физические результаты для них различны.

Впервые «одевание» с помощью интегральных операторов Шабата было осуществлено в работе [12] при анализе нелинейных возбуждений на пьедестале бегущей кноидальной волны в конденсированных средах, описываемых универсальной моделью Кортевега–де Вриза. В данной главе для изучения нелинейной динамики спиральной структуры привлекается метод «одевания» частных решений уравнения (9.1) с помощью задачи Римана на торе [13, 14]. При таком подходе процедура построения требуемых решений оказывается локальной (при использовании интегральных преобразований локальность теряется). Это обстоятельство чрезвычайно облегчает аналитическое описание возбуждений в спиральной структуре. Выделение вещественных решений не вызывает затруднений, окончательные формулы записываются в терминах хорошо изученных эллиптических функций.

В разд. 9.1 приведено обоснование используемой модели и дана формулировка задачи Римана, необходимая для анализа солитонов и спиновых волн в спиральной структуре. В разд. 9.2 изложена схема построения солитонных решений модели при наличии спиральной структуры. Есть и другие возможности построения солитонных решений, например с помощью преобразований Дарбу [15–17] или Бэк-лунда [18]. Однако предлагаемая процедура глубже вскрывает спектральную природу рассматриваемой проблемы. Это позволяет получить новые результаты и в конечном счете сформулировать схему описания солитонов и спиновых волн при заданных граничных условиях и произвольных начальных распределениях намагниченности в спиральной структуре, т.е. решить начально-краевую задачу для модели sine-Gordon (9.1) при наличии периодической структуры.

Построение солитонных матриц задачи Римана связано с преодолением следующих трудностей.

Образование солитонов неизбежно сопровождается трансляциями геликоидальной структуры. В разд. 9.2 найдены формулы, которые свя-



зывают сдвиги в краевых условиях для структуры с нулями задачи Римана, определяющими строение и скорость солитонов.

Из-за наличия периодического фона функции задачи Римана оказываются «блоховскими» — при изменении спектрального параметра на период они умножаются на дополнительные множители. Отмеченная особенность отсутствовала в задаче Римана, которая использовалась при интегрировании эллиптического уравнения sine-Gordon [10, 11].

В разд. 9.2 изучены солитоны в спиральной структуре при наличии внешнего магнитного поля, перпендикулярного оси магнитной спирали, выявлены возможности их диагностики. В разд. 9.3 анализ нелинейной динамики солитонов и диспергирующих волн в спиральной структуре сведен к решению линейных интегральных уравнений на торе. В разд. 9.4 найдены спектральные разложения интегралов движения для коллективных возбуждений в спиральной структуре, в которых выделены вклады солитонов и спиновых волн.

## 9.1. Основные уравнения

*Уравнения для меня важнее, потому что политика — для настоящего, а уравнения — для вечности.*

*А. Эйнштейн*

### 9.1.1. Модель sine-Gordon для геликоидальной структуры

Рассмотрим квазиодномерную (вдоль оси  $Oz$ ) спиральную структуру. Будем описывать распределение намагниченности в структуре векторным полем  $\mathbf{M}(z, t)$ , где  $\mathbf{M}^2 = M_0^2 = \text{const}$ ;  $z, t$  — пространственная координата и время. Для квазиодномерного ферромагнетика без центра инверсии с анизотропией типа «легкая плоскость» (плоскость  $xOy$ ) плотность энергии в постоянном внешнем магнитном поле  $\mathbf{H} = (H, 0, 0)$  ( $H > 0$ ) записывается в виде

$$\tilde{w} = \frac{\alpha}{2} (\partial_z \mathbf{M})^2 + \kappa (M_1 \partial_z M_2 - M_2 \partial_z M_1) + \frac{\beta}{2} M_3^2 - M_1 H. \quad (9.1.1)$$

Здесь  $\alpha, \beta > 0$  и  $\kappa$  — постоянные обменного взаимодействия, магнитной анизотропии и взаимодействия Дзялошинского соответственно [19, 20]. В легкоплоскостных магнетиках при  $\mathbf{H} = 0$  наличие в энергии (9.1.1) взаимодействия Дзялошинского (инвариантов Лифшица) приводит к идеальному магнитному упорядочению атомов. Вектор  $\mathbf{M}(z, t)$  лежит в плоскости  $xOy$  и при смещении вдоль оси  $Oz$  поворачивается так, что образуется спиральная структура, период которой  $l_0$  несоизмерим с постоянной кристаллической решетки  $a$  и превосходит ее во много раз:  $l_0 \sim \alpha/\kappa \gg a$ . Внешнее поле  $\mathbf{H}$  стремится выстроить

в плоскости  $xOy$  магнитные моменты атомов вдоль направления  $Ox$ . В результате конкуренции противоположных тенденций, вдоль оси  $Oz$  формируются протяженные области шириной  $L_0$  (домены), в пределах которых распределение намагниченности остается почти однородным. Вблизи критического поля  $H < H_c$  соседние области разделяет узкий переходный слой шириной  $l_0 \sim \alpha/\kappa \sim \sqrt{\alpha M_0/H_c} \ll L_0$ , где сохраняется спиральный разворот намагниченности. При  $H > H_c$  система имеет соизмеримое ферромагнитное упорядочение.

При сильной легкоплоскостной анизотропии в параметризации поля  $\mathbf{M}(z, t)$  углами  $\Theta, \Phi$ :

$$\mathbf{M} = M_0(\sin \Theta \cos \Phi, \sin \Theta \sin \Phi, \cos \Theta),$$

даже в возбужденных состояниях геликоидальной структуры угол  $\Theta$  близок к значению  $\Theta = \pi/2$ ,  $\partial_z \Phi \sim O(1/l_0)$ . Воспользуемся этим обстоятельством для упрощения задачи. В терминах углов  $\Theta, \Phi$  уравнения Ландау–Лифшица квазиодномерного ферромагнетика имеют вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\gamma M_0} \sin \Theta \partial_t \Phi + \alpha \partial_z^2 \Theta + \sin \Theta \cos \Theta [\beta - \alpha(\partial_z \Phi)^2 - 2\kappa \partial_z \Phi] + \\ & \quad + \frac{H}{M_0} \cos \Theta \cos \Phi = 0; \\ & - \frac{1}{\gamma M_0} \sin \Theta \partial_t \Theta + \alpha \partial_z (\sin^2 \Theta \partial_z \Phi) + \kappa \partial_z \sin^2 \Theta - \\ & \quad - \frac{H}{M_0} \sin \Theta \sin \Phi = 0, \end{aligned} \quad (9.1.2)$$

где  $\gamma$  — магнитомеханическое отношение. Для реальных материалов со спиральной структурой параметры задачи удовлетворяют неравенству [18]

$$\frac{H}{M_0} \leq \frac{\kappa^2}{\alpha} \ll \beta.$$

Тогда, полагая  $\Theta = \pi/2 + \theta$  ( $\theta \ll 1$ ), из первого уравнения (9.1.2) находим

$$\theta \approx (\gamma M_0 \beta)^{-1} \partial_t \Phi,$$

после чего второе уравнение (9.1.2) в главном приближении сводится к модели sine-Gordon [18, 21] для расчета  $\Phi$ :

$$-\frac{1}{(\gamma M_0)^2 \beta} \partial_t^2 \Phi + \alpha \partial_z^2 \Phi - \frac{H}{M_0} \sin \Phi = 0. \quad (9.1.3)$$

В безразмерных переменных  $z' = z\sqrt{H/(\alpha M_0)}$ ,  $t' = \gamma\sqrt{\beta H M_0} t$  уравнение sine-Gordon (9.1.3) примет стандартный вид:

$$\partial_{t'}^2 \Phi - \partial_{z'}^2 \Phi + \sin \Phi = 0. \quad (9.1.4)$$

«Штрихи» над новыми переменными далее опускаем. В основном приближении распределение намагниченности определяется формулой

$$\mathbf{M} \approx M_0 (\cos \Phi, \sin \Phi, 0).$$

Для таких конфигураций  $\operatorname{div} \mathbf{M} = 0$ , поэтому магнитостатические взаимодействия можно не учитывать. В безразмерных переменных плотность энергии квазиодномерного ферромагнетика  $w = \tilde{w}/(M_0 H)$  описывается выражением

$$w = \frac{1}{2} \left[ (\partial_z \Phi)^2 + (\partial_t \Phi)^2 \right] + q \partial_z \Phi + (1 - \cos \Phi), \quad (9.1.5)$$

где  $q = \kappa \sqrt{M_0 / (\alpha H)}$ .

Выделить направление в базисной плоскости  $xOy$  может не только магнитное поле, но и остаточная квадратичная или кубическая анизотропия. Тогда в уравнении (9.1.4) аргумент синуса заменяется, соответственно, на  $2\Phi$  или на  $4\Phi$ . Постоянные остаточной анизотропии изменяются с температурой, поэтому параметр  $q$  в выражении (9.1.5) будет зависеть не от магнитного поля, а от температуры. В любом случае, после масштабных преобразований теоретическое описание нелинейной динамики квазиодномерной спиральной структуры сводится к решению волнового уравнения sine-Gordon (9.1.4). Уравнение sine-Gordon появляется не только при описании несоизмеримых структур. Оно оказывается полезным при изучении нелинейной динамики в полосовых структурах разных магнетиков [1–4]. В слабых ферромагнетиках и антиферромагнетиках [2, 3] эффекты магнитостатики малы. Для них модель имеет даже более широкую область применимости, так как описывает нелинейную динамику модулированных структур, в которых при смещении вдоль выделенного в пространстве направления конец вектора антиферромагнетизма  $\mathbf{L}$  может двигаться не только по винтовой линии, для которой  $\operatorname{div} \mathbf{L} = 0$ , но и по циклоиде, когда  $\operatorname{div} \mathbf{L} \neq 0$ .

Кроме того, такую модель можно использовать для анализа динамики спиральной структуры холестерических жидких кристаллов при наличии постоянного электрического или магнитного поля [22].

В зависимости от величины  $q$ , минимуму энергии (9.1.5) отвечает либо однородное распределение параметра порядка  $\Phi = 0 \pmod{2\pi}$ , либо периодическая структура, для которой

$$\begin{aligned} \Phi &= \varphi_0(\chi) = \pi - 2 \operatorname{am}(\chi, k), & \chi &\equiv z/k; \\ \cos \frac{\varphi_0}{2} &= \operatorname{sn}(\chi, k), & \sin \frac{\varphi_0}{2} &= \operatorname{cn}(\chi, k), & \frac{\partial_\chi \varphi_0}{2} &= -\operatorname{dn}(\chi, k), \end{aligned} \quad (9.1.6)$$

где  $\operatorname{sn}(\chi, k)$  и т.д. — эллиптические функции Якоби с модулем  $k$  ( $k^2 \leq 1$ ) [23, 24].

Средняя энергия, приходящаяся на период спиральной структуры, есть

$$\overline{W} = \frac{1}{L_0} \int_0^{L_0} dz w(z) = -\frac{\pi q}{Kk} - 2 \left( \frac{k'}{k} \right)^2 + \frac{4E}{Kk^2}.$$

Здесь  $E = E(k)$  — полный эллиптический интеграл второго рода. Минимизируем  $\overline{W}$  по переменной  $k$ . Отсюда получим условие, определяющее  $k$  [5, 21]:

$$\pi q k - 4E = 0. \quad (9.1.7)$$

При  $q < 4/\pi$  уравнение (9.1.7) не имеет решений. Основным состоянием системы (9.1.5) является соизмеримая фаза:  $u = 0 \pmod{2\pi}$ .

При  $q > 4/\pi$  уравнение (9.1.7) разрешимо. Энергия, соответствующая спиральной структуре (9.1.6), ниже чем энергия однородного распределения параметра порядка. На периоде  $L_0 = 2Kk$  функция  $\varphi_0(z)$  изменяется на  $2\pi$ , где  $K = K(k)$  — полный эллиптический интеграл первого рода. Согласно разложению [21]

$$\partial_\chi \varphi_0 = -2 \operatorname{dn} \chi = -\frac{\pi}{K'} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech} \left[ \frac{\pi}{2K'} (\chi - 2Kp) \right],$$

где  $p$  — целое,  $K' = K(k')$ ,  $k' = \sqrt{1 - k^2}$ , изменения поля  $\varphi_0(z)$  сосредоточены вблизи точек  $z = 2Kkp$ . В окрестности каждой из них с характерным размером  $l_0 \sim 2K'k/\pi$  функцию  $\varphi_0(z)$  можно аппроксимировать  $2\pi$ -кинком, поскольку

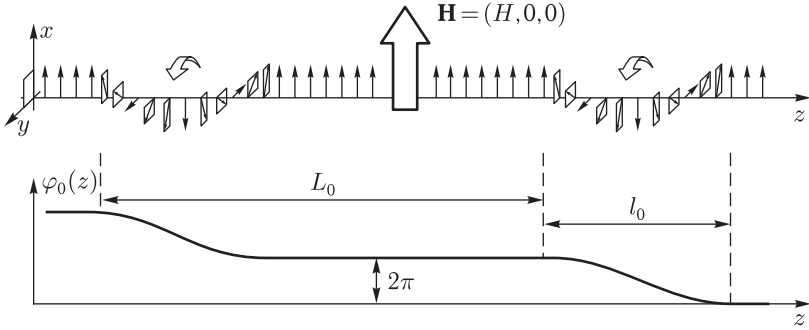
$$-\frac{\pi}{K'} \int d\chi' \operatorname{sech} \left( \frac{\pi \chi'}{2K'} \right) = 4 \operatorname{arctg} \left[ \exp \left( -\frac{\pi}{2K'k} z \right) \right] + \operatorname{const}. \quad (9.1.8)$$

Таким образом, решение (9.1.6) представляет собой одномерную решетку из  $2\pi$ -кинков (9.1.8), разделенных протяженными областями  $L_0$ , в пределах которых  $\varphi_0(z) \approx 2\pi s$ , где  $s$  — целое число (см. рис. 9.1).

Период спиральной структуры можно изменять, меняя внешнее поле или температуру. При наличии магнитного поля, перпендикулярного оси магнитной спирали, вблизи точки  $H_c = (\kappa\pi/4)^2 M_0/\alpha$  перехода по полю из несоизмеримой фазы в соизмеримую, период геликоидальной структуры в размерных переменных имеет вид

$$L_0 \approx \sqrt{\frac{\alpha M_0}{H_c}} \ln \left( \frac{1}{\sqrt{H_c/H} - 1} \right), \quad H < H_c.$$

В работе [25] показано, что для соединения  $\text{Cr}_{1/3}\text{NbS}_2$  модель (9.1.4) верно описывает магнитооптические данные о зависимости периода спиральной структуры от внешнего магнитного поля, перпендикулярного оси магнитной спирали.

Рис. 9.1. Геликоидальная структура и решетка кинков поля  $\varphi_0(z)$ 

### 9.1.2. Процедура интегрирования

Образование солитонов в спиральной структуре всегда сопровождается локальными трансляциями структуры. Далее рассмотрим краевые задачи двух типов. Первый из них характеризуется условиями

$$\begin{aligned}\Phi(z, t) &\rightarrow \varphi_2^{(0)}(\chi) \equiv \varphi_0(\chi) \quad \text{при } z \rightarrow +\infty; \\ \Phi(z, t) &\rightarrow \varphi_1^{(0)}(\chi) = 2\pi\sigma + \varphi_0(\chi + \Delta) \quad \text{при } z \rightarrow -\infty,\end{aligned}\tag{9.1.9}$$

где  $\sigma = \pm 1$ . При  $\sigma = 1$  спиральная структура испытывает сжатие на период и дополнительное смещение вдоль оси  $Oz$  на расстояние  $k\Delta$ , меньшее периода решетки кинков. В результате, в одной из ячеек решетки кинков обязательно появится солитон — лишний  $2\pi$ -кинк поля  $\Phi$  (доменная стенка) — с тем же топологическим зарядом (хиральностью), что и у остальных кинков (доменных стенок) структуры. Когда  $\sigma = -1$ , происходит локальное расширение геликоидальной структуры на период и сбой при образовании полосовой структуры, такой, что в одном из ее доменов возникает лишняя доменная стенка с хиральностью, противоположной хиральностям остальных стенок структуры. При краевых условиях (9.1.9) в спиральной структуре может существовать нечетное число лишних доменных стенок с попарно противоположными хиральностями и произвольное число бризеров. Бризер — это пульсирующий солитон, который можно трактовать как связанное состояние двух доменных стенок с противоположными хиральностями. Кроме того, вдоль структуры могут распространяться спин-волновые пакеты, образование которых не сопровождается трансляциями решетки кинков и обусловлено колебаниями намагниченности около равновесных положений геликоидальной структуры.

Второй тип граничных условий:

$$\begin{aligned}\Phi(z, t) &\rightarrow \varphi_2^{(0)}(\chi) \equiv \varphi_0(\chi) \quad \text{при } z \rightarrow +\infty; \\ \Phi(z, t) &\rightarrow \varphi_1^{(0)}(\chi) \equiv \varphi_0(\chi + \Delta) \quad \text{при } z \rightarrow -\infty,\end{aligned}\tag{9.1.10}$$

предполагает наличие спиновых волн, четного числа кинков с попарно противоположными зарядами и произвольного числа бризеров. Параметр  $\Delta$  определяет дополнительный сдвиг структуры из-за образования в ней солитонов (кинков и бризеров).

Уравнение sine-Gordon (9.1.4) эквивалентно условию совместности вспомогательной системы линейных уравнений [7]:

$$\begin{aligned}\partial_t \Psi &= \frac{i}{2} \left[ \frac{\partial_z \Phi}{2} \sigma_3 + \sigma_1 w_1 \cos \frac{\Phi}{2} + \sigma_2 w_2 \sin \frac{\Phi}{2} \right] \Psi \equiv V \Psi, \\ \partial_z \Psi &= \frac{i}{2} \left[ \frac{\partial_t \Phi}{2} \sigma_3 + \sigma_1 w_2 \cos \frac{\Phi}{2} + \sigma_2 w_1 \sin \frac{\Phi}{2} \right] \Psi \equiv U \Psi,\end{aligned}\quad (9.1.11)$$

где  $w_1^2 - w_2^2 = 1$ ;  $\sigma_i$  — матрицы Паули. В параметризации  $w_1 = \operatorname{sn}(u, k)$ ,  $w_2 = i \operatorname{sn}(u, k)$  частное решение системы (9.1.11), отвечающее фоновой структуре  $\varphi_0(\chi + \delta)$ , имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\Psi_\delta(u, \chi, t) &= M(u, \chi + \delta) \exp \left( A(u, \chi, t) \sigma_3 + \frac{\eta_1 \delta}{K} u \sigma_3 \right); \\ A(u, \chi, t) &= i p(u) \chi + \frac{i t}{2k} \operatorname{dn}(u, k), \\ p(u) &= -i \left( \frac{\eta_1 u}{K} - \frac{1}{2} [\zeta(u - iK') + \zeta(u + iK')] \right) = \frac{i}{2} Z(u);\end{aligned}\quad (9.1.12)$$

$$\begin{aligned}M(u, \chi) &= \\ &= \begin{pmatrix} \sigma(\chi + u) & i\sigma(\chi + 2iK' - u)e^{-\eta_3(\chi + iK' - u)} \\ -i\sigma(\chi + 2iK' + u)e^{-\eta_3(\chi + iK' + u)} & \sigma(\chi - u) \end{pmatrix} \times \\ &\quad \times \frac{m(\chi)}{\sigma(u)} \exp \left[ -\frac{\eta_1 u}{K} \chi \sigma_3 \right]; \\ m(\chi) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{\sigma(iK')}{\sigma(\chi + iK')} \right|, \quad \det M = \frac{\operatorname{dn} u}{1 - \operatorname{dn} u}.\end{aligned}$$

Параметр  $\delta$  сдвигает решение вдоль оси  $Oz$ ,  $\sigma(u)$  и  $\zeta(u)$  — сигма- и дзета-функции Вейерштрасса с периодами  $2K$ ,  $4iK'$ , где  $K = K(k)$  и  $K' = K(k')$  — полные эллиптические интегралы первого рода от модуля  $k$  и дополнительного модуля  $k' = \sqrt{1 - k^2}$ ,  $Z(u)$  — зета-функция Якоби [23, 24]. Ветвь квадратного корня выбрана так, чтобы выполнялось условие

$$\sqrt{\sigma(\chi \pm 2K + iK')\sigma(\chi \pm 2K - iK')} = -|\sigma(\chi + iK')| \exp [\pm 2\eta_1(\chi \pm K)],$$

где

$$|\sigma(\chi + iK')| = \sqrt{\sigma(\chi + iK')\sigma(\chi - iK')}.$$

Для функции  $\Psi_\delta(u, \chi)$  величина  $p(u)$  играет роль блоховского квазиимпульса:

$$\Psi_\delta(\chi \pm 4K, t, u) = \Psi_\delta(\chi, t, u) \exp [\pm 4K i p(u) \sigma_3].$$

Процедура интегрирования модели sine-Gordon использует аналитические свойства фундаментальных решений вспомогательной системы (9.1.11), которые задаются асимптотическими условиями при  $z \rightarrow \pm\infty$ . В данном случае асимптотические условия должны учитывать не только наличие сверхструктуры, но и ее трансляции при образовании солитонов. Хотя исходное нелинейное уравнение (9.1) инвариантно относительно преобразования  $\Phi \rightarrow \Phi \pm 2\pi$ , вспомогательная линейная система (9.1.11) таким свойством не обладает и различает состояния  $\Phi$  и  $\Phi \pm 2\pi$ . Граничные условия (??), (9.1.9) можно определить по  $\bmod 4\pi$  (величина  $\Delta$  задается по  $\bmod 4K$ ). Такие краевые условия не исключают появления бризеров, представляющих слабосвязанные состояния из доменных стенок одной хиральности, и/или образование четного числа дополнительных стенок не только с попарно противоположными, но и с одинаковыми хиральностями.

Базисные решения Йоста системы (9.1.11), отвечающие асимптотическим условиям (9.1.9) модели sine-Gordon, определим так:

$$\begin{aligned}\Psi_1(z, t, u) &\rightarrow \Psi_1^{(0)} = \sigma_3 \Psi_\Delta(z, t, u) \sigma_3 & \text{при } z \rightarrow -\infty; \\ \Psi_2(z, t, u) &\rightarrow \Psi_2^{(0)} = \Psi_0(z, t, u) & \text{при } z \rightarrow +\infty.\end{aligned}\quad (9.1.13)$$

При краевых условиях (9.1.10) определения решений Йоста изменятся:

$$\begin{aligned}\Psi_1(z, t, u) &\rightarrow \Psi_1^{(0)} = \Psi_\Delta(z, t, u) & \text{при } z \rightarrow -\infty; \\ \Psi_2(z, t, u) &\rightarrow \Psi_2^{(0)} = \Psi_0(z, t, u) & \text{при } z \rightarrow +\infty.\end{aligned}$$

Множеству

$$\gamma = \{u : \text{Im} p(u) = 0\} = \{\text{Re} u = 0, K; \quad |\text{Im} u| \leq 2K'\}, \quad \bmod(2K, 4iK')$$

соответствует непрерывный спектр системы (9.1.11).

На контуре  $\gamma$  фундаментальные решения  $\Psi_{1,2}$  определены одновременно, и потому связаны между собой:

$$\Psi_1(u) = \Psi_2(u)T(u), \quad u \in \gamma. \quad (9.1.14)$$

Матрица перехода  $T(u)$  зависит только от спектрального параметра  $u$  и обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned}T(u) &= \begin{pmatrix} a(u) & -b^*(-u^*) \\ b(u) & a^*(-u^*) \end{pmatrix}, \\ a(u)a^*(-u^*) + b(u)b^*(-u^*) &= 1; \\ a(u \pm 2K) &= a(u)e^{\pm 2\eta_1 \Delta}, \quad a^*[(u \pm 2iK')^*] = -\theta a(u)e^{\pm \eta_3 \Delta}, \\ b(u \pm 2K) &= -b(u)e^{\pm 2\eta_1 \Delta}, \quad b^*[(u \pm 2iK')^*] = -\theta b(u)e^{\pm \eta_3 \Delta},\end{aligned}\quad (9.1.15)$$

где  $\theta = 1$  и  $\theta = -1$  при краевых условиях (9.1.9) и (9.1.10) соответственно.

Функции Йоста  $\Psi_{1,2}$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}\Psi_1(z) &= \Psi_1^{(0)}(z) \times \\ &\times \left( 1 + \int_{-\infty}^z dz' [\Psi_1^{(0)}(z')]^{-1} (U(z') - U_1^{(0)}(z')) \Psi_1(z') \right); \\ \Psi_2(z) &= \Psi_2^{(0)}(z) \times \\ &\times \left( 1 - \int_z^{+\infty} dz' [\Psi_2^{(0)}(z')]^{-1} (U(z') - U_2^{(0)}(z')) \Psi_2(z') \right).\end{aligned}\quad (9.1.16)$$

Здесь  $U_{1,2}^{(0)}$  — значения матрицы  $U$  при  $\Phi = \varphi_{1,2}^{(0)}$ . Последовательные итерации уравнений (9.1.16) приводят к представлению их решений  $\Psi_{1,2}$  в виде рядов по степеням  $\Psi_{1,2}^{(0)}$ . Ряды сходятся, когда решения модели sine-Gordon достаточно быстро (быстрее любой степени  $z$ ) стремятся к асимптотическим значениям (9.1.9), (9.1.10). Аналитические свойства столбцов матриц  $\Psi_{1,2}(u)$  определяются расстановкой пределов интегрирования по  $z$  в рядах для  $\Psi_{1,2}(u)$ , а также знаком величины  $\text{Im } p(u)$ . Матричные функции

$$\Psi_-(u) = (\Psi_1^{(1)}(u), \Psi_2^{(2)}(u)), \quad \Psi_+(u) = (\Psi_2^{(1)}(u), \Psi_1^{(2)}(u)) \quad (9.1.17)$$

оказываются аналитическими, соответственно в областях

$$\begin{aligned}D_- &= \{-K < \text{Re } u < 0, \quad |\text{Im } u| \leq 2K'\}, \quad \text{mod}(2K, 4iK'); \\ D_+ &= \{0 < \text{Re } u < K, \quad |\text{Im } u| \leq 2K'\}, \quad \text{mod}(2K, 4iK').\end{aligned}$$

Здесь введено обозначение  $\Psi^{(i)}$  для  $i$ -го столбца матрицы  $\Psi$  ( $i = 1, 2$ ).

Из (9.1.14) следуют соотношения

$$a(u) = \frac{\det \Psi_-(u)}{\det M}, \quad a^*(-u^*) = \frac{\det \Psi_+(u)}{\det M}. \quad (9.1.18)$$

Согласно (9.1.18), функции  $a(u)$  и  $a^*(-u^*)$  аналитически продолжаютсся с контура  $\gamma$  в области  $D_-$  и  $D_+$  соответственно (за исключением, быть может, точек, где  $\det M = \text{dnu}/(1 - \text{dnu}) = 0$ ).

Нули функций  $a(u)$  и  $a^*(-u^*)$  в областях  $D_-$  и  $D_+$  определяют дискретный спектр системы (9.1.11). Далее, для определенности, считаем, что если нули имеются, то они простые. В силу редукций (9.1.15), нули функции  $a(u)$  разбиваются на две группы:

$$\begin{aligned}\text{а) } u &= v_p + i\varepsilon_p K' \equiv \nu_p, \quad -K < v_p < 0, \quad \varepsilon_p = \pm 1; \quad p = 1, 2 \dots M; \\ \text{б) } u &= \mu_s, \quad \mu_s^* - 2iK', \quad -K < \text{Re } \mu_s < 0; \quad s = 1, 2 \dots N.\end{aligned}\quad (9.1.19)$$



Каждый особый нуль  $\nu_p$  обеспечивает появление лишнего кинка в структуре. Каждая группа нулей  $\mu_s, \mu_s^* - 2iK'$  параметризует пульсирующий солитон-бризер на фоне спиральной структуры.

Функция  $a(u)$  допускает представление

$$a(u) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left[ \left( \Psi_2^{(0)}(u) \right)^{-1} \Psi_1(u) \right]_{11}. \quad (9.1.20)$$

Используя разложения функций  $\Psi_2^{(0)}(u)$  и  $\Psi_1(u)$  вблизи точки  $u = iK'$  (см. разд. 9.4), находим нормировочное условие:

$$a(u = iK') = s \exp(\eta_3 \Delta / 2), \quad (9.1.21)$$

где  $s = -i\sigma$  и  $s = 1$  при краевых условиях (9.1.9) и (9.1.10) соответственно.

Проблема интегрирования уравнений (9.1.11), а значит и модели sine-Gordon (9.1), сводится к решению задачи Римана на торе, которая формулируется следующим образом. Необходимо найти аналитические в областях  $D_+$  и  $D_-$  функции  $\Psi_+(u)$  и  $\Psi_-(u)$  (9.1.17), удовлетворяющие условию сопряжения на контуре  $\gamma$ :

$$\Psi_-(u) = \frac{\Psi_+(u)}{a^*(-u^*)} \begin{pmatrix} 1 & b^*(-u^*) \\ b(u) & 1 \end{pmatrix}, \quad u \in \gamma, \quad (9.1.22)$$

редукциям

$$\begin{aligned} \Psi_+(u \pm 2K) &= \sigma_3 \Psi_+(u) \sigma_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\mp 2\eta_1 \Delta} \end{pmatrix}, \\ \Psi_-(u \pm 2K) &= \sigma_3 \Psi_-(u) \sigma_3 \begin{pmatrix} e^{\pm 2\eta_1 \Delta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ \Psi_+^*[(u \pm 2iK')^*] &= q(u) \sigma_1 \Psi_+(u) \sigma_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\mp \eta_3 \Delta} \end{pmatrix}, \\ \Psi_-^*[(u \pm 2iK')^*] &= -\theta q(u) \sigma_1 \Psi_-(u) \sigma_3 \begin{pmatrix} e^{\pm \eta_3 \Delta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ i \frac{\sigma(u)}{\sigma(u + 2iK')} \exp[\eta_3(u + iK')] &= \frac{k \operatorname{sn} u}{1 + \operatorname{dn} u} \equiv q(u) \end{aligned} \quad (9.1.23)$$

и ограничению

$$\Psi_+(u) = -\sigma_2 \Psi_-^*(-u^*) \sigma_2, \quad u \in \gamma. \quad (9.1.24)$$

Условие сопряжения аналитических функций (9.1.22) является иной формой записи связи (9.1.14) решений Йоста на контуре  $\gamma$ , свойства симметрии (9.1.23), (9.1.24) функций  $\Psi_{\pm}(u)$  следуют из таковых для функций Йоста.

После того как решение задачи Римана найдено, по нему восстанавливается не только решение линейной системы (9.1.11), но и точное решение  $\Phi$  исходной существенно нелинейной модели (9.1). Для этого достаточно использовать разложение функции  $\Psi_-(u)$  вблизи особой точки  $u = iK'$  системы (9.1.11):

$$\begin{aligned} \Psi_-(u = iK' + \varepsilon) &= \frac{i}{\sqrt{2}} \exp \left[ \frac{i}{4} (\Phi + \pi) \sigma_3 \right] (I + i\sigma_1) (1 + O(\varepsilon)) \times \\ &\times \exp \left[ -\frac{(z-t)}{2k\varepsilon} \sigma_3 + O(\varepsilon) \right] \text{diag} \left( s \exp \left[ \frac{\eta_3 \Delta}{2} \right], 1 \right), \quad |\varepsilon| \ll 1, \end{aligned} \quad (9.1.25)$$

где  $I$  — единичная матрица,  $s = -i\sigma$  и  $s = 1$  при краевых условиях (9.1.9) и (9.1.10) соответственно.

## 9.2. Солитоны в спиральной структуре

*Все такие нарушения идеальной периодичности очень важны. ... Именно они в конечном счете объясняют ... свойства кристалла.*

*Н. Ашкрофт, Н. Мермин.  
«Физика твердого тела»*

Солитонам в спиральной структуре соответствуют решения задачи Римана (9.1.22) с нулями коэффициентов  $a(u)$  и  $a^*(-u^*)$  в областях  $D_-$  и  $D_+$ , когда  $b = b^* \equiv 0$ . Для солитонных состояний условие унитарности матрицы перехода принимает вид  $a(u)a^*(-u^*) = 1$ . Отсюда следует, что функция  $a(u)$  мероморфна внутри фундаментального прямоугольника со сторонами  $2K$ ,  $4iK'$ . При этом, если в области  $D_-$  она имеет нуль в точке  $u = u_p$ , то в области  $D_+$  у нее обязательно будет полюс при  $u = -u_p^*$ . Для солитонных возбуждений квазипериодическая функция  $a(u)$  полностью определяется своими нулями (9.1.19), полюсами и условием нормировки (9.1.21) (см. [24] и приложение):

$$\begin{aligned} a_{\text{sol}}(u) &= c \prod_{p=1}^M \varepsilon_p \frac{\sigma(u - \nu_p)}{\sigma(u + \nu_p^*)} e^{-\eta_3 \varepsilon_p \nu_p} \times \\ &\times \prod_{s=1}^N \frac{\sigma(u - \mu_s) \sigma(u - \mu_s^* + 2iK')}{\sigma(u + \mu_s^*) \sigma(u + \mu_s + 2iK')} e^{\eta_3 (\mu_s + \mu_s^*)}, \end{aligned} \quad (9.2.1)$$

где периоды функций Вейерштрасса суть  $2K$ ,  $4iK'$ . При краевых условиях (9.1.9) число кинков  $M$  — нечетное,  $c = i\sigma$ , а в случае граничных условий (9.1.10)  $M$  — четное число,  $c = 1$ . На число бризеров  $N$  нет ограничений. Представление (9.2.1) приводит к верным трансформаци-

онным свойствам функции  $a(u)$  только при условии, что положения ее нулей связаны со сдвигом  $\Delta$  сверхструктуры:

$$\sum_{p=1}^M v_p + \sum_{s=1}^N (\mu_s + \mu_s^*) = -\Delta/2, \quad \text{mod}(2K). \quad (9.2.2)$$

Напомним, что нули функции  $a(u)$  определены по  $\text{mod}(2K, 4iK')$ , а сдвиг  $\Delta$  — по  $\text{mod}(4K)$ . Далее, для определенности, считаем, что нули лежат в области  $D_-$ . Тогда равенство (9.2.2) будет справедливо по  $\text{mod}(2K)$ .

Учитывая (9.1.18), ограничение (9.1.24) можно переписать в виде

$$\Psi_+^{-1}(u) = -\frac{\Psi_-^\dagger(-u^*)}{a^*(-u^*) \det M}, \quad u \in \gamma, \quad (9.2.3)$$

где верхний индекс «†» означает эрмитово сопряжение. Отсюда следует, что для солитонных состояний задача нахождения решения  $\Psi_-(u)$  сводится к построению мероморфной квазипериодической функции с периодами  $2K$ ,  $4iK'$  и редукциями (9.1.23), которая удовлетворяет следующему условию на контуре  $\gamma$ :

$$\Psi_-^\dagger(-u^*)\Psi_-(u) = \Psi_-(u)\Psi_-^\dagger(-u^*) = \left(\frac{dnu}{dnu-1}\right) I, \quad u \in \gamma, \quad (9.2.4)$$

где  $I$  — единичная матрица. Если  $\Psi_-(u)$  имеет нуль при  $u = u_p$  в области  $D_-$ , то в области  $D_+$  у нее будет полюс в точке  $u = -u_p^*$ . Ввиду специфики  $U$ - $V$ -операторов, функция  $\Psi_-(u)$  не может быть нормирована на  $I$  при каком бы то ни было значении  $u$ . Поэтому для доопределения задачи Римана используются асимптотические значения  $\Psi_-(u)$  при  $z \rightarrow \pm\infty$ .

В отличие от функций задачи Римана, применявшихся при интегрировании эллиптического уравнения sine-Gordon с периодическим фоном [10, 11], функции  $\Psi_-(z, t, u)$ , используемые для описания солитонов в модели (9.1), не являются двоякопериодическими по параметру  $u$ . Это осложняет задачу. Процедура построения солитонных функций  $\Psi_-(z, t, u)$  сводится к алгебраическим вычислениям и во многом напоминает изложенную в [26] (см. также разд. 3.7 и 3.8). Особенности поясним на примерах.

### 9.2.1. Лишняя доменная стенка (кинк) в структуре

При краевых условиях (9.1.9) функция  $\Psi_-(z, t, u)$  доопределяется своими асимптотиками, которые извлекаем из (9.1.13), (9.1.14):

$$\begin{aligned} \Psi_- &\rightarrow \Psi_0(z, t, u) \begin{pmatrix} a(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{при } z \rightarrow +\infty; \\ \Psi_- &\rightarrow \sigma_3 \Psi_\Delta(z, t, u) \sigma_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a(u) \end{pmatrix} \quad \text{при } z \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (9.2.5)$$

Формулы (9.2.1), (9.2.2), (9.2.5) и редукции (9.1.23) выявляют алгебраическую структуру «однокинковой» функции  $\Psi_-$ :

$$\Psi_-(u) = r \begin{pmatrix} (\Psi_0)_{11}a(u|\nu_1)\alpha + (\Psi_\Delta)_{11}\beta & (\Psi_0)_{12}\alpha - (\Psi_\Delta)_{12}a(u|\nu_1)\beta \\ (\Psi_0)_{21}a(u|\nu_1)\alpha^* - (\Psi_\Delta)_{21}\beta^* & (\Psi_0)_{22}\alpha^* + (\Psi_\Delta)_{22}a(u|\nu_1)\beta^* \end{pmatrix}. \quad (9.2.6)$$

Здесь

$$a(u|\nu_1) = i\sigma\varepsilon_1 \frac{\sigma(u - \nu_1)}{\sigma(u + \nu_1^*)} \exp\left(\frac{\varepsilon_1\eta_3\Delta}{2}\right), \quad \nu_1 = iK'\varepsilon_1 - \Delta/2, \quad 0 < \Delta < 2K;$$

$\alpha$ ,  $\beta$  и  $r$  — комплексные и вещественная функции от переменных  $z$ ,  $t$ .

После подстановки представления (9.2.6) в (9.2.4), левая часть равенства (9.2.4) будет содержать полюсы в точках  $u = \nu_1, -\nu_1^* \pmod{(2K, 4iK')}$ , в то время как правая часть таких полюсов не содержит. Требование обращения в нуль вычетов в лишних полюсах приводит к ограничениям

$$\alpha = p e^{i\gamma}, \quad \beta = h e^{i\gamma}, \quad (9.2.7)$$

где  $p$ ,  $h$  и  $\gamma$  — пока неизвестные вещественные функции от переменных  $z$ ,  $t$ .

Прямой проверкой можно убедиться, что левая и правая части формулы (9.2.4) имеют одинаковые периоды, нули и полюсы. Нули находятся в точках  $u = \pm(K + iK')$ , а двойной полюс при  $u = 0 \pmod{(2K, 4iK')}$ . Потому, согласно теореме Лиувилля (см. приложение), левая и правая части (9.2.4) могут отличаться только коэффициентом, не зависящим от спектрального параметра  $u$ . Требование справедливости равенства (9.2.4) при  $u = iK'$  дает уравнение для расчета коэффициента  $r^2$ , которое, после преобразований с учетом тождества

$$-\frac{i\sigma(\chi - iK')}{\sigma(\chi + iK')} \exp(\eta_3\chi) = -\operatorname{sn}\chi + i\operatorname{cn}\chi, \quad (9.2.8)$$

принимает вид

$$r^2 \left( p^2 + h^2 + 2ph \cos \left[ \frac{\varphi_2^{(0)} - \varphi_1^{(0)}}{4} \right] \right) = 1. \quad (9.2.9)$$

Матричная функция  $\Psi_-(u)$  (9.2.6), (9.2.7), (9.2.9) дает решение задачи Римана на торе (9.2.4) с особым нулем  $\nu_1$  и редукциями (9.1.23).

Дополнительное дифференциальное ограничение на выбор матриц  $\Psi_-(z, t, u)$  состоит в том, что в области  $D_-$  должны выполняться соотношения (см. (9.1.11))

$$\partial_t \Psi_- \Psi_-^{-1} = V, \quad \partial_z \Psi_- \Psi_-^{-1} = U. \quad (9.2.10)$$

Подстановка (9.2.6) в (9.2.10) вновь дает лишние полюсы в точках  $u = \nu_1, -\nu_1^* \pmod{2K, 4iK'}$  в левых частях равенства (9.2.10). Требование отсутствия лишних полюсов приводит к дифференциальным уравнениям для расчета величины  $p/h$ . Их решение имеет вид

$$\frac{p}{h} = - \frac{(\Psi_{\Delta}(u))_{21}}{(\Psi_0(u))_{22}} \Big|_{u=\nu_1} c_0 = \left| \frac{\sigma(\chi + iK')}{\sigma(\chi + \Delta + iK')} \right| \times \\ \times \exp \left[ \frac{\eta_1 \Delta}{K} \chi + A(\nu_1, \chi, t) + A^*(\nu_1, \chi, t) \right] c_0, \quad (9.2.11)$$

где  $c_0$  — вещественная постоянная интегрирования.

Возникающие при вычислении  $\partial_t \Psi_- \Psi_-^{-1}$ ,  $\partial_z \Psi_- \Psi_-^{-1}$  нули и полюсы, связанные с функцией  $\text{dnu}/(\text{dnu} - 1)$  (см. (9.2.4)), полностью устраняются. Отметим также, что уравнений для расчета функции  $\gamma(z, t)$  (9.2.7) не возникает. Величина  $\gamma$  фиксируется условиями (9.2.5) и оказывается равной нулю. При этом постоянную  $c_0$  в формуле (9.2.11) и корень  $r$  уравнения (9.2.9) следует выбрать положительными.

Сформулированные условия полностью определяют решение  $\Psi_-(z, t, u)$  системы (9.1.11). Из (9.1.25) находим решение модели sine-Gordon:

$$\Phi(z, t) = 4 \arg \left[ \sqrt{\frac{p}{h}} \exp \left( \frac{i \varphi_2^{(0)}}{4} \right) + \sqrt{\frac{h}{p}} \exp \left( \frac{i \varphi_1^{(0)}}{4} \right) \right], \quad (9.2.12)$$

которое описывает «лишний» кинк шириной  $d \sim [2 \text{Re} \partial_z A(\nu_1, \chi, t)]^{-1}$ , движущийся в спиральной структуре со скоростью

$$V = - \frac{\text{Re}[\partial_t A(\nu_1, \chi, t)]}{\text{Re}[\partial_z A(\nu_1, \chi, t)]}.$$

В работе [15] показано, что при наличии периодического основного состояния существует ограничение как сверху, так и снизу на скорость движущихся кинков:

$$S_a < |V| < S_{\text{opt}},$$

где  $S_a = k'K/E$  и  $S_{\text{opt}} = 1$  — максимальные групповые скорости соответственно бесщелевой и активационной спин-волновых мод на фоне спиральной структуры. Отметим, что форма записи (9.2.12) однокинкового состояния проще найденной преобразованиями Дарбу и Бэклунда в [15–18] в терминах эллиптических интегралов третьего рода. Согласно полученным результатам в спиральной структуре возможны два сценария возникновения кинка.

При первом из них в результате локального сжатия спиральной структуры на период в одном из ее доменов появляется лишняя доменная

стенка с той же хиральностью, что и у доменных стенок фоновой структуры. Лишняя доменная стенка ( $2\pi$ -кинк поля  $\Phi$ ) стабильна и деформирует спиральную структуру.

При втором сценарии происходит локальное расширение спиральной структуры на период и образование в одном из ее доменов лишней доменной стенки с хиральностью, противоположной хиральностям стенок спиральной структуры.

В обоих случаях геликоидальная структура стремится избавиться от новообразований, и это проявляется в движении солитона вдоль структуры. Движение солитона сопровождается макроскопическими локальными трансляциями геликоидальной структуры на расстояние  $k\Delta$  в направлении, противоположном движению солитона, после которых структура восстанавливает свою периодичность. На рис. 9.2а представлен участок периодической спиральной структуры до прохождения через нее солитона. Доменные стенки структуры изображены в виде заштрихованных полосок: более темные части полосок соответствуют большим значениям поля. Рис. 9.2б иллюстрирует локальный сдвиг и деформацию структуры в результате прохождения через нее «лишней» доменной стенки той же хиральности, что и у стенок структуры. Поле  $\Phi$  претерпевает локальные колебания в моменты прохождения солитоном каждой области, которая содержит очередной кинк фоновой структуры.

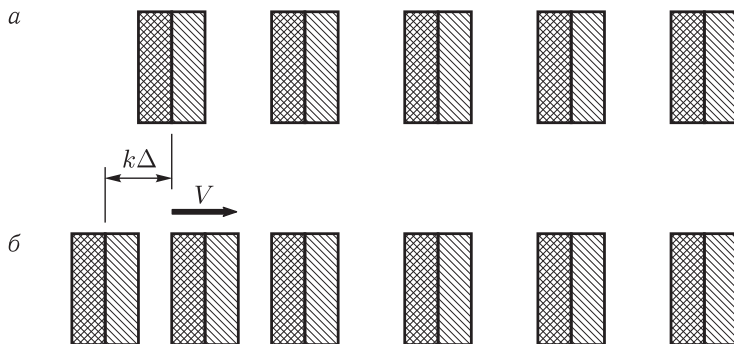


Рис. 9.2. Движение «лишней» доменной стенки в спиральной структуре

Анализ показывает, что меньшей энергией обладают «лишние» доменные стенки, хиральность которых совпадает с хиральностями доменных стенок спиральной структуры. В свою очередь, среди таких солитонов есть выделенные, с наименьшей энергией. Для них параметр  $\nu_1 = iK'\varepsilon_1 - K/2$  ( $\Delta = K$ ), и величина  $p/h$  выражается через эллиптические функции Якоби:

$$\frac{p}{h} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{dn}\chi}} \exp \left[ \frac{(1+k')\chi}{2} - \frac{\varepsilon_1 \sqrt{k'}}{k} t \right] c_0. \quad (9.2.13)$$

В безразмерных переменных ширина солитона (9.2.12), (9.2.13)  $d \sim 2k/(1+k')$ , а средняя скорость его движения  $V$  в структуре зависит от знака  $\varepsilon_1$ :  $V = 2\varepsilon_1\sqrt{k'}/(1+k')$ .

Реальные ширина и скорость солитона получаются умножением безразмерных значений этих величин на множители  $\sqrt{\alpha M_0/H}$  и  $\gamma M_0\sqrt{\alpha\beta}$  соответственно. Здесь  $\alpha$ ,  $\beta$  — постоянные обменного взаимодействия и анизотропии,  $\gamma$  — магнитомеханическое отношение,  $M_0$  — номинальная намагниченность. В размерных переменных, ширина солитона (9.2.12), (9.2.13) в диапазоне  $0 < H \lesssim 0,6H_c$  слабо зависит от внешнего магнитного поля и оценивается как  $d_{\text{dim}} \sim \pi\sqrt{\alpha M_0/H_c}$ . Размерная скорость заметно меняется только вблизи точки фазового перехода, где она уменьшается по закону

$$V_{\text{dim}} \sim \gamma M_0\sqrt{\alpha\beta} \left[ \sqrt{H_c/H} - 1 \right]^{1/4}, \quad H < H_c.$$

После прохождения солитона (9.2.12), (9.2.13) спиральная структура сдвигается на полпериода в направлении, противоположном скорости солитона. В оптически прозрачных материалах макроскопические сдвиги геликоидальной структуры при движении в ней кинков можно напрямую наблюдать с помощью магнитооптического эффекта Фарадея. Похожие эксперименты использованы в [27, 28] для визуализации дрейфа полосовых доменов в кристаллах ферритов-гранатов.

В последние годы синтезировано много молекулярных хиральных магнетиков со значительным вкладом взаимодействия Дзялошинского–Мории в магнитные свойства [29–31]. Такие соединения оптически прозрачны. Изменяя их химический состав, можно менять спин-спиновые взаимодействия, и энергию анизотропии, и создавать условия, благоприятные для наблюдения солитонов [32, 33].

Отметим также, что образование солитонов в циклоидальной структуре мультиферроиков должно сопровождаться появлением локальных электрических полей [34]. Это облегчает обнаружение и диагностику солитонов в таких материалах.

Вблизи точки фазового перехода несоизмеримость–соизмеримость (в пределе  $k \rightarrow 1$ ) солитонное решение (9.2.12) принимает простой вид:

$$\Phi = 4 \arctg \left[ \frac{e^\rho(e^\xi + \sigma e^y)}{\sigma e^{(\xi+y)} - 1} \right], \quad (9.2.14)$$

где  $\rho = \Delta/2$ ,  $\sigma = \pm 1$ ,  $\xi = z + \rho$ ,  $y = z \operatorname{cth} \rho - \varepsilon t / \operatorname{sh} \rho + \ln |c_0|$ ,  $\varepsilon = \pm 1$ ,  $c_0 = \text{const}$ . В легкоплоскостных магнетиках с остаточной квадратичной по намагниченности анизотропией в базисной плоскости выражение (9.2.14) описывает прохождение движущейся  $180^\circ$ -й доменной стенки через неподвижную. В безразмерных переменных ширина неподвижной доменной стенки порядка единицы, скорость движущейся стенки  $V = \varepsilon / \operatorname{ch} \rho$ , а ее ширина  $\sim \operatorname{th} \rho$ . При  $\sigma = 1$  доменные стенки имеют одинаковую, а при  $\sigma = -1$  — противоположную хиральность. В обоих

случаях они восстанавливают свои первоначальные форму и скорость после взаимодействия друг с другом (рис. 9.3). Встреча доменных стенок разной хиральности сопровождается их частичной аннигиляцией и колебаниями намагниченности, характер которых зависит от величины  $\Delta$ . При  $\Delta \ll 1$  доменные стенки почти полностью компенсируют друг друга: при столкновении амплитуда колебаний поля  $\Phi$  на рис. 9.3,1б порядка  $\Delta$ . При  $\Delta \gg 1$  доменные стенки колеблются «в противофазе». Когда значения  $\Phi$  в левой стенке близки к нулю, в правой стенке  $\Phi \sim \pm 4 \arctg e^{2\Delta} \approx \pm 2\pi$  (и наоборот).

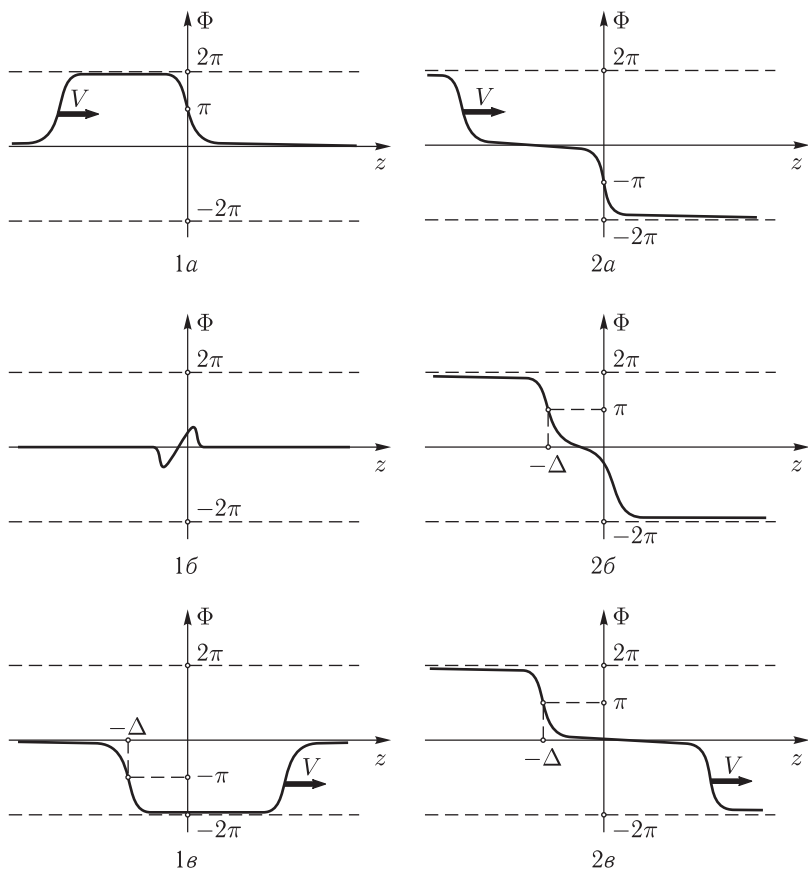


Рис. 9.3. Прохождение движущейся доменной стенки через неподвижную при  $\sigma = -1$  (1а, 1б, 1в) и при  $\sigma = 1$  (2а, 2б, 2в)

Движение кинка через длиннопериодическую спиральную структуру можно представить себе как повторение процессов ее взаимодействия с каждым из  $2\pi$ -кинков структуры.



### 9.2.2. Бризеры (связанные состояния доменных границ) в структуре

При граничных условиях (9.1.10) задача Римана доопределяется условиями, которые предписаны связью (9.1.14)

$$\begin{aligned}\Psi_{-}(z, t, u) &\rightarrow \Psi_0(z, t, u) \begin{pmatrix} a(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{при } z \rightarrow +\infty; \\ \Psi_{-}(z, t, u) &\rightarrow \Psi_{\Delta}(z, t, u) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a(u) \end{pmatrix} \quad \text{при } z \rightarrow -\infty.\end{aligned}\tag{9.2.15}$$

Бризерные функции  $\Psi_{-}(z, t, u)$  приобретают дополнительные множители при сдвиге на периоды по параметру  $u$ . Поэтому традиционная схема их построения путем разложения на «простые дроби» по дзета-функциям Вейерштрасса [35–37] (см. гл. 5 и 7) оказывается неэффективной. Вместо дзета-функций удобнее использовать функции

$$\begin{aligned}g_1(u) &= \frac{\sigma(u - \mu_1)}{\sigma(u + \mu_1^*)} \exp \left[ -\frac{\eta_3(\mu_1 + \mu_1^*)}{2} \right], \\ g_2(u) &= \frac{\sigma(u - \mu_1^* - 2iK')}{\sigma(u + \mu_1 - 2iK')} \exp \left[ -\frac{\eta_3(\mu_1 + \mu_1^*)}{2} \right], \\ g_3(u) &= i \frac{\sigma(u + iK')\sigma(u - iK')}{\sigma(u + \mu_1^*)\sigma(u + \mu_1 - 2iK')} \exp \left[ -\eta_3 \left( u + \frac{\mu_1 + \mu_1^*}{2} \right) \right],\end{aligned}$$

которые с точностью до блоховского множителя задают представление группы редукций рассматриваемой задачи:

$$\begin{aligned}g_{1,2}(u \pm 2K) &= g_{1,2}(u) e^{\mp 2\eta_1(\mu_1 + \mu_1^*)}, \quad g_3(u \pm 2K) = -g_3(u) e^{\mp 2\eta_1(\mu_1 + \mu_1^*)}; \\ g_{1,2}^*[(u \pm 2iK')^*] &= g_{2,1}(u) e^{\mp \eta_3(\mu_1 + \mu_1^*)}, \quad g_3^*[(u \pm 2iK')^*] = g_3(u) e^{\mp \eta_3(\mu_1 + \mu_1^*)}.\end{aligned}$$

Кроме того, они удовлетворяют дополнительным соотношениям

$$g_{1,2}^*(-u^*) = \frac{1}{g_{1,2}(u)}, \quad g_3^*(-u^*) = -\frac{g_3(u)}{g_1(u)g_2(u)},$$

которые обеспечивают переход (9.2.3) от решения  $\Psi_{-}(u)$  к  $\Psi_{+}(u)$ .

Согласно (9.2.1), (9.2.2), для одного бризера в спиральной структуре элемент матрицы перехода  $a(u) = g_1(u)g_2(u)$  параметризуется нулем  $\mu_1 = i\theta_1 - \Delta/4$  задачи Римана, где  $0 < \Delta < 4K$ ,  $-2K' < \theta_1 < 2K'$ .

Будем искать бризерное решение задачи Римана в виде

$$\Psi_{-}(z, t, u) = \Psi(\chi, t, u) \Psi_{\Delta/2}(\chi, t, u).\tag{9.2.16}$$

Схема построения функции  $\Psi(u)$  совпадает с приведенной в разд. 3.8: редукции и требование отсутствия лишних полюсов в соотноше-

нии (9.2.4) определяют ее с точностью до фазового множителя, который оказывается не зависящим от  $z$ ,  $t$  и фиксируется условием (9.2.15). Приведем окончательный результат:

$$\begin{aligned} & \Psi(\chi, t, u | \mu_1, \mathbf{m}) = \\ & = i \left| \frac{r}{\kappa} \right| \begin{pmatrix} |m_2|^2 g_2(u) \kappa^* - |m_1|^2 g_1(u) \kappa & i |\kappa|^2 g_3(u) m_1 m_2^* \\ i |\kappa|^2 g_3(u) m_1^* m_2 & |m_1|^2 \kappa^* g_2(u) - |m_2|^2 g_1(u) \kappa \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (9.2.17)$$

где  $g_i(u) \equiv g_i(u | \mu_1)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\sigma(\mu_1 + \mu_1^*) \sigma(\mu_1 - \mu_1^* - 2iK')}{\sigma(\mu_1 + iK') \sigma(\mu_1 - iK')} \exp(\eta_3 \mu_1); \\ |r|^{-2} &= |m_1|^4 + |m_2|^4 + 2|m_1 m_2|^2 \cos \theta, \\ \theta &= \text{am}(\mu_1, k) + \text{am}(\mu_1^*, k). \end{aligned}$$

Вычеты в полюсах функции  $\Psi$  представляют собой проекционные матрицы. Поэтому, как в [8] и в предыдущих главах, требование отсутствия лишних полюсов в формулах (9.2.10) для операторов  $U$  и  $V$  определяет зависимость от  $\chi, t$  вектора  $\mathbf{m} = (m_1, m_2) = \Psi_{\Delta/2}(\chi, t, \mu_1) \mathbf{c}$ , где  $\mathbf{c}$  — произвольный постоянный комплексный вектор. Комплексный параметр  $\mu_1$  и вектор  $\mathbf{m}$  конкретизируют вид функции  $\Psi$ , поэтому в обозначениях они указаны после вертикальной черты.

Из (9.1.25), (9.2.16) находим решение нелинейной модели sine-Gordon (9.1), соответствующее бризеру на фоне спиральной структуры:

$$\Phi(z, t) = \varphi_0(\tilde{\chi}) + 4 \text{Arctg} \left[ \text{tg} \frac{\theta}{2} \left( \frac{|m_1|^2 - |m_2|^2}{|m_1|^2 + |m_2|^2} \right) \right], \quad (9.2.18)$$

где  $\tilde{\chi} = \chi + \Delta/2$ ,  $\Delta = -4\text{Re}\mu_1$ ,  $\text{Arctg}(x)$  — полная квазипериодическая функция.

Используя (9.2.8), находим

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{m_1}{m_2} = \frac{k \text{sn}(\tilde{\chi} + \mu_1)}{1 + \text{dn}(\tilde{\chi} + \mu_1)} \equiv q(\tilde{\chi} + \mu_1), \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{m_1}{m_2} = -\frac{1}{q(\tilde{\chi} - \mu_1)}.$$

На первый взгляд, кажется, что для решения (9.2.18) краевые условия (9.1.10) нарушаются. Однако это не так, благодаря наличию тождеств:

$$\begin{aligned} \text{tg} \frac{\theta}{2} &= \text{dn}v \frac{\text{sn}R}{\text{cn}R}, \quad |q(\tilde{\chi} \pm \mu_1)|^2 = \frac{\text{dn}v - \text{dn}(\tilde{\chi} \pm R)}{\text{dn}v + \text{dn}(\tilde{\chi} \pm R)}, \\ R &= \text{Re}\mu_1, \quad v = i \text{Im}\mu_1; \end{aligned}$$

$$\text{Arctg} \left( \frac{\text{cn}\alpha}{1 + \text{sn}\alpha} \right) - \text{Arctg} \left( \frac{\text{sn}\beta}{\text{cn}\beta} \text{dn}(\alpha + \beta) \right) = \text{Arctg} \left( \frac{\text{cn}(\alpha + 2\beta)}{1 + \text{sn}(\alpha + 2\beta)} \right).$$

Последнее из равенств позволяет преобразовать разность двух функций типа арктангенса в функцию того же типа, но от другого ар-

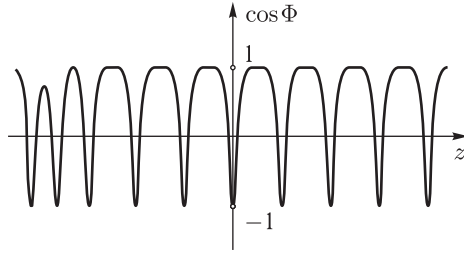


Рис. 9.4. Проекция намагниченности  $M_x \propto \cos \Phi$  для бризера в спиральной структуре

гумента. Это и приводит к верным граничным условиям для решения (9.2.18).

Протяженность и динамические свойства бризера (9.2.18), в конечном счете, обусловлены зависимостью вектор-функции  $\mathbf{m}$  от переменных  $\chi, t$ . Поскольку матрица  $M(\mu_1, \chi)$ , входящая в  $\Psi_{\Delta/2}(\chi, t, \mu_1)$ , периодична по  $\chi$ , основная зависимость  $\mathbf{m}$  от  $\chi, t$  связана с экспоненциальными множителями  $e^{\pm A(\mu_1, \chi, t)}$ ,  $e^{\pm A^*(\mu_1, \chi, t)}$ . Представим линейную по  $\chi, t$  функцию  $A$  (9.1.12) в виде:  $2A(\mu_1, \chi, t) = q^{(1)}(z - V^{(1)}t) + + i(k^{(1)}z + \omega^{(1)}t)$ , где

$$\begin{aligned} q^{(1)} &= -\frac{2}{k} \operatorname{Im} p(\mu_1) > 0, \quad V^{(1)} = \frac{\operatorname{Im}(\operatorname{dn}(\mu_1))}{kq^{(1)}}, \\ k^{(1)} &= \frac{2}{k} \operatorname{Re} p(\mu_1), \quad \omega^{(1)} = \frac{\operatorname{Re}(\operatorname{dn}(\mu_1))}{k}. \end{aligned} \quad (9.2.19)$$

Тогда параметр  $q^{(1)}$  характеризует размер бризера:  $d \propto 1/q^{(1)}$ ,  $V^{(1)}$  — скорость его движения как целого,  $k^{(1)}$  и  $\omega^{(1)}$  — волновой вектор и частота пульсаций намагниченности в области локализации бризера (рис. 9.4). Если двухпараметрический солитон-бризер записать в терминах скорости его движения  $V$  и частоты пульсаций  $\Omega$  в сопутствующей системе отсчета, то на плоскости  $V$ – $\Omega$  значения этих параметров попадут в энергетическую щель между голдстоуновской и активационной ветвями спектра спин-волновых мод [15].

Когда спиральная структура содержит пульсирующие солитоны-бризеры, возможно поглощение мощности внешней накачки на частотах внутренних колебаний бризеров. В отличие от кинков, бризеры могут быть как движущимися, так и неподвижными. Наиболее удобны для наблюдений неподвижные бризеры. Из (9.2.19) следует, что скорость бризера обращается в нуль, если  $\mu_1 = -\Delta/4$  или  $\mu_1 = \pm 2iK' - \Delta/4$ . Размерная частота внутренних колебаний неподвижного бризера определяется формулой

$$\tilde{\omega}(\Delta) = \gamma \sqrt{\beta H_c M_0} \operatorname{dn}(\Delta/4, k) / E(k). \quad (9.2.20)$$

При записи (9.2.20) учтено соотношение (9.1.7). Напомним, что параметр  $\Delta$  в безразмерных переменных характеризует локальный сдвиг  $k\Delta$  спиральной структуры при образовании в ней бризера.

Далее в разд. 9.3 показано, что спектр спин-волновых мод на фоне спиральной (полосовой доменной) структуры имеет две ветви — бесщелевую и активационную. Бесщелевая ветвь характеризует внутриграницные колебания намагниченности в полосовой структуре, а активационная — внутридоменные [38]. При однородной внешней накачке возбуждаются только бегущие в противоположных направлениях вдоль структуры активационные моды. В результате их интерференции образуются стоячие волны с частотами  $\tilde{\Omega}_n \sim 2\pi n/L_0$ , где  $L_0$  — период спиральной структуры,  $n$  — натуральные числа. Когда частота накачки совпадает с одной из частот стоячих волн, энергия поля накачки резонансно поглощается [39–41]. Примечательно, что допустимые частоты пульсаций бризера почти всюду лежат ниже частот  $\tilde{\Omega}_n$  стоячих спиновых волн в спиральной структуре и непрерывно заполняют полосу, заштрихованную на рис. 9.5. Возможно лишь незначительное перекрытие солитонных и спин-волновых частот вблизи точки фазового перехода по полю из несоизмеримой фазы в соизмеримую. Этот факт можно использовать для обнаружения бризеров в спиральной структуре.

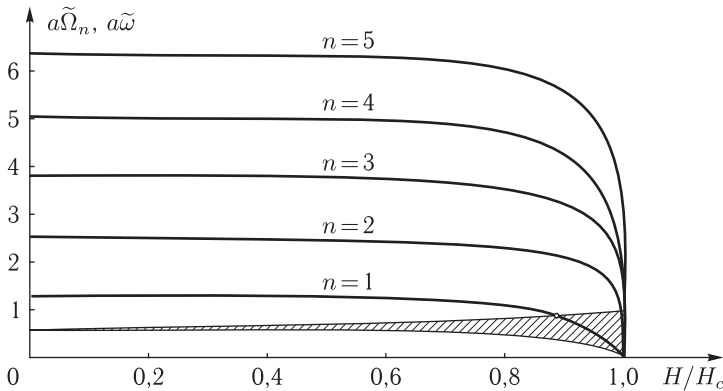


Рис. 9.5. Полоса частот неподвижного бризера и спектр резонансных частот стоячих спиновых волн в геликоидальной структуре,  $a^{-1} = \gamma\sqrt{\beta M_0 H_c}$

Проанализируем полученное решение вблизи точки фазового перехода в геликоидальной структуре, когда  $k \rightarrow 1$  и период решетки  $2\pi$ -кинков неограниченно растет. В пределе  $k \rightarrow 1$ ,  $\mu_1 = -\rho/2 + i\theta = \text{const}$  решение (9.2.18) принимает простой вид:

$$\begin{aligned} \Phi &= 4\text{Arctg} \left[ \frac{e^{\xi} \text{sh}(\rho/2) \cos(\gamma + \theta) + \text{ch}(y + \rho/2) \cos \theta}{e^{\xi} \cos \theta \text{ch}(y - \rho/2) + \text{sh}(\rho/2) \cos(\gamma - \theta)} \right], \\ y &= \frac{z \text{sh} \rho - 2t \sin \theta \text{sh}(\rho/2)}{\text{ch} \rho + \cos 2\theta} + y_0, \\ \gamma &= \frac{-z \sin 2\theta + 2t \cos \theta \text{ch}(\rho/2)}{\text{ch} \rho + \cos 2\theta} + \gamma_0, \end{aligned} \quad (9.2.21)$$

где  $\xi = z + \rho$ ;  $y_0, \gamma_0$  — вещественные константы. Формула (9.2.21) описывает взаимодействие бризера с одним неподвижным  $2\pi$ -кинком структуры. Бризер движется со скоростью  $V = \sin \theta / \operatorname{ch}(\rho/2)$  и пульсирует с частотой  $\omega = 2|\cos \theta| \operatorname{ch}(\rho/2)[\operatorname{ch} \rho + \cos(2\theta)]^{-1}$ ;  $2\pi$ -кинк после прохождения через него бризера сдвигается вдоль оси  $Oz$  на расстояние  $2\rho = \Delta$  в направлении, противоположном движению бризера.

Обсудим особый случай, когда  $\gamma_0 = 0$ ,  $\theta \rightarrow \pi\varepsilon/2 + \delta$ ,  $\varepsilon = \pm 1$ ,  $\delta \rightarrow 0$ . В таком пределе (9.2.21) вырождается в экспоненциально-полиномиальное решение:

$$\Phi = 4\operatorname{Arctg} \left[ \frac{(s-1)\operatorname{sh}(\rho/2) - \operatorname{ch}(y-\rho/2)e^\xi}{(s+1)\operatorname{sh}(\rho/2)e^\xi + \operatorname{ch}(y+\rho/2)} \right],$$

где

$$\xi = z + \rho, \quad y = z \operatorname{cth}(\rho/2) - \frac{\varepsilon t}{\operatorname{sh}(\rho/2)} + y_0, \quad s = \frac{z - \varepsilon t \operatorname{ch}(\rho/2)}{\operatorname{sh}^2(\rho/2)}.$$

Бризер локализован в области, где  $y \approx \operatorname{const}$ . На больших расстояниях от  $2\pi$ -кинка «ядро» бризера приобретает тот же вид, что был в случае однородного основного состояния среды. Так, в пределе  $y = \operatorname{const}$ ,  $z \rightarrow +\infty$  должны выполняться условия  $\varepsilon t \rightarrow +\infty$ ,  $s \rightarrow -\infty$ , поэтому получаем:

$$\Phi \approx 4\operatorname{Arctg} \left( \frac{\operatorname{ch}(y+\rho/2)}{\varepsilon t \operatorname{cth}(\rho/2)} \right) = 4\operatorname{Arctg} (e^{\operatorname{cth}(\rho/2)(z_0-z_2)} + e^{-\operatorname{cth}(\rho/2)(z_0-z_1)}),$$

где

$$z_0 = z - Vt, \quad V = \frac{\varepsilon}{\operatorname{ch}(\rho/2)}; \quad z_{1,2} = \operatorname{th} \left( \frac{\rho}{2} \right) \left[ \mp \ln \left( 2\varepsilon t \operatorname{cth} \left( \frac{\rho}{2} \right) \right) + \frac{\rho}{2} - y_0 \right].$$

Отсюда следует, что бризер образован двумя  $2\pi$ -кинками одинаковой ширины  $\operatorname{th}(\rho/2)$  с противоположными топологическими зарядами.

В легкоплоскостных ферромагнетиках с остаточной анизотропией  $\sim M_1^2$  в базисной плоскости подобному объекту соответствует зародыш перемагничивания в одном из двух доменов, разделенных неподвижной доменной границей. Когда  $\varepsilon = 1$ ,  $y_0 = 0$ , зародыш движется слева направо и первоначально (при  $t \rightarrow -\infty$ ) находится в левом домене. При этом его правая (левая) доменная стенка имеет такую же (противоположную) хиральность, что и неподвижная доменная граница. Доменные стенки одинаковой хиральности отталкиваются, а противоположных — притягиваются. Поэтому, по мере приближения к доменной границе, зародыш уменьшает свой размер и, двигаясь как целое со скоростью  $V$ , легко проходит сквозь доменную границу (рис. 9.6). При «столкновении» зародыша с доменной границей поле намагниченности сильно деформируется. Однако после столкновения в правом домене появляется новый зародыш перемагничивания,

движущийся с прежней скоростью, а доменная граница восстанавливает свою форму, сдвигается влево вдоль оси  $Oz$  на расстояние  $\Delta = 2\rho$  и далее остается неподвижной. Теперь левая (правая) доменная стенка нового зародыша имеет такую же (противоположную) хиральность, что и неподвижная доменная граница. На небольших расстояниях от доменной границы размер зародыша определяется взаимодействиями стенок этих объектов. По мере удаления зародыша от доменной границы его ширина  $z_2 - z_1$  растет со временем по логарифмическому закону:  $z_2 - z_1 = 2 \operatorname{th}(\rho/2) \ln[2\epsilon t \operatorname{cth}(\rho/2)]$ . В пределе  $t \rightarrow +\infty$  зародыш представляет собой протяженную область перемagnиченного материала. Энергия такого образования равна сумме энергий ограничивающих его доменных стенок.

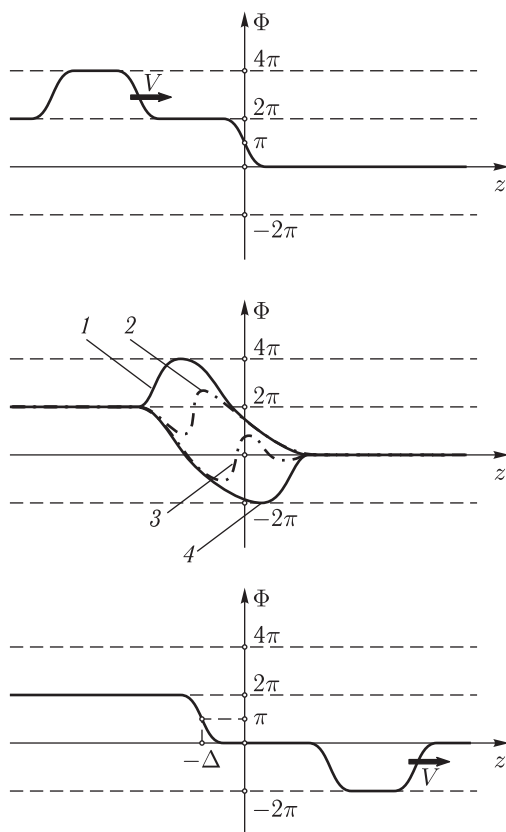


Рис. 9.6. Зародыш перемagnичивания и неподвижная доменная стенка: до, во время и после столкновения. Цифры 1, 2, 3, 4 нумеруют распределение поля  $\Phi$  в различные моменты времени при прохождении зародыша через стенку

Для неподвижных бризеров параметр  $\mu_1$  либо вещественен:  $\mu_1 = -\rho/2$ , либо равен  $\mu_1 = -\rho/2 \pm \pi i$ . В этих случаях поле  $\Phi$  имеет вид

$$\Phi = 4\text{Arctg} \left[ \frac{e^\xi \text{sh}(\rho/2) \cos \gamma + \text{ch}(y + \rho/2)}{\text{sh}(\rho/2) \cos \gamma + e^\xi \text{ch}(y - \rho/2)} \right],$$

где  $y = z \text{th}(\rho/2) + y_0$ ;  $\gamma = t/\text{ch}(\rho/2) + \gamma_0$  — при вещественном  $\mu_1$ ,  $\gamma = t/\text{ch}(\rho/2) - \gamma_0$  — при  $\mu_1 = -\rho/2 \pm \pi i$  ( $\gamma_0 = \text{const}$ ). Бризер «дышит» с частотой  $\omega = 1/\text{ch}(\rho/2)$  (в безразмерных переменных), но не движется как целое. Расстояние от бризера до  $2\pi$ -кинка зависит от параметра  $y_0$ . Вдали от  $2\pi$ -кинка (при  $z \gg 1$ ,  $y_0 \gg 1$ ) в области, где  $y \approx \text{const}$ , имеем пульсирующий солитон на фоне однородного основного состояния среды [7, 8]:

$$\Phi = 4\text{Arctg} [\text{sh}(\rho/2) \cos \gamma / \text{ch}(y - \rho/2)].$$

Реальные частота, ширина и скорость солитонов получаются в результате умножения безразмерных значений этих величин на множители  $\gamma\sqrt{\beta H_c M_0}$ ,  $\sqrt{\alpha M_0/H_c}$  и  $\gamma M_0\sqrt{\alpha\beta}$  соответственно.

Движение солитона через длиннопериодическую спиральную структуру можно представить себе как повторение процессов его взаимодействия с каждой из доменных стенок структуры.

### 9.2.3. Трансляции структуры при столкновениях солитонов

Мультибризеры на фоне сверхструктуры выражаются через матричные функции  $\Psi(\chi, t, u | \mu_s, \mathbf{m}^{(s)})$ , где  $\mathbf{m}^{(s)} = \Psi_{\rho_s}(\chi, t, \mu_s) \mathbf{c}^{(s)}$ ,  $\mathbf{c}^{(s)} = (c_1^{(s)}, c_2^{(s)})$  — произвольный постоянный комплексный вектор;  $\mu_s = -\rho_s/2 + i\theta_s$ ,  $0 < \rho_s < 2K$ ,  $|\theta_s| < 2K'$ ;

$$\Psi_{\rho_s}(\chi, t, u) = M(u, \chi + \rho_s) \exp \left( A(u, \chi, t) \sigma_3 + \frac{\eta_1 \rho_s u}{K} \sigma_3 \right).$$

Построим двухбризерное возбуждение. Для этого заметим, что решение системы (9.1.11) останется таковым после умножения его справа на независящую от  $\chi$ ,  $t$  матрицу и сдвига аргумента  $\chi \rightarrow \chi + \rho_2$ . После перечисленных преобразований из однобризерного решения (9.2.17) получаем новое однобризерное решение системы (9.1.11):

$$\Psi(\chi, t, u | \mu_1, \mathbf{n}^{(1)}) \Psi_{\Delta/2}(\chi, t, u),$$

где  $\Delta/2 = \rho_1 + \rho_2$ ,  $\mathbf{n}^{(1)} = \Psi_{\Delta/2}(\chi, t, \mu_1) \mathbf{d}^{(1)}$ ,  $\mathbf{d}^{(1)}$  — произвольный постоянный комплексный вектор. Будем трактовать это решение как

«затравочное» и «оденем» его в соответствии с изложенной схемой. Результатом будет двухбризерное решение:

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}_-(\chi, t, u | \mu_1, \mu_2, \mathbf{n}^{(1)}, \mathbf{n}^{(2)}) = \\ = \Psi(\chi, t, u | \mu_2, \mathbf{n}^{(2)}) \Psi(\chi, t, u | \mu_1, \mathbf{n}^{(1)}) \Psi_{\Delta/2}(\chi, t, u).\end{aligned}\quad (9.2.22)$$

Здесь

$$\mathbf{n}^{(2)} \equiv \Psi(\chi, t, \mu_2 | \mu_1, \mathbf{n}^{(1)}) \Psi_{\Delta/2}(\chi, t, \mu_2) \mathbf{d}^{(2)},$$

$\mathbf{d}^{(2)}$  — произвольный постоянный комплексный вектор;

$$\mu_s = -\rho_s/2 + i\theta_s \quad (s = 1, 2), \quad \rho_2 + \rho_1 = \Delta/2.$$

Прямой проверкой можно убедиться, что (9.2.22) удовлетворяет дифференциальным ограничениям и трансформационным свойствам решения системы (9.1.11) с граничными условиями (9.1.10). Мы наметили рекуррентную схему размножения бризерных решений системы (9.1.11), а значит, и модели sine-Gordon. На ее  $(N - 1)$ -м шаге получаем описание  $N$  бризеров в спиральной структуре.

К простейшим солитонным решениям модели sine-Gordon с граничными условиями (9.1.10) относится не только бризер, но и две «лишних» доменных стенки (два кинка) с противоположными хиральностями (зарядами) на фоне спиральной структуры (решетки кинков). Факторизация (9.2.22) не описывает такие солитоны. Двухкинковое решение задачи Римана с нулями в точках  $\nu_s = -\Delta_s/2 + i\varepsilon_s K'$  ( $s = 1, 2$ ),  $\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta$  получается из (9.2.6) после формальных замен:

$$\begin{aligned}\Psi_0 \rightarrow \Psi_-^{(2)}, \quad \Psi_\Delta \rightarrow \Psi_-^{(1)}, \\ a(u | \nu_1) = i\sigma\varepsilon_1 \frac{\sigma(u - \nu_1)}{\sigma(u + \nu_1^*)} \exp\left(\frac{\varepsilon_1 \eta_3 \Delta_1}{2}\right).\end{aligned}\quad (9.2.23)$$

Здесь  $\Psi_-^{(s)}$  ( $s = 1, 2$ ) — решения задачи Римана с нулем в точке  $u = \nu_2$ , которые соответствуют двум однокинковым состояниям  $\Phi^{(s)}$  модели sine-Gordon с асимптотическими условиями

$$\begin{aligned}\Phi^{(s)} \rightarrow \varphi_2^{(0)}(\chi + \delta_s) \equiv \varphi_0(\chi + \delta_s, k) \quad \text{при } z \rightarrow +\infty, \\ \Phi^{(s)} \rightarrow \varphi_1^{(0)}(\chi + \delta_s) \equiv -2\pi\sigma + \varphi_0(\chi + \Delta_2 + \delta_s, k) \quad \text{при } z \rightarrow -\infty,\end{aligned}$$

где  $\sigma = \pm 1$ ,  $\delta_1 = \Delta_1$ ,  $\delta_2 = 0$ ;  $0 < \Delta_{1,2} < K$ . Выражения для  $\Psi_-^{(s)}$  получаются из формул (9.2.6), (9.2.9), (9.2.11) после очевидных замен, связанных с изменением асимптотических условий и нуля задачи Римана. Перечислим важные ограничения.



При построении матриц  $\Psi_-^{(1)}$ ,  $\Psi_-^{(2)}$  следует использовать функцию

$$\tilde{a}(u|\nu_2) = -i\sigma\varepsilon_2 \frac{\sigma(u - \nu_2)}{\sigma(u + \nu_2^*)} \exp\left(\frac{\varepsilon_2}{2}\eta_3\Delta_2\right); \quad \nu_2 = -\frac{\Delta_2}{2} + i\varepsilon_2 K',$$

которая отличается знаком от  $a(u|\nu_1)$  (9.2.23). Только тогда двухсолитонное решение модели (9.1) будет описывать две доменные стенки разной хиральности в спиральной структуре с граничными условиями (9.1.10). Использование одинаковых функций ( $a(u|\nu) = \tilde{a}(u|\nu)$ ) приводит к решению модели (9.1) с другими краевыми условиями, которые отличаются от (9.1.10) по  $\text{mod } 4\pi$  и учитывают наличие двух стенок одинаковой хиральности в спиральной структуре.

Согласно соотношению (9.2.11), каждая из матричных функций  $\Psi_-^{(s)}$  зависит от постоянной интегрирования  $c_s > 0$  ( $s = 1, 2$ ). Эти параметры следует подчинить ограничению:  $c_2/c_1 = |a(\nu_2|\nu_1)|^2$ . Тогда в (9.2.4) не появятся лишние полюсы в точках  $u = \nu_2$ ,  $-\nu_2^*$  ( $\text{mod}(2K, 4iK')$ ) и функции двухсолитонного решения  $\alpha$ ,  $\beta$  станут положительными, причем

$$\frac{\alpha}{\beta} = \left| \frac{(\Psi_-^{(1)}(\nu_1))_{21}}{(\Psi_-^{(2)}(\nu_1))_{22}} \right| c, \quad r = \left( \alpha^2 + \beta^2 + 2\sigma\alpha\beta \sin \left[ \frac{\Phi^{(2)} - \Phi^{(1)}}{4} \right] \right)^{-1/2},$$

где  $c > 0$  — еще одна постоянная интегрирования.

Решение модели sine-Gordon с асимптотиками (9.1.10), описывающее упругое столкновение кинка и антикинка, движущихся в решетке кинков, имеет вид

$$\Phi = 4 \arg (\alpha e^{i\Phi^{(2)}/4} + i\sigma\beta e^{i\Phi^{(1)}/4}).$$

Интересно, что столкновения солитонов в спиральной структуре сопровождаются локальными трансляциями структуры, которые в оптически прозрачных кристаллах можно визуализировать. Полученные формулы для мультисолитонов позволяют в деталях проанализировать процесс взаимодействия солитонов друг с другом и с фоновой структурой.

В качестве примера обсудим двухбризерное решение (9.2.22). Как и ранее, распространение бризеров описывается экспоненциальными множителями  $e^{\pm A(\mu_s, \chi, t)}$ ,  $e^{\pm \tilde{A}^*(\mu_s, \chi, t)}$  ( $s = 1, 2$ ), где

$$2A(\mu_s, \chi, t) = q^{(s)}(z - V^{(s)}t) + i(k^{(s)}z + \omega^{(s)}t).$$

Параметры  $q^{(s)}$  и т. д. получаются заменой индекса «1» на «s» в формулах (9.2.19). Перейдем в систему отсчета, связанную с бризером «2», и проанализируем его внутреннюю структуру до и после столкновения с бризером «1». С математической точки зрения эта задача сводится к вычислению пределов функции (9.2.22) при  $t \rightarrow \mp\infty$  с ограничением:

$\xi_2 \equiv z - V^{(2)}t = \text{const}$ . Запишем  $A(\mu_s, \chi, t)$  в виде, удобном для расчетов:

$$\begin{aligned} 2A(\mu_2, \chi, t) &= q^{(2)}\xi_2 + i[k^{(2)}\xi_2 + (\omega^{(2)} + k^{(2)}V^{(2)})t], \\ 2A(\mu_1, \chi, t) &= q^{(1)}[\xi_2 + (V^{(2)} - V^{(1)})t] + \\ &\quad + i[k^{(1)}\xi_2 + (\omega^{(1)} + k^{(1)}V^{(2)})t]. \end{aligned} \quad (9.2.24)$$

Пусть для определенности скорость бризера «2» больше скорости бризера «1»:  $(V^{(2)} - V^{(1)}) > 0$ . Учитывая второе соотношение (9.2.24) и формулы (9.2.5), находим:

$$\begin{aligned} \Psi(\chi, t, u | \mu_1, \mathbf{n}^{(1)}) \Psi_{\Delta/2}(\chi, t, u) \Big|_{\substack{\xi_2 = \text{const} \\ t \rightarrow +\infty}} &\rightarrow \\ &\rightarrow \Psi_{\Delta/2 - \rho_1 = \rho_2}(\chi, t, u) \begin{pmatrix} a^{(1)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (9.2.25)$$

$$\begin{aligned} \Psi(\chi, t, u | \mu_1, \mathbf{n}^{(1)}) \Psi_{\Delta/2}(\chi, t, u) \Big|_{\substack{\xi_2 = \text{const} \\ t \rightarrow -\infty}} &\rightarrow \\ &\rightarrow \Psi_{\Delta/2 + \rho_1}(\chi, t, u) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^{(1)} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (9.2.26)$$

где  $a^{(1)}(u) = g_1(u | \mu_1) g_2(u | \mu_1)$ .

Соотношения (9.2.25), (9.2.26) сразу дают предельные значения вектора  $\mathbf{n}^{(2)}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^{(2)} \rightarrow \mathbf{p} &= \Psi_{\rho_2}(\chi, t, \mu_2) \begin{pmatrix} a^{(1)}(\mu_2) d_1^{(2)} \\ d_2^{(2)} \end{pmatrix} \quad \text{при } t \rightarrow +\infty; \\ \mathbf{n}^{(2)} \rightarrow \mathbf{q} &= \Psi_{\Delta/2 + \rho_1}(\chi, t, \mu_2) \begin{pmatrix} d_1^{(2)} \\ a^{(1)}(\mu_2) d_2^{(2)} \end{pmatrix} \quad \text{при } t \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (9.2.27)$$

Согласно (9.2.24), экспоненциальные множители с индексом  $s = 2$  в пределе  $t \rightarrow \pm\infty$  остаются ограниченными. Поэтому искомые выражения для  $\tilde{\Psi}_-$  имеют вид

$$\tilde{\Psi}_- \Big|_{\substack{\xi_2 = \text{const} \\ t \rightarrow +\infty}} \rightarrow \Psi(\chi, t, u | \mu_2, \mathbf{p}) \Psi_{\rho_2}(\chi, t, u) \begin{pmatrix} a^{(1)}(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (9.2.28)$$

$$\tilde{\Psi}_- \Big|_{\substack{\xi_2 = \text{const} \\ t \rightarrow -\infty}} \rightarrow \Psi(\chi, t, u | \mu_2, \mathbf{q}) \Psi_{\Delta/2 + \rho_1}(\chi, t, u) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^{(1)}(u) \end{pmatrix}. \quad (9.2.29)$$

Как видим, второй бризер при удалении от первого описывается функциями вида (9.2.16), (9.2.17), типичными для изолированного бризера. Поскольку  $V^{(2)} > V^{(1)}$ , выражения (9.2.28), (9.2.29) соответствуют ситуациям, когда второй бризер находится, соответственно, на большом расстоянии справа или слева от первого. Асимптотические значения функции (9.2.28) при  $\xi_2 \rightarrow +\infty$  и  $\xi_2 \rightarrow -\infty$  дают представление об

изменении геликоидальной структуры из-за наличия второго бризера. Соответствующие пределы легко вычисляются с помощью (9.2.5):

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}_-(t \rightarrow +\infty) \Big|_{\xi_2 \rightarrow +\infty} &\rightarrow \Psi_0(\chi, t, u) \begin{pmatrix} a(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \tilde{\Psi}_-(t \rightarrow +\infty) \Big|_{\xi_2 \rightarrow -\infty} &\rightarrow \Psi_{2\rho_2}(\chi, t, u) \begin{pmatrix} a^{(1)}(u) & 0 \\ 0 & a^{(2)}(u) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

где  $a^{(2)}(u) = g_1(u|\mu_2)g_2(u|\mu_2)$ ,  $a(u) = a^{(1)}(u)a^{(2)}(u)$ . Отсюда следует, что движение второго бризера сопровождается «сжатием» геликоидальной структуры вдоль оси  $Oz$  на величину  $2k\rho_2$ . Анализ аналогичных пределов выражения (9.2.29) приводит к тому же выводу. В то же время, из-за наличия первого бризера, сверхструктуры, в которых движется второй бризер при  $t \rightarrow +\infty$  и  $t \rightarrow -\infty$ , сдвигаются вдоль оси  $Oz$  относительно друг друга на величину  $-2k\rho_1$ .

Второе отличие (9.2.28), (9.2.29) от функции изолированного бризера (9.2.16), (9.2.17) состоит в перенормировке постоянного вектора  $\mathbf{d}^{(2)}$ . Например, в пределе  $t \rightarrow +\infty$  компоненты вектора  $\mathbf{d}^{(2)} = (d_1^{(2)}, d_2^{(2)})$  приобретают дополнительные множители (см. (9.2.27)):  $d_1^{(2)} \rightarrow a^{(1)}(\mu_2)d_1^{(2)}$ ,  $d_2^{(2)} \rightarrow d_2^{(2)}$ . Внутренняя структура уединенного второго бризера описывается аналогом выражения (9.2.18) и зависит от отношения компонент  $n_1^{(2)}/n_2^{(2)}$ . С учетом явного вида векторов  $\mathbf{n}^{(2)}$  и  $\mathbf{p}$ , это означает, что в пределе  $t \rightarrow +\infty$  координата центра второго солитона

$$z = V^{(2)}t - \frac{1}{q^{(2)}} \ln \left| \frac{d_1^{(2)}}{d_2^{(2)}} \right|$$

сдвигается на величину

$$\delta z(t \rightarrow +\infty) = -\frac{\ln |a^{(1)}(\mu_2)|}{q^{(2)}}, \quad (9.2.30)$$

а начальная фаза пульсаций в области локализации бризера приобретает приращение

$$\delta\varphi(t \rightarrow +\infty) = \arg a^{(1)}(\mu_2). \quad (9.2.31)$$

До столкновения с первым бризером (при  $t \rightarrow -\infty$ ), перечисленные параметры у второго бризера отличаются знаком от значений (9.2.30), (9.2.31).

Для того чтобы проследить за первым солитоном при его рассеянии на втором, следует осуществить факторизацию (9.2.22) в обратном порядке. Новая форма записи того же решения удобна для исследования его асимптотик в другом предельном случае:  $z - V^{(1)}t = \text{const}$ ,  $t \rightarrow \pm\infty$ . Вычисления дают близкие результаты.

Таким образом, для мультибризеров в геликоидальной структуре, в отличие от солитонов на однородном фоне, характерны не только

приращения координат и фаз после каждого парного столкновения, но и сдвиги фоновой структуры, сопровождающие движение каждого из солитонов.

### 9.3. Нелинейная динамика спиновых волн

*Но вот математика волн, она с самого начала оказалась на редкость сложной, более того, все время продолжала и по сей день продолжает усложняться. Она стала настолько трудной, что приходится использовать всю мощь вычислительного аппарата, чтобы хоть отчасти обойти эти трудности и довести решение задач до конца, до числа, как говорят физики.*

Б. Кадомцев, В. Рыдник.  
«Волны вокруг нас»

При малых внешних воздействиях, недостаточных для макроскопических сдвигов структуры и формирования в ней солитонов, образуются спиновые волны, в которых намагниченность колеблется около равновесных положений спиральной структуры. Первоначально локализованные на фоне сверхструктуры спин-волновые состояния расплываются с течением времени из-за эффектов дисперсии. Теоретическое описание нелинейной динамики спиновых волн связано с решением так называемой регулярной задачи Римана, для которой функции  $a(u)$  и  $a^*(-u^*)$  не имеют нулей в областях своей аналитичности. Краевые условия для такой задачи совпадают с (9.1.10) при  $\Delta = 0$ :  $\Phi(z, t) \rightarrow \varphi_0(\chi)$  при  $|z| \rightarrow \infty$ . Поскольку  $\Delta = 0$ , функции  $\Psi_{\pm}(u)$ ,  $\Psi_0(u)$  имеют периоды  $[4K, 4iK']$  и однозначно определены на римановой поверхности, топологически эквивалентной тору.

Для решения регулярной задачи Римана на торе полезны функции

$$F_+(u) = \exp \left[ \frac{i}{4} (\Phi - \varphi_0) \sigma_3 \right] \Psi_+(u) \Psi_0^{-1}(u), \quad \det F_+ = a^*(-u^*);$$

$$F_-(u) = \exp \left[ \frac{i}{4} (\Phi - \varphi_0) \sigma_3 \right] \frac{\Psi_-(u)}{a(u)} \Psi_0^{-1}(u), \quad \det F_- = \frac{1}{a(u)},$$

которые являются не только двоякопериодическими и аналитическими в областях  $D_{\pm}$ , но и непрерывными в этих областях вплоть до границы. Переход от  $\Psi_{\pm}(u)$  к  $F_{\pm}(u)$  необходим для исключения особенностей функций  $\Psi_{\pm}(u)$ , порожденных фоновой структурой.

С помощью асимптотических разложений функций  $\Psi_{\pm}(u)$ ,  $\Psi_0(u)$  вблизи точек  $u = \pm iK'$  (см. разд. 9.4) нетрудно убедиться в справедливости формул:

$$\begin{aligned} a(\pm iK') &= a(\pm iK' + 2K) = 1; \\ F_{\pm}(-iK') &= F_{\pm}(-iK' + 2K) = I; \\ F_{\pm}(iK') &= \exp\left[\frac{i}{2}(\Phi - \varphi_0)\sigma_3\right]. \end{aligned} \quad (9.3.1)$$

Редукции на функции  $F_{\pm}(u)$  в областях их аналитичности следуют из таковых для  $\Psi_{\pm}(u)$ ,  $\Psi_0(u)$ :

$$F_{\pm}(u + 2K) = \sigma_3 F_{\pm}(u) \sigma_3, \quad F_{\pm}^*[(u^* + 2iK')^*] = \sigma_1 F_{\pm}(u) \sigma_1. \quad (9.3.2)$$

В ячейке своей периодичности  $[4K, 4iK']$  на границах  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \tilde{\gamma}_1 \cup \tilde{\gamma}_2$  между областями  $D_+$  и  $D_-$  (см. рис. 9.7):

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \{\operatorname{Re} u = 0, \quad |\operatorname{Im} u| \leq 2K'\}, & \tilde{\gamma}_1 &= \{\operatorname{Re} u = 2K, \quad |\operatorname{Im} u| \leq 2K'\}, \\ \gamma_2 &= \{\operatorname{Re} u = -K, \quad |\operatorname{Im} u| \leq 2K'\}, & \tilde{\gamma}_2 &= \{\operatorname{Re} u = K, \quad |\operatorname{Im} u| \leq 2K'\}, \end{aligned}$$

матричные функции  $F_{\pm}(u)$  связаны условием (9.1.22)

$$\begin{aligned} F_+(u) &= F_-(u)(I - G(u)), \\ G(u) &= \Psi_0(u) \begin{pmatrix} 0 & b^*(-u^*) \\ b(u) & 0 \end{pmatrix} \Psi_0^{-1}(u). \end{aligned} \quad (9.3.3)$$

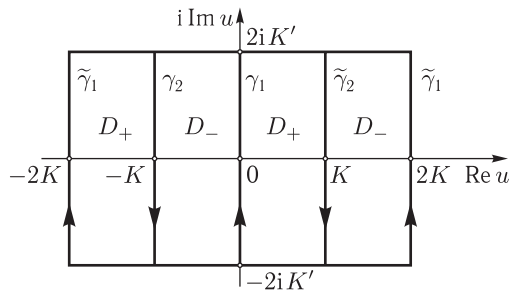


Рис. 9.7. Граница  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \tilde{\gamma}_1 \cup \tilde{\gamma}_2$  между областями  $D_+$  и  $D_-$

Покажем, что решение регулярной задачи Римана (9.3.3) сводится к решению линейных интегральных уравнений. Для этого определим кусочно-аналитическую функцию  $\tilde{F}(u) = F_{\pm}(u)$  при  $u \in D_{\pm}$  и введем контур  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ . Здесь  $\Gamma_i$  — контуры, ограничивающие области  $D_+$  и  $D_-$  в элементарной ячейке  $[4K, 4iK']$  (см. рис. 9.8). Мы используем положительные направления обходов, при которых каждая из областей  $D_+$  или  $D_-$  остается слева от охватывающего ее контура.

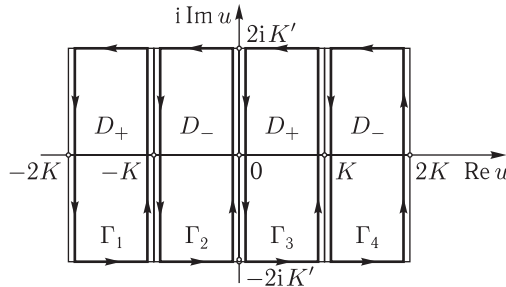


Рис. 9.8. Контур  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$  и области  $D_+$  и  $D_-$  в ячейке  $[4K, 4iK']$

Поскольку величины  $\tilde{F}(u')$ ,  $\zeta(u' + iK')[\tilde{F}(u') - I]$  при  $u' \in \Gamma$  являются граничными значениями функций, аналитических внутри контура  $\Gamma$ , справедливы тождества

$$\oint_{\Gamma} du' \tilde{F}(u') = 0, \quad \oint_{\Gamma} du' \zeta(u' + iK')[\tilde{F}(u') - I] = 0, \quad (9.3.4)$$

где периоды функций Вейерштрасса суть  $[4K, 4iK']$ .

Трудность решения регулярной задачи Римана на римановой поверхности связана с выбором аналога ядра Коши [42, 43]. В рассматриваемой задаче подходящее ядро Коши на торе имеет вид

$$Y(u', u) = \zeta(u' - u) - \zeta(u' + iK').$$

Оно двоякопериодично по переменной  $u'$  с периодами  $[4K, 4iK']$ , но квазипериодично по  $u$ :

$$\zeta(u \pm 4K) = \zeta(u) \pm 2\eta_1, \quad \zeta(u \pm 4iK') = \zeta(u) \pm 2\eta_3.$$

Тем не менее, вследствие (9.3.4), преобразование

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} du' Y(u', u) [\tilde{F}(u') - I] \quad (9.3.5)$$

определяет двоякопериодическую функцию спектрального параметра  $u$ . Вычисление (9.3.5) с помощью теоремы Коши дает интегральное представление

$$\tilde{F}(u) = I + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} du' Y(u', u) [\tilde{F}(u') - I]. \quad (9.3.6)$$

Горизонтальные участки контура  $\Gamma$  при интегрировании (9.3.6) проходятся в противоположных направлениях, а подынтегральная функция принимает на них одинаковое значение. Поэтому в (9.3.6) остаются

лишь интегралы вдоль вертикальных участков контура  $\Gamma$ , которые с помощью (9.3.3) можно выразить в терминах скачков функции  $\tilde{F}(u')$  на  $\gamma$ :

$$\begin{aligned}\tilde{F}(u) &= I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} du' Y(u', u) [F_-(u') - F_+(u')] = \\ &= I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} du' Y(u', u) F_-(u') G(u').\end{aligned}\quad (9.3.7)$$

В (9.3.7) отрезки  $\gamma$  проходятся в направлении обхода области  $D_-$ .

Пусть  $u$  стремится к точке  $\nu \in \gamma$  из области  $D_-$ , тогда, в силу формулы Сохоцкого–Племеля, соотношение (9.3.7) приводит к сингулярному интегральному уравнению для расчета  $F_-(\nu)$ :

$$F_-(\nu) \left( I - \frac{G(\nu)}{2} \right) = I + \frac{\text{V. p.}}{2\pi i} \int_{\gamma} du' Y(u', \nu) F_-(u') G(u').\quad (9.3.8)$$

Буквы «V. p.» перед интегралом означают, что он вычисляется в смысле главного значения Коши. Решение уравнения (9.3.8) достаточно найти при  $\nu = iv$ , где  $|v| \leq K'$ , так как на остальных участках  $\gamma$  оно восстанавливается с помощью редукций (9.3.2). Используя редукции и соотношения типа

$$\begin{aligned}&\int_{-2K'i}^{2K'i} du' Y(u', \nu) F_-(u') G(u') = i \int_{-K'}^{K'} dv (Y(iv, \nu) F_-(iv) G(iv) + \\ &\quad + Y(-2K'i - iv, \nu) \sigma_1 [F_-(iv) G(iv)]^* \sigma_1); \\ &G^*(iv) = -\sigma_2 G(iv) \sigma_2,\end{aligned}$$

получаем:

$$F_-(\nu) \left( I - \frac{G(\nu)}{2} \right) = I + \frac{\text{V. p.}}{2\pi} \int_{-K'}^{K'} dv [M(iv, \nu) - M(iv - K, \nu)],\quad (9.3.9)$$

$$\begin{aligned}M(iv, \nu) &= [Y(iv, \nu) F_-(iv) - Y(2K - 2K'i - iv, \nu) \sigma_2 F_-^*(iv) \sigma_2] G(iv) + \\ &+ [Y(2K + iv, \nu) \sigma_3 F_-(iv) \sigma_3 - Y(-2K'i - iv, \nu) \sigma_1 F_-^*(iv) \sigma_1] \sigma_3 G(iv) \sigma_3.\end{aligned}$$

По известным значениям функции  $F_-(u')$  на  $\gamma$  формула Коши (9.3.7) дает значения  $F_+(u)$  и  $F_-(u)$  в областях  $D_+$  и  $D_-$ . После того как функции  $F_{\pm}(u)$  найдены, последняя из формул (9.3.1) дает решение модели sine-Gordon, описывающее спиновые волны в геликоидальной структуре с преобладанием эффектов дисперсии над эффектами нелинейности.

Обсудим простой пример. Пусть  $|b(u)| \ll 1$  ( $u \in \gamma$ ), тогда приближенное решение уравнения (9.3.9) можно найти методом последовательных приближений:  $F_-(\nu) = I + O(b)$ . В линейном по  $|b|$  приближении имеем

$$\tilde{F}(u) = I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} du' Y(u', u) G(u') + O(b^2).$$

Учитывая, что

$$Y(iv, iK') - Y(2K - 2K'i - iv, iK') = i \operatorname{dn}(iv, k),$$

$$G_{11}(iv) = 2 \frac{(\operatorname{dn}(iv) - 1)}{\operatorname{dn}(iv)} \operatorname{Re} [(\Psi_0(iv))_{11} (\Psi_0(iv))_{21} b^*(iv)],$$

из (9.3.1) находим:

$$\begin{aligned} \Phi - \varphi_0 \approx \frac{4}{\pi} \int_{-K'}^{K'} dv & \operatorname{Re} [(\Psi_0(iv))_{11} (\Psi_0(iv))_{21} b^*(iv)] (\operatorname{dn}(iv) - 1) + \\ & + \operatorname{Re} [(\Psi_0(iv - K))_{11} (\Psi_0(iv - K))_{21} b^*(iv - K)] \times \\ & \times (\operatorname{dn}(iv - K) - 1). \end{aligned} \quad (9.3.10)$$

Интересно, что

$$(\operatorname{dnu} - 1)(\Psi_0(u))_{11} (\Psi_0(u))_{21} = \Lambda(\chi, u) \exp(i t \operatorname{dn}(u, k)/k),$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda(\chi, u) = \frac{i}{2} \frac{|\sigma(iK')|^2 \sigma(K) \sigma(K + 2iK')}{\sigma^2(K + iK') \sigma(u - iK') \sigma(u + iK')} & \frac{\sigma(\chi + u) \sigma(\chi + 2iK' + u)}{\sigma(\chi - iK') \sigma(\chi + iK')} \times \\ & \times \exp(-\eta_3(\chi + iK' + u) - \chi[\zeta(u + iK') + \zeta(u - iK')]) \end{aligned}$$

есть решение уравнения Ламе [24], записанное в терминах сигма-функций Вейерштрасса с периодами  $[2K, 4iK']$ . Уравнение Ламе возникает при линеаризации уравнения sine-Gordon относительно фоновой структуры  $\varphi_0(\chi, k)$ :

$$\left( \partial_t^2 - \frac{1}{k^2} [\partial_{\chi}^2 - 2k^2 \operatorname{sn}^2 \chi + k^2] \right) (\Phi - \varphi_0) = 0,$$

$$[\partial_{\chi}^2 - 2k^2 \operatorname{sn}^2 \chi + k^2] \Lambda = -\varepsilon \Lambda.$$

Два слагаемых в правой части (9.3.10) соответствуют двум ветвям спектра спиновых волн в структуре [44]. Квазиимпульс  $p_{\Lambda}(u)$  функции Ламе отличается от квазиимпульса  $p(u)$  решений Йоста:

$$p_{\Lambda}(u) = 2p(u) + \pi/(2K) \pmod{\pi/K}.$$



Частота  $\omega$  спин-волновых мод соотносится со спектром  $\varepsilon$  уравнения Ламе следующим образом:

$$\omega = \sqrt{\varepsilon}/k.$$

В [5] в этом соотношении утерян множитель  $k^{-1}$ . Для активационной ветви

$$\sqrt{\varepsilon_{\text{opt}}} = \text{dn}(iv, k) = \text{sn}^{-1}(v + K', k'),$$

для бесщелевой

$$\sqrt{\varepsilon_a} = \text{dn}(iv - K, k) = k' \text{sn}(v + K', k').$$

Свойство периодичности спиральной структуры вносит в спектры спиновых волн особенности, аналогичные тем, что наблюдаются в спектре электронов проводимости в периодическом потенциале кристаллической решетки. Как и для электронов, спектр спиновых волн оказывается «полосатым». Однако, в отличие от спектра электронов, спектр спиновых волн в геликоидальной структуре имеет только две полосы. Это связано с конкретной формой потенциала решетки кинков.

Квадрат модуля функций Ламе, описывающих малоамплитудные бесщелевые моды, велик в областях локализации доменных границ структуры. В связи с этим такие типы возбуждений в теории полосовых доменных структур называют «внутриграницными» спиновыми волнами. Напротив, квадрат модуля функций Ламе активационных спиновых возбуждений велик внутри доменов. Поэтому такие возбуждения часто называют «внутридоменными» спиновыми волнами [38].

Рассмотренные задачи, в принципе, позволяют исследовать эволюцию любого начального распределения намагниченности в геликоидальной структуре с заданными граничными условиями. При этом схема интегрирования модели sine-Gordon состоит в следующем.

1. По заданному начальному распределению намагниченности находим коэффициенты  $a(u)$  и  $b(u)$  матрицы перехода.
2. Выделяем из функции  $a(u)$  ее солитонную часть:

$$a(u) = a_{\text{sol}}(u)a_0(u).$$

Используя  $a_{\text{sol}}(u)$  (9.2.1), с помощью задачи Римана с нулями строим солитонные решения  $\Psi_{\pm}^{(\text{sol})}(u, \chi, t)$  и  $\Phi_{\text{sol}}(z, t)$  системы (9.1.11) и модели sine-Gordon.

3. Полное решение системы (9.1.11) ищем в виде

$$\begin{aligned}\Psi_+(u) &= \exp\left(-\frac{i\sigma_3}{4}(\Phi - \Phi_{\text{sol}})\right) F_+(u) \Psi_+^{(\text{sol})}(u), \\ \Psi_-(u) &= \exp\left(-\frac{i\sigma_3}{4}(\Phi - \Phi_{\text{sol}})\right) F_-(u) \Psi_-^{(\text{sol})}(u) a_0(u).\end{aligned}$$

Тогда функции  $F_{\pm}(u)$  будут двоякопериодическими с периодами  $[4K, 4iK']$ , аналитическими в областях  $D_{\pm}$  и непрерывными в них вплоть до границы. Функции  $F_{\pm}(u)$  не содержат особенностей, связанных с солитонами или с геликоидальной структурой:

$$\det F_{+}(u) = a_0^*(-u^*), \quad \det F_{-}(u) = 1/a_0(u).$$

Они удовлетворяют нормировочным условиям:

$$\begin{aligned} F_{\pm}(-iK') &= F_{\pm}(-iK' + 2K) = I, \\ F_{\pm}(iK') &= F_{\pm}(iK' + 2K) = \exp\left(\frac{i\sigma_3}{2}(\Phi - \Phi_{\text{sol}})\right). \end{aligned} \quad (9.3.11)$$

В силу соотношений

$$(\Psi_{+}^{(\text{sol})}(u))^{-1} = -\frac{(\Psi_{-}^{(\text{sol})}(-u^*))^{\dagger}}{a_{\text{sol}}^*(-u^*) \det M}, \quad a_{\text{sol}}^*(-u^*)a_{\text{sol}}^*(u) = 1,$$

их расчет сводится к решению регулярной задачи Римана:

$$F_{+}(u) = F_{-}(u)(I - G(u)), \quad u \in \gamma,$$

где

$$G(u) = \Psi_{-}^{(\text{sol})}(u) \begin{pmatrix} 0 & b^*(-u^*) \\ b(u) & 0 \end{pmatrix} (\Psi_{-}^{(\text{sol})}(-u^*))^{\dagger} \frac{(dnu - 1)}{dnu}.$$

Решение такой задачи найдено в этом разделе. Используя второе из соотношений (9.3.11), с помощью функций  $F_{\pm}(u)$  находим решение начально-краевой задачи для исходной модели sine-Gordon.

#### 9.4. Дисперсионные соотношения на торе и спектр интегралов движения

*Я замечая, что все теоретики делают одно из двух, когда обнаружены новая частица или новый факт: они либо объединяются, либо испытывают «дисперсию».*

*Р. Фейнман*

Элемент  $a(u)$  матрицы перехода не зависит от времени и потому может быть использован в качестве производящей функции интегралов движения для нелинейных возмущений на фоне сверхструктуры. Наиболее информативная форма записи интегралов движения следует из дисперсионных соотношений для функции  $a(u)$ .

Функция  $a(u)$  аналитична в области  $D_-$ . Выделим из  $a(u)$  ее солитонную часть:

$$a(u) = a_{\text{sol}}(u)a_0(u). \quad (9.4.1)$$

Множитель  $a_{\text{sol}}(u)$  (9.2.1) зависит от граничных условий (9.1.9) или (9.1.10) для модели sine-Gordon. В обоих случаях функция  $a_0(u)$  в (9.4.1) будет не только аналитической в области  $D_-$ , но и не будет обращаться в нуль ни в одной точке этой области. Ее трансформационные свойства следуют из таковых для функций  $a(u)$  и  $a_{\text{sol}}(u)$ :

$$a_0(u \pm 2K) = a_0(u), \quad a_0^*[(u \pm 2iK')^*] = a_0(u), \quad a_0(\pm iK') = 1. \quad (9.4.2)$$

В рассматриваемой задаче ядро Коши, подходящее для построения дисперсионных соотношений, имеет вид дзета-функции Вейерштрасса  $\zeta(u' - u)$  с периодами  $[2K, 4iK']$ . Поясним утверждение.

Рассмотрим преобразование

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C du' \zeta(u' - u) \ln a_0(u'). \quad (9.4.3)$$

В (9.4.3) выбрано положительное направление обхода контура  $C$ , при котором охватываемая им область  $D_-$  остается слева от него (см. рис. 9.9). Подынтегральное выражение (9.4.3) аналитично в  $D_-$  всюду, за исключением простого полюса в точке  $u' = u$ . Это позволяет вычислить интеграл (9.4.3) с помощью теоремы Коши о вычетах:

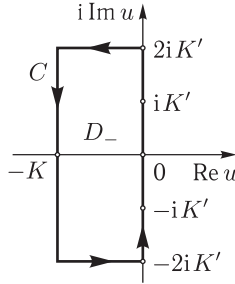
$$\ln a_0(u) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C du' \zeta(u' - u) \ln a_0(u'). \quad (9.4.4)$$

Функция  $\ln a_0(u)$  является аналитической функцией в области  $D_-$ , поэтому

$$\oint_C du \ln a_0(u) = \int_{-K'}^{K'} dv \ln \left( \frac{|a_0(iv)|^2}{|a_0(-K + iv)|^2} \right) = 0. \quad (9.4.5)$$

Второе равенство в (9.4.5) получено с использованием соотношений (9.4.2).

Хотя ядро  $\zeta(u' - u)$  в представлении (9.4.4) квазипериодично по  $u$ , свойство (9.4.5) приводит к тому, что преобразование (9.4.4), как и положено, определяет двоякопериодическую функцию  $\ln a_0(u)$ . Кроме того, поскольку  $\ln a_0(\pm iK') = 0$ , функция  $\zeta(u' \mp iK') \ln a_0(u')$  аналитична в области  $D_-$  и непрерывна вплоть до границы  $C$ . Потому, в силу теоремы Коши, интегральное представление (9.4.4) не нарушает нормировки:  $\ln a_0(\pm iK') = 0$ .

Рис. 9.9. Область  $D_-$  и контур  $C$  в комплексной  $u$ -плоскости

Пусть  $u$  стремится из области  $D_-$  к точке  $\nu \in C$ , тогда, согласно формуле Сохоцкого–Племеля, имеем:

$$\ln a_0(\nu) = \frac{\text{V.p.}}{\pi i} \oint_C du' \zeta(u' - \nu) \ln a_0(u') = \frac{\text{V.p.}}{\pi i} \oint_C du' S(u', \nu) \ln a_0(u'), \quad (9.4.6)$$

где  $S(u', u) = \zeta(u' - u) - \zeta(u' + iK')$ , периоды функции Вейерштрасса  $-2K, 4iK'$ .

Из (9.4.6) следует дисперсионное соотношение

$$\arg a_0(\nu) = -\frac{\text{V.p.}}{\pi} \oint_C du' S(u', \nu) \ln |a_0(u')|,$$

которое, в частности, позволяет выразить граничное значение функции  $\ln a_0(u)$  на вертикальных участках контура  $C$  через значение ее модуля:

$$\begin{aligned} \ln a_0(\nu) &= \ln |a_0(\nu)| + i \arg a_0(\nu) = \\ &= \ln |a_0(\nu)| + \frac{\text{V.p.}}{\pi i} \oint_C du' S(u', \nu) \ln |a_0(u')|. \end{aligned} \quad (9.4.7)$$

Повторное применение формулы Сохоцкого–Племеля позволяет аналитически продолжить равенство (9.4.7) в область  $D_-$ :

$$\ln a_0(u) = \frac{1}{\pi i} \oint_C du' S(u', u) \ln |a_0(u')|, \quad u \in D_-.$$

В результате для функции  $a(u)$  получаем интегральное представление

$$a(u) = a_{\text{sol}}(u) \exp \left( \frac{1}{2\pi i} \oint_C du' S(u', u) \ln |a_0(u')|^2 \right). \quad (9.4.8)$$

Выражения для плотностей полевого импульса  $p$  и энергии  $w$  системы имеют вид

$$p = \partial_t \Phi \partial_z \Phi, \quad w = \frac{1}{2} \left[ (\partial_t \Phi)^2 + (\partial_z \Phi)^2 \right] + q \partial_z \Phi + (1 - \cos \Phi).$$

При записи интегралов движения следует разделить вклад от неоднородного основного состояния среды (для безграничной спиральной структуры он бесконечен). При обсуждении условий устойчивости основного состояния среды обычно вычисляют усредненную по периоду структуры энергию единицы длины структуры. Но в возбужденных состояниях геликоидальная структура испытывает трансляции и теряет свойство периодичности. Поэтому возникает проблема корректного определения интегралов движения для возбуждений на фоне структуры.

Покажем, что использование функции  $a(u)$  в качестве производящей функции интегралов движения позволяет преодолеть эту трудность. Наиболее интересные интегралы движения получаются из разложений  $\ln a(u)$  вблизи особых точек  $u = \pm iK'$  системы (9.1.11). Согласно представлению (9.1.20) ряды для  $a(u)$  можно найти с помощью асимптотических разложений решения Йоста  $\Psi_1(u)$  вблизи указанных точек. Получим сначала асимптотический ряд для  $\Psi_1(u)$  при  $u = iK' + \varepsilon$  ( $|\varepsilon| \ll 1$ ) в задаче с граничными условиями (9.1.10), когда

$$\Psi_1 \rightarrow \Psi_1^{(0)} = \Psi_\Delta(u, \chi, t) \quad \text{при} \quad z \rightarrow -\infty.$$

Из определения  $\varphi_0(\chi)$  и тождества (9.2.8) следует соотношение

$$\begin{aligned} \exp \left[ \frac{i\sigma_3}{4} (\pi + \varphi_0(\chi)) \right] = \\ = \text{diag} \left( \sqrt{\frac{\sigma(\chi + iK')}{\sigma(\chi - iK')}} \exp \left( -\frac{\eta_3 \chi}{2} \right), \sqrt{\frac{\sigma(\chi - iK')}{\sigma(\chi + iK')}} \exp \left( \frac{\eta_3 \chi}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

С его помощью придадим функции  $\Psi_\delta$  вид, удобный для дальнейших расчетов:

$$\begin{aligned} \Psi_\delta = \exp \left[ \frac{i}{4} (\varphi_0(\chi + \delta) + \pi) \sigma_3 \right] \times \\ \times \left( \begin{array}{cc} \frac{\sigma(\chi + \delta + u)}{\sigma(\chi + \delta + iK')} & i \frac{\sigma(\chi + \delta + 2iK' - u)}{\sigma(\chi + \delta + iK')} e^{\eta_3(u - iK')} \\ i \frac{\sigma(\chi + \delta + u - 2iK')}{\sigma(\chi + \delta - iK')} e^{\eta_3(u - iK')} & \frac{\sigma(\chi + \delta - u)}{\sigma(\chi + \delta - iK')} \end{array} \right) \times \\ \times \frac{|\sigma(iK')|}{\sqrt{2}\sigma(u)} \exp \left( -\frac{\chi \sigma_3}{2} [\zeta(u + iK') + \zeta(u - iK') - \eta_3] + \frac{\eta_3 \delta}{2} \sigma_3 + \frac{i t \, \text{dn} u}{2k} \sigma_3 \right). \end{aligned}$$

Функция  $\Psi_\delta$  ( $\varphi_0(\chi + \delta)$ ) совпадает с  $\Psi_1^{(0)}$  ( $\varphi_1^{(0)}$ ) при  $\delta = \Delta$  и с  $\Psi_2^{(0)}$  ( $\varphi_2^{(0)}$ ) при  $\delta = 0$ .

Запишем асимптотическое разложение  $\Psi_1(u)$  так, чтобы при построении рядов по степеням  $\varepsilon$  для  $a(u)$  сокращались лишние множители в представлении (9.1.20). Для этого будем искать  $\Psi_1$  в виде

$$\Psi_1 = \exp\left(\frac{i\Phi\sigma_3}{4}\right) \tilde{\Psi}_1^{(0)}, \quad \tilde{\Psi}_1^{(0)} \equiv \exp\left(-\frac{i\varphi_1^{(0)}\sigma_3}{4}\right) \Psi_1^{(0)}.$$

Тогда из (9.1.11) следует уравнение для расчета  $g$ :

$$\partial_z g = Lg - gL_0. \quad (9.4.9)$$

Здесь  $L_0$  получается из  $L$  заменой  $\Phi \rightarrow \varphi_1^{(0)}$  ( $\partial_t \varphi_1^{(0)} = 0$ ),

$$L = \frac{i}{4} [(\partial_t \Phi - \partial_z \Phi) \sigma_3 + (w_2 - w_1) \sigma_1 + (w_1 + w_2) (\cos \Phi \sigma_1 + \sin \Phi \sigma_2)].$$

Матричная функция  $g$  должна удовлетворять условию:  $g \rightarrow I$  при  $z \rightarrow -\infty$ . Решение уравнения (9.4.9) ищем в виде ряда по степеням  $\varepsilon = u - iK'$ :

$$g = I + \sum_{n=1}^{+\infty} g_n \varepsilon^n,$$

где  $g_n \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow -\infty$ . Используя разложение  $g_n$  по матрицам Паули, находим

$$\Psi_1 = \exp\left(\frac{i\Phi\sigma_3}{4}\right) [I + \varepsilon(b_1\sigma_1 + c_1\sigma_2) + O(\varepsilon^2)] \tilde{\Psi}_1^{(0)},$$

где

$$b_1 = \frac{k}{8} \int_{-\infty}^z dz' \left( \cos \varphi_1^{(0)} - \cos \Phi + \frac{1}{2} [(\partial_t \Phi - \partial_{z'} \Phi)^2 - (\partial_{z'} \varphi_1^{(0)})^2] \right),$$

$$c_1 = \frac{k}{4} [\partial_t \Phi - \partial_z (\Phi - \varphi_1^{(0)})].$$

Для получения разложения функции  $a(u)$  по степеням  $\varepsilon$  достаточно разложить в (9.1.20) предэкспоненциальные множители в выражениях для  $(\Psi_2^{(0)})^{-1}$  и  $\Psi_1^{(0)}$  по формуле

$$\sigma(\alpha + \varepsilon) = \sigma(\alpha) [1 + \zeta(\alpha)\varepsilon + O(\varepsilon^2)].$$

После простых вычислений находим:

$$a(iK' + \varepsilon) \approx \exp\left(\frac{\eta_3 \Delta}{2}\right) \left(1 + \varepsilon \lim_{z \rightarrow +\infty} [f(\chi) + b_1(z)]\right),$$

$$f(\chi) = \frac{1}{2} [\zeta(\chi + \Delta + iK') + \zeta(\chi + \Delta - iK') - \zeta(\chi + iK') - \zeta(\chi - iK')]. \quad (9.4.10)$$

Изложенная процедура обеспечивает сходимость выражения (9.4.10), поскольку

$$\begin{aligned} \frac{k}{8} \int_{-\infty}^z dz' \left( \cos \varphi_1^{(0)} - \cos \varphi_2^{(0)} + \frac{1}{2} \left[ \left( \partial_{z'} \varphi_2^{(0)} \right)^2 - \left( \partial_{z'} \varphi_1^{(0)} \right)^2 \right] \right) = \\ = -f(\chi) + \text{const.} \end{aligned}$$

В дальнейших расчетах используем тождество

$$\zeta(u) = \frac{Z(u)}{2} + \frac{\text{cnu}}{2 \text{snu}} (1 + \text{dnu}) + \frac{\eta_1 u}{K}, \quad (9.4.11)$$

которое доказывается разложением по полюсам его правой части. Аддитивная постоянная фиксируется условием  $\zeta(K) = \eta_1$ . С учетом (9.4.11) получаем

$$f(\chi) = \frac{1}{2} \left[ Z(\chi + \Delta) - Z(\chi) + \frac{2\eta_1 \Delta}{K} \right].$$

Пусть длина магнитной спирали равна  $2R$  ( $|z| \leq R = 2kKn$ ,  $n \gg 1$  — целое число). Тогда (9.4.10) примет вид

$$\begin{aligned} a(iK' + \varepsilon) = \exp \left( \frac{\eta_3 \Delta}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \left[ Z(\Delta) + \frac{2\eta_1 \Delta}{K} \right] + \right. \\ \left. + \frac{k\varepsilon}{8} \int_{-R}^R dz \left[ \cos \varphi_1^{(0)} - \cos \Phi + \frac{1}{2} \left( (\partial_t \Phi - \partial_z \Phi)^2 - (\partial_z \varphi_1^{(0)})^2 \right) \right] + O(\varepsilon^2) \right). \end{aligned}$$

В окрестности точки  $u = -iK'$  асимптотическое разложение функции  $\Psi_1$  следует искать в виде

$$\Psi_1 = \exp \left( -\frac{i\Phi\sigma_3}{4} \right) g \exp \left( \frac{i\varphi_1^{(0)}\sigma_3}{4} \right) \Psi_1^{(0)}.$$

Аналогичные вычисления дают

$$\begin{aligned} a(-iK' + \varepsilon) = \exp \left( -\frac{\eta_3 \Delta}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \left[ Z(\Delta) + \frac{2\eta_1 \Delta}{K} \right] + \right. \\ \left. + \frac{k\varepsilon}{8} \int_{-R}^R dz \left[ \cos \varphi_1^{(0)} - \cos \Phi + \frac{1}{2} \left( (\partial_t \Phi + \partial_z \Phi)^2 - (\partial_z \varphi_1^{(0)})^2 \right) \right] + O(\varepsilon^2) \right). \end{aligned}$$

Под энергией локализованных нелинейных возбуждений будем понимать разность полной энергии системы и энергии фоновой структуры:

$$\begin{aligned} H &= \frac{4}{k} \left( Z(\Delta) + \frac{2\eta_1 \Delta}{K} \right) + \int_{-R}^R dz \left( \cos \varphi_1^{(0)} - \cos \Phi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left[ (\partial_t \Phi)^2 + (\partial_z \Phi)^2 - (\partial_z \varphi_1^{(0)})^2 \right] + q \left( \partial_z \Phi - \partial_z \varphi_1^{(0)} \right) \right) = \\ &= \frac{4}{k} \frac{d}{d\varepsilon} \ln [a(iK' + \varepsilon)a(-iK' + \varepsilon)] \Big|_{\varepsilon=0} + \frac{8E}{\pi k} \operatorname{am}(\Delta, k). \quad (9.4.12) \end{aligned}$$

При записи последнего слагаемого в (9.4.12) учтен явный вид функций  $\varphi_{1,2}^{(0)}$  и соотношение  $q = 4E/(\pi k)$ .

При выполнении дифференцирования по  $\varepsilon$  в (9.4.12) используем представление (9.4.8) функции  $a(u)$  и соотношения (9.4.5), (9.4.11). На горизонтальных участках контура  $C$  подынтегральная функция в (9.4.8) принимает одинаковые значения. Поскольку эти участки при вычислении интеграла по параметру  $u$  проходятся в противоположных направлениях, их вклады в интеграл компенсируются. Поэтому в (9.4.8) остается интегрирование только по вертикальным участкам

$$C_1 = \{u' = iv, \quad -2K' \leq v \leq 2K'\}$$

и

$$C_2 = \{u' = iv - K, \quad -2K' \leq v \leq 2K'\}$$

контура  $C$ . На отрезках  $C_1$  и  $C_2$  с учетом редукций условие унимодулярности матрицы перехода (9.1.15) приобретает вид

$$|a_0(u)|^2 = 1 - b(u)b^*(-u^*),$$

где

$$b(u)b^*(-u^*) = \begin{cases} |b(u)|^2, & u \in C_1, \\ -|b(u)|^2 e^{2\eta_1 \Delta}, & u \in C_2. \end{cases}$$

В конечном счете получаем:

$$\begin{aligned} \frac{4}{k} \frac{d}{d\varepsilon} \ln [a(iK' + \varepsilon)a(-iK' + \varepsilon)] &= \\ &= \int_{-K'}^{K'} dv [\varepsilon_a(v)n_a(v) + \varepsilon_{\text{opt}}(v)n_{\text{opt}}(v)] - \\ &\quad - \frac{8}{k} \left( \sum_{p=1}^{2M} \operatorname{Re} \left[ Z(\nu_p) + \frac{2\eta_1 \nu_p}{K} \right] + 2 \sum_{s=1}^N \operatorname{Re} \left[ Z(\mu_s) + \frac{2\eta_1 \mu_s}{K} \right] \right). \quad (9.4.13) \end{aligned}$$



Величины  $\varepsilon_a(n_a)$  и  $\varepsilon_{\text{opt}}(n_{\text{opt}})$  определяют спектр (плотность) квазиакустических и квазиоптических спин-волновых мод в спиральной структуре:

$$\varepsilon_a(v) = k'^2 \text{sn}^2(v + K', k'), \quad n_a(v) = \frac{4}{\pi k} \ln(1 + |b(-K + iv)|^2 e^{2\eta_1 \Delta}) > 0;$$

$$\varepsilon_{\text{opt}}(v) = \frac{1}{\text{sn}^2(v + K', k')}, \quad n_{\text{opt}}(v) = -\frac{4}{\pi k} \ln(1 - |b(iv)|^2) > 0.$$

Из-за образования солитонов сверхструктура сжимается вдоль оси  $Oz$  на величину  $k\Delta$ . Это обстоятельство проявляется в изменении плотности квазиакустических мод, а также в изменении энергии сверхструктуры, которое учитывается последним слагаемым в (9.4.12). Дискретные слагаемые (9.4.13) соответствуют энергиям кинков и бризеров в спиральной структуре.

Полевой импульс солитонов и спин-волновых мод в задаче с граничными условиями (9.1.10) определяется выражением

$$P = \int_{-R}^R dz \partial_t \Phi \partial_z \Phi = \frac{4}{k} \frac{d}{d\varepsilon} \ln \frac{a(-iK' + \varepsilon)}{a(iK' + \varepsilon)} \Big|_{\varepsilon=0}.$$

Отсюда, учитывая (9.4.11) и тождество:

$$\zeta(\mu - iK') - \zeta(\mu + iK') + \eta_3 = i \, \text{dn} \mu,$$

находим:

$$P = \int_{-K'}^{K'} dv [p_a(v)n_a(v) + p_{\text{opt}}(v)n_{\text{opt}}(v)] -$$

$$- \frac{8}{k} \left( \sum_{p=1}^{2M} \text{Im}(\text{dn} \nu_p) + 2 \sum_{s=1}^N \text{Im}(\text{dn} \mu_s) \right), \quad (9.4.14)$$

где  $p_a$  и  $p_{\text{opt}}$  — полевые импульсы бесщелевых и активационных спин-волновых мод:

$$p_a(v) = k' \text{dn}(v + K', k') \text{cn}(v + K', k'),$$

$$p_{\text{opt}}(v) = -\frac{\text{dn}(v + K', k') \text{cn}(v + K', k')}{\text{sn}^2(v + K', k')}.$$

В спектральных разложениях интегралов движения удалось полностью разделить вклады двух независимых типов коллективных возбуждений на фоне геликоидальной структуры: солитонов и спиновых волн. Законы дисперсии спиновых волн в геликоидальных структурах

обычно записывают в терминах блоховского квазиимпульса функций Ламе [5]. Соответствующие зависимости оказываются трансцендентными. Полученные результаты показывают, что квазиимпульс решений уравнения Ламе отличается от полевого импульса спин-волновых мод. В терминах полевого импульса законы дисперсии спиновых волн приобретают простой вид и становятся алгебраическими (рис. 9.10):

$$\varepsilon_a(p_a) = \frac{1}{2} \left( 1 + k'^2 - \sqrt{k^4 + 4p_a^2} \right), \quad |p_a| \leq k';$$

$$\varepsilon_{\text{opt}}(p_{\text{opt}}) = \frac{1}{2} \left( 1 + k'^2 + \sqrt{k^4 + 4p_{\text{opt}}^2} \right), \quad -\infty \leq p_{\text{opt}} \leq +\infty.$$

Вычисление интегралов движения в задаче с граничными условиями (9.1.9) мало отличается от приведенных расчетов. В этом случае геликоидальная структура содержит нечетное число кинков, поэтому окончательные формулы для энергии и импульса коллективных возбуждений получаются из (9.4.12), (9.4.13) и (9.4.14) после замен  $2M \rightarrow 2M + 1$ ,  $\text{am}\Delta \rightarrow \text{am}\Delta - \pi\sigma$ .

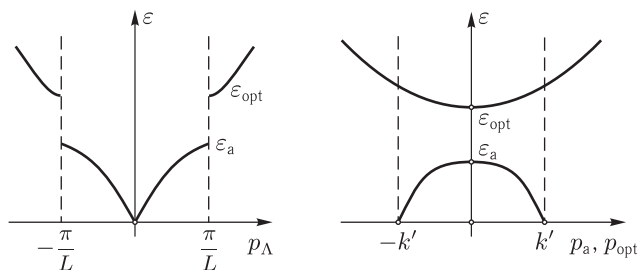


Рис. 9.10. Законы дисперсии спиновых волн в геликоидальной структуре в терминах квазиимпульса функций Ламе (слева) и импульса спиновых волн (справа)

В заключение главы подведем ее итоги, чтобы необходимая, но достаточно утомительная расчетная часть не заслонила полученных результатов.

Мы решили начально-краевую задачу для модели (9.1) и установили, что возможные нелинейные возбуждения спиральной магнитной структуры делятся на два принципиально разных класса.

В первый из них попадают ранее неизученные структурно устойчивые солитоны — лишние кинки и бризеры в решетке кинков сверхструктуры. Их образование и движение всегда сопровождается локальными трансляциями спиральной (полосовой доменной) структуры. Найдены формулы, связывающие параметры солитонов со сдвигами спиральной структуры. Эти результаты можно использовать в целях диагностики солитонов или при конструировании переключающих устройств.

Макроскопические сдвиги спиральной структуры при движении в ней солитонов можно визуализировать магнитооптическими методами. Вблизи фазового перехода несоизмеримость/соизмеримость скоростью движения кинков в спиральной структуре можно управлять, меняя температуру образца или внешнее магнитное поле, перпендикулярное оси спирали. Это позволяет оптимизировать условия их наблюдения.

Бризеры в спиральной структуре можно обнаружить по резонансному поглощению СВЧ-мощности на характерных частотах внутренних мод бризеров.

Второй класс нелинейных возбуждений включает спин-волновые импульсы, образование которых не сопровождается макроскопическими сдвигами фоновой структуры. Намагниченность в импульсах совершает нелинейные колебания относительно неоднородного состояния среды, соответствующего равновесной спиральной (полосовой доменной) структуре. Интенсивность взаимодействий в импульсах недостаточна для их стабильности, поэтому, в отличие от солитонов, даже первоначально локализованные импульсы расплываются с течением времени из-за эффектов дисперсии. Мы показали, что малоамплитудные импульсы теоретически описываются в виде суперпозиций хорошо известных линейных спиновых волн геликоидальной структуры.

Указанные коллективные возбуждения образуют полный набор нелинейных мод модулированной структуры. Интегралы движения любого локализованного распределения намагниченности в спиральной структуре записываются в виде сумм независимых вкладов только от этих мод.

# Приложение

## ТЕХНИКА РАБОТЫ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

*Они все отправились искать полюс... «Это как раз то, что стоит открыть», — сказали мне.*

*А. Милн. «Винни-Пух»*

Основные положения теории эллиптических функций подробно изложены в книге [1]. Приведем ряд полезных выводов этой теории.

Согласно теореме Якоби не существует отличной от константы однозначной аналитической функции с  $n \geq 3$  примитивными периодами. С двумя заданными примитивными периодами  $2\omega$  и  $2\omega'$  отличная от константы функция существует в том и только в том случае, когда отношение этих периодов не вещественно:

$$\operatorname{Im} \left( \frac{\omega'}{\omega} \right) \neq 0.$$

Под эллиптическими функциями понимают двоякопериодические функции  $f(u)$ , единственными особенностями которых в любой конечной части  $u$ -плоскости могут быть лишь полюсы.

При изучении эллиптической функции  $f(u)$  можно ограничиться ее рассмотрением в каком-нибудь параллелограмме периодов. Далее считаем, что из двух параллельных сторон параллелограмму принадлежит лишь одна.

*Сумма вычетов эллиптической функции относительно всех полюсов, лежащих в параллелограмме периодов, равна нулю.* Подчеркнем, что нужно взять все полюсы в параллелограмме, в том числе и те, что лежат на его границе.

Будем называть две точки  $u_1$  и  $u_2$  сравнимыми по модулю периодов (или эквивалентными), если

$$u_1 - u_2 = 2m\omega + 2m'\omega',$$

где  $m, m'$  — целые числа, и будем писать

$$u_1 = u_2 \pmod{(2\omega, 2\omega')}.$$

Условимся называть  $\alpha$ -точками функции  $f(u)$  те точки, в которых функция принимает значение  $\alpha$ :  $f(u) = \alpha$ .

Для эллиптических функций справедливы следующие фундаментальные теоремы Лиувилля.

1. Правильно подсчитанное (т. е. подсчитанное с учетом кратности) число полюсов отличной от константы эллиптической функции в параллелограмме периодов равно правильно подсчитанному числу  $\alpha$ -точек, каково бы ни было  $\alpha$ .
2. Не существует отличной от константы эллиптической функции, регулярной в параллелограмме периодов.
3. Число полюсов эллиптической функции в параллелограмме периодов, подсчитанное с учетом кратности (его называют порядком эллиптической функции), не может быть меньше чем два.
4. Сумма  $\alpha$ -точек функции  $f(u)$  при любом  $\alpha$  сравнима по модулю периодов с суммой полюсов этой функции, если рассматриваются все  $\alpha$ -точки, принадлежащие одному параллелограмму периодов.

Все теоретические построения, связанные с эллиптическими функциями, проще проводить в терминах функций Вейерштрасса. Приведем их определения и основные свойства.

Сигма-функция Вейерштрасса определяется бесконечным произведением

$$\sigma(u) = u \prod_{m, m'}' \left(1 - \frac{u}{s}\right) \exp \left[ \frac{u}{s} + \frac{u^2}{2s^2} \right], \quad s = 2m\omega + 2m'\omega'.$$

Произведение распространяется на все целые числа  $m, m'$ , кроме пары  $m = m' = 0$ . Это обстоятельство отмечается штрихом у знака произведения.

Как видим,  $\sigma(u)$  — целая функция, имеющая лишь простые нули, лежащие в вершинах сетки периодов:

$$u = 2m\omega + 2m'\omega'. \quad (\text{П.1})$$

Сигма-функция нечетна:

$$\sigma(-u) = -\sigma(u).$$

Дзета-функция Вейерштрасса является аналитической функцией с простыми полюсами:

$$\zeta(u) = \frac{d}{du} \ln \sigma(u) = \frac{1}{u} + \sum_{m, m'}' \left( \frac{1}{u-s} + \frac{1}{s} + \frac{u}{s^2} \right),$$

и она нечетна:

$$\zeta(-u) = -\zeta(u).$$

Функция Вейерштрасса  $\wp(u)$  определяется сходящимся рядом:

$$\wp(u) = -\frac{d}{du} \zeta(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{m, m'}' \left[ \frac{1}{(u-s)^2} - \frac{1}{s^2} \right],$$

который показывает, что единственные особенности функции  $\wp(u)$  — это полюсы второго порядка в точках (П.1). Функция  $\wp(u)$  является четной:

$$\wp(-u) = \wp(u).$$

Трансформационные свойства функций Вейерштрасса обычно записывают в симметричной форме с помощью обозначений:

$$\omega_1 = \omega, \quad \omega_2 = -\omega - \omega', \quad \omega_3 = \omega'; \quad \eta_\alpha = \zeta(\omega_\alpha), \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Константы  $\eta_\alpha$  удовлетворяют следующим тождествам:

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0, \quad \eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = i\pi/2. \quad (\text{П.2})$$

Функция  $\wp(u)$  оказывается двоякопериодической, а функции  $\sigma(u)$  и  $\zeta(u)$  — квазипериодичны

$$\begin{aligned} \wp(u + 2\omega_\alpha) &= \wp(u), \\ \zeta(u + 2\omega_\alpha) &= \zeta(u) + 2\eta_\alpha, \\ \sigma(u + 2\omega_\alpha) &= -\sigma(u) \exp[2\eta_\alpha(u + \omega_\alpha)]. \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Функция  $\wp(u)$  удовлетворяет алгебраическому дифференциальному уравнению

$$\partial_u \wp(u) = -2\sqrt{(\wp(u) - e_1)(\wp(u) - e_2)(\wp(u) - e_3)}. \quad (\text{П.4})$$

Здесь  $e_\alpha = \wp(\omega_\alpha)$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ), а квадратный корень выбран так, чтобы главная часть функции  $\partial_u \wp(u)$  вблизи точки  $u = 0$  была равна  $-2u^{-3}$ .

Квадратный корень в правой части равенства (П.4) «извлекается», так как множители  $\wp(u) - e_\alpha$  имеют полюсы второго порядка во всех точках, эквивалентных точке  $u = 0$ , и нули второго порядка во всех точках, эквивалентных точкам  $u = \omega_\alpha$ .

Числа  $e_\alpha$  удовлетворяют соотношению:  $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ .

В силу уравнения (П.4), любая производная от  $\wp$ -функции выражается рационально через мероморфные функции  $\wp(u)$  и  $\partial_u \wp(u)$ .

Напомним, что всякая рациональная функция  $R(z)$  допускает следующие два представления:

$$R(z) = c \frac{(z - b_1)(z - b_2) \dots (z - b_m)}{(z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_n)}; \quad R(z) = E(z) + \sum_{i,k} \frac{A_k^{(i)}}{(z - a_k)^i},$$

где  $c$ ,  $b_i$ ,  $a_k$ ,  $A_k^{(i)}$  — константы, а  $E(z)$  — многочлен, так называемая целая часть функции  $R(z)$ . Каждое из этих представлений дает определенную информацию относительно функции  $R(z)$ . Из первого представления видно, каковы нули и полюсы функции  $R(z)$ , а второе представление, которым всегда пользуются в интегральном исчислении, дает главную часть функции  $R(z)$  для каждого ее полюса.

Важно, что аналогичные представления допускает любая эллиптическая функция. Разложение эллиптической функции на «множители» имеет вид

$$f(u) = c_1 \frac{\sigma(u - b_1)\sigma(u - b_2)\dots\sigma(u - b_n)}{\sigma(u - a_1)\sigma(u - a_2)\dots\sigma(u - a_n)}. \quad (\text{П.5})$$

В формуле (П.5) каждый нуль и полюс повторяется столько раз, какова его кратность. По теоремам 1 и 4 Лиувилля

$$a_1 + a_2 + \dots a_n = b_1 + b_2 + \dots b_n \pmod{(2\omega, 2\omega')}.$$

Разложение эллиптической функции  $f(u)$  на «простейшие дроби» есть

$$f(u) = c_2 + \sum_{k=1}^n A_k \zeta(u - a_k) + \sum_{k,r (r \geq 2)} A_k^{(r-1)} \wp^{(r-2)}(u - a_k). \quad (\text{П.6})$$

В представлении (П.6) числа  $A_k, A_k^{(r-1)}$  характеризуют главную часть функции  $f(u)$  вблизи полюса  $u = a_k$ :

$$f \approx \frac{A_k}{u - a_k} + \sum_{r=2}^{m_k} \frac{(-1)^r (r-1)! A_k^{(r-1)}}{(u - a_k)^r}.$$

Еще раз напомним, что сумма вычетов любой эллиптической функции всегда равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n A_k = 0.$$

В формулах (П.5), (П.6) постоянные  $c_1, c_2$  определяются по известному значению функции  $f(u)$  в какой-нибудь точке. Отметим, что постоянную  $c_2$  в разложении (П.6) часто можно найти, используя заранее известные свойства симметрии функции  $f(u)$ .

Представления (П.5), (П.6) чрезвычайно полезны при алгебраических вычислениях с эллиптическими функциями. Проиллюстрируем их эффективность на конкретных примерах.

Упростим выражение

$$\Delta(u) = \Delta(\lambda(u), \tau(u)) = \frac{\tau - (w_3 \cos \theta_0 - p/2)}{w_1 \sin \theta_0}, \quad (\text{П.7})$$

которое входит в формулы (3.7.7), определяющие «затравочные» функции  $\chi_{1,2}^{(0)}$ .

Специально отметим, что в задаче о взаимодействии доменной стенки со спиновой волной используются функции от спектрального параметра  $u$ , которые имеют нули и полюсы в точках:

$$u = \pm iK' - K/2, \quad \pm iK' + K/2.$$

В разд. 3.7 показано, что появление таких выделенных точек связано с группой редукций задачи Римана. Для проведения конкретных расчетов полезно знать значения функций  $\lambda = \lambda(u)$  и  $\tau = \tau(u)$  в указанных точках:

$$\begin{aligned}\lambda(iK' + K/2) &= \lambda(iK' - K/2) = i, \\ \lambda(-iK' + K/2) &= \lambda(-iK' - K/2) = -i, \\ \tau(iK' + K/2) &= -\tau(iK' - K/2) = (-p + i\beta \cos \theta_0)/2, \\ \tau(-iK' - K/2) &= -\tau(-iK' + K/2) = (p + i\beta \cos \theta_0)/2.\end{aligned}\tag{П.8}$$

Используя формулы (П.8), нетрудно проверить, что функция

$$\tau(u) - [w_3(u) \cos \theta_0 - p/2]\tag{П.9}$$

имеет двукратные нули в точках

$$u = \pm iK' + K/2 \pmod{2K, 4iK'},$$

а функция

$$w_1(u) = \beta[\lambda(u) + \lambda^{-1}(u)]/4\tag{П.10}$$

имеет простые нули при

$$u = \pm iK' + K/2, \quad \pm iK' - K/2 \pmod{2K, 4iK'}.$$

Полюсы функций (П.9) и (П.10) совпадают и потому не дают вклада в отношение (П.7).

Применяя теорему о разложении эллиптической функции «на множители», получаем представление

$$\Delta(u) = c \frac{\sigma(u - iK' - K/2) \sigma(u + iK' - K/2)}{\sigma(u + iK' + K/2) \sigma(u - iK' + K/2)} \exp(2\eta_1 u).\tag{П.11}$$

Здесь сигма-функции имеют периоды  $2K, 4iK'$ . Значение постоянной  $c = 1$  находим из условия совпадения левой и правой частей равенства при  $u = 0$ .

С другой стороны, мероморфная функция  $\operatorname{dn}(u + K/2)$  имеет точно такие же примитивные периоды, нули и полюсы, что и функция  $\Delta(u)$  (П.11). Отсюда, в свою очередь, получаем еще одно представление:

$$\Delta(u) = c_1 \operatorname{dn}(u + K/2).$$

Коэффициент пропорциональности  $c_1 = (k')^{-1/2}$  находим из условия нормировки равенства в точке  $u = 0$ . В результате имеем

$$\Delta(u) = \frac{\operatorname{dn}(u + K/2)}{\sqrt{k'}}.\tag{П.12}$$



Доказательство тождества (П.12) с привлечением стандартных формул [2] для функций Якоби оказывается утомительным. При этом заранее неясно, какая форма записи функций Якоби приведет к упрощению исходного выражения.

Разложение (П.11) позволяет найти еще одно представление для функции  $\Delta(u)$ , которое значительно упрощает процедуру «одевания» в п.3.7:

$$\Delta(u) = \frac{\beta(u)}{\beta(-u)}, \quad \beta(u) = c_1 \frac{\sigma(u + iK' - K/2)}{\sigma(u + iK' + K/2)} \exp(\eta_1 u).$$

Множитель  $c_1$  может быть произвольным.

Используя трансформационные свойства сигма-функций (П.3) и второе тождество (П.2) (соотношение Лежандра), нетрудно проверить, что

$$\beta(u + 2K) = \beta(u), \quad \beta(u + 4iK') = -\beta(u). \quad (\text{П.13})$$

Иными словами, примитивными периодами функций  $\beta(u)$  и  $\beta(-u)$  будут  $2K$ ,  $8iK'$ . Поэтому их разложение на множители правильнее записывать в терминах сигма-функций с периодами  $2K$ ,  $8iK'$ :

$$\beta(u) = c \frac{\sigma(u + iK' - K/2) \sigma(u - 3iK' - K/2)}{\sigma(u + iK' + K/2) \sigma(u - 3iK' + K/2)} \exp(2\eta_1 u).$$

Здесь  $\eta_1 = \zeta(K|K, 4iK')$ ,  $\sigma(u) = \sigma(u|K, 4iK')$ , после вертикальной черты иногда указывают половинки примитивных периодов.

В фундаментальном прямоугольнике со сторонами  $2K$ ,  $8iK'$  функция  $\beta(u)$  имеет лишь два простых полюса. Отсюда следует, что вычеты функции  $\beta(u)$  в этих полюсах должны отличаться знаком. Поскольку функция  $\beta(u)$  определена с точностью до постоянного множителя, можно выбрать его так, чтобы вычеты были равны  $\pm 1$ . Тогда, по теореме о разложении эллиптической функции на простые дроби, имеем

$$\beta(u) = \zeta(u + iK' + K/2) - \zeta(u - 3iK' + K/2) + c.$$

Здесь периоды дзета-функций суть  $2K$ ,  $8iK'$ . Постоянную  $c$  найдем с помощью второго условия симметрии (П.13) функции  $\beta(u)$ . Учитывая квазипериодичность дзета-функций (П.3), получим

$$\beta(u) = \zeta(u + iK' + K/2) - \zeta(u - 3iK' + K/2) - \eta_3. \quad (\text{П.14})$$

Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы переписать представление (П.14) в терминах функций Якоби. Примитивными периодами всех трех функций Якоби:  $\operatorname{sn} u$ ,  $\operatorname{cn} u$ ,  $\operatorname{dn} u$  будут  $4K$ ,  $4iK'$ . В то же время элементарная ячейка функции  $\beta(u)$  представляет прямоугольник со сторонами  $2K$ ,  $8iK'$ . Согласовать свойства периодичности функций можно, например, в пределах фундаментального прямоугольника

со сторонами  $8K, 8iK'$ . Поэтому заменим представление (П.14) функции  $\beta(u)$  ее разложением по дзета-функциям с периодами  $8K, 8iK'$ , которое находится аналогично:

$$\beta(u) = \sum_{\alpha=1}^4 [\zeta(\nu_{\alpha} + 4iK' | 4K, 4iK') - \zeta(\nu_{\alpha} | 4K, 4iK') - \zeta(4iK' | 4K, 4iK')]. \quad (\text{П.15})$$

Здесь  $\nu_1 = -u - iK' - 5K/2$ ,  $\nu_2 = -u - iK' - K/2$ ,  $\nu_3 = -u - iK' + 3K/2$ ,  $\nu_4 = -u - iK' + 7K/2$ .

Для дзета-функций с периодами  $2\omega_{\alpha}$  справедливы следующие формулы [2]:

$$\zeta(z \pm \omega_{\alpha}) - \zeta(z) \mp \eta_{\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \ln[\wp(z) - e_{\alpha}].$$

Поскольку только такие комбинации дзета-функций входят в разложение (П.15), проблема перехода в формуле (П.15) к функциям Якоби сводится к задаче перехода от  $\wp$ -функций Вейерштрасса к функциям Якоби. Оказывается [2], что

$$e_1 : e_2 : e_3 = (2 - k^2) : (2k^2 - 1) : (-1 - k^2)$$

и

$$\operatorname{sn}(u, k) = \sqrt{\frac{e_1 - e_3}{\wp(z) - e_3}}, \quad \operatorname{cn}(u, k) = \sqrt{\frac{\wp(z) - e_1}{\wp(z) - e_3}}, \quad \operatorname{dn}(u, k) = \sqrt{\frac{\wp(z) - e_2}{\wp(z) - e_3}},$$

где  $z = u(e_1 - e_3)^{-1/2}$ .

В силу однородности функций Вейерштрасса:

$$\begin{aligned} \partial_{tz} \wp(tz | t\omega, t\omega') &= t^{-3} \partial_z \wp(z | \omega, \omega'), & \wp(tz | t\omega, t\omega') &= t^{-2} \wp(z | \omega, \omega'), \\ \zeta(tz | t\omega, t\omega') &= t^{-1} \zeta(z | \omega, \omega'), & \sigma(tz | t\omega, t\omega') &= t \sigma(z | \omega, \omega'), \end{aligned}$$

выбор коэффициента пропорциональности между переменными  $z$  и  $u$  при конкретных расчетах обычно не вызывает затруднений. В нашем случае имеем

$$\begin{aligned} &\zeta(\nu/2 + 2iK' | 2K, 2iK') - \zeta(\nu/2 | 2K, 2iK') - \\ &- \zeta(2iK' | 2K, 2iK') = -\frac{1}{2} \frac{\operatorname{cn}(\nu/4, k) \operatorname{dn}(\nu/4, k)}{\operatorname{sn}(\nu/4, k)}. \end{aligned} \quad (\text{П.16})$$

В конечном счете в справедливости формулы (П.16) проще убедиться проверкой: сравнением свойств симметрии и вычетов в полюсах левой и правой частей равенства.

После преобразований разложения (П.15) с использованием тождества (П.16) и стандартных формул для функций Якоби [2] получаем

$$\beta(u) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\operatorname{cn}(\nu, k)}{\operatorname{sn}(\nu, k)} - k' \frac{\operatorname{sn}(\nu, k)}{\operatorname{cn}(\nu, k)} \right] \bigg|_{\nu=(u+iK'+K/2)/2}.$$

Аналогичным образом можно доказать следующие полезные соотношения:

$$\begin{aligned}
 \beta(u)\beta^*(u^*) &= \frac{(1+k')}{2} \operatorname{dn}(u + K/2) = \frac{\sqrt{k'}}{2} (1+k') \frac{\beta(u)}{\beta(-u)}, \\
 \beta(-u)\beta^*(u^*) &= \beta^*(-u^*)\beta(u) = \frac{\sqrt{k'}}{2} (1+k'), \\
 \beta(u)\beta(-u) &= \frac{\sqrt{k'}}{2} (1+k') \left( \frac{i+1}{i-1} \right) \left( \frac{\operatorname{dn}u - i\sqrt{k'}}{\operatorname{dn}u + i\sqrt{k'}} \right) \equiv \\
 &\equiv -\frac{i}{2} \sqrt{k'} (1+k') (\operatorname{sn}\nu - i \operatorname{cn}\nu) (\operatorname{sn}w - i \operatorname{cn}w) \Big|_{\nu=u+K/2, w=-u+K/2}.
 \end{aligned}
 \tag{П.17}$$

## Список литературы

### К главе 1

1. *Туров Е.А.* Физические свойства магнитоупорядоченных кристаллов. — М.: Издательство АН СССР, 1963. — 224 с.  
*Turov E.A.* Physical properties of magnetically ordered crystals. — New York, London: Academic Press, 1965. — 222 p.
2. *Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В.* Спиновые волны. — М.: Наука, 1967. — 368 с.
3. *Туров Е.А., Колчанов А.В., Меньшенин В.В., Мирсаев И.Ф., Николаев В.В.* Симметрия и физические свойства антиферромагнетиков. — М.: Физматлит, 2001. — 560 с.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика, ч. 2. — М.: Наука, 1978. — 448 с.
5. *Игнатченко В.А.* Граничные условия для магнитных и магнитоупругих систем // ФММ. 1973. Т.36, №6. С. 1219–1228.
6. *Пиисуха А.М., Звягин А.И., Степанов А.А.* Парамагнитное поглощение в  $\text{KDu}(\text{MoO}_4)_2$  в параллельных полях // ФТТ. 1971. Т. 13. С. 3128–3131.
7. *Пиисуха А.М., Черный А.С., Звягин А.И.* Эффект низкой симметрии спектра иона  $\text{Er}^{3+}$  в калиево-иттриевом молибдене  $\text{KY}(\text{MoO}_4)_2$  // ФНТ. 1975. № 1. С. 473–476.
8. *Ковалев А.С., Гвоздикова М.В.* Экзотические солитоны в магнетиках с сильно анизотропным обменным взаимодействием // ФНТ. 1999. Т. 25, № 3. С. 252–282.
9. *Ландау Л.Д.* Собрание трудов. Т. 1. — М.: Наука, 1969. — С. 128–143.
10. *Браун У.Ф.* Микромагнетизм. — М.: Наука, 1979. — 160 с.  
*Brown W.F.* Micromagnetics. — Interscience publishers a division of John New York, London: Willey and sons, 1963.
11. *Хуберт А.* Теория доменных стенок в упорядоченных средах. — М.: Мир, 1977. — 306 с.  
*Hubert A.* Theorie der domanenwande in geordneten medien. — Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1974.
12. *Малоземов А., Слонзуски Дж.* Доменные стенки в материалах с цилиндрическими магнитными доменами. — М.: Мир, 1982. — 382 с.  
*Malozemoff A.P., Slonczewski J.C.* Magnetic domain walls in bubble materials. — New York, London, Toronto, Sydney, San Francisco: Springer Verlag, 1979.
13. *Барьяхтар В.Г.* Феноменологическое описание релакционных процессов в магнетиках // ЖЭТФ. 1984. Т. 87, № 4. С. 1501–1508.

14. *Барьяхтар В.Г.* Спонтанное вырождение основного состояния и процессы релаксации в ферромагнетике // ФТТ. 1987. Т. 29, № 5. С. 1317–1322.
15. *Барьяхтар В.Г.* Феноменологическая теория релаксационных процессов в магнетиках. В сб. науч. тр.: Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов. — Ин-т теорет. физики АН УССР // Под. ред. В.Г. Барьяхтара, В.Е. Захарова, В.М. Черноусенко. — Киев: Наук. думка. — 1990. — с. 6–43.
16. *Барьяхтар В.Г., Иванов Б.А., Соболева Т.К., Сукстанский А.Л.* Теория релаксации динамических солитонов в ферромагнетике // ЖЭТФ. 1986. Т. 91, № 4. С. 1455–1465.
17. *Галкина Е.Г., Иванов Б.А., Сафарян К.А.* Теория торможения доменных стенок в ромбических магнетиках // ЖЭТФ. 1997. Т. 111, № 1. С. 158–173.
18. *Иванов Б.А., Сафарян К.А.* О подвижности доменных границ ферромагнетиков в поперечном магнитном поле // ФТТ. 1990. Т. 32, № 12. С. 3507–3510.
19. *Иванов Б.А., Сафарян К.А.* Динамика доменных границ одноосного ферромагнетика в поперечном магнитном поле // ФНТ. 1992. Т. 18, № 7. С. 772–730.
20. *Тузов Е.А., Шавров В.Г.* Об энергетической щели в ферро- и антиферромагнетиках, связанной с магнитоупругой энергией // ФТТ. 1965. Т. 7, № 1. С. 217–226.
21. *Тузов Е.А., Шавров В.Г.* Нарушенная симметрия и магнитоакустические эффекты в ферро- и антиферромагнетиках // УФН. 1983. Т. 140, № 3. С. 429–462.
22. *Трудсделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. — М.: Мир, 1975. — 592 с.  
*Truesdell C.* A first course in rational continuum mechanics. — The Johns Hopkins University: Baltimore, Maryland, 1972.
23. *Tiersden H.F.* Variational principle for saturated magnetoelastic insulators // J. Math. Phys. 1965. V. 6, № 5. P. 779–788.
24. *Мак-Коннел А.Дж.* Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. — М.: Физматлит, 1963. — 412 с.  
*Mc Connell A.J.* Application of tensor analysis. — New York: Dover Publications, inc., 1963. — 318 p.
25. *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. — М.: Наука, 1964. — 664 с.
26. *Murnaghan F.D.* Finite deformation of an elastic solid. — New York: John Wiley & Sons, inc. London Chapman & Hall, limited, 1951. — 140 p.
27. *Гольденблат И.М.* Нелинейные проблемы теории упругости. — М.: Наука, 1969. — 336 с.
28. Элементарные частицы и компенсирующие поля / Под ред. Д.Д. Иваненко. — М.: Мир, 1964. — 299 с.
29. *Коноплева Н.П., Попов В.Н.* Калибровочные поля — М.: Атомиздат, 1972. — 236 с.
30. *Mielke E.W.* Geometrodynamics of gauge fields. — Berlin: Akademie Verlag, 1987. — 242 p.

31. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко Т. П. Современная геометрия. Методы и приложения. — М.: Наука, 1986. — 760 с.
32. Dzyaloshinski I. E., Volovik G. E. On the concept of local invariance in theory of spin glasses. J. de Phys. 1978. V. 39, № 6. P. 693–700.
33. Воловик Г. Е., Дзялошинский И. Е. О дополнительных локализованных степенях свободы в спиновых стеклах // ЖЭТФ. 1978. Т. 75, № 3. С. 1102–1109.
34. Паташинский А. З., Шумило Б. И. Теория конденсированного вещества, основанная на гипотезе локального кристаллического порядка // ЖЭТФ. 1985. Т. 89, № 1. С. 315–328.
35. Кадич А., Эделен Д. Калибровочная теория дислокаций и дисклинаций. — М.: Мир, 1987. — 168 с.  
Kadić A., Edelen D. G. B. A gauge theory of dislocations and disclination. — Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1983.
36. Панин В. Е., Гриняев Ю. В., Егорушкин В. Е., Бухбиндер И. Л., Кульков С. М. Спектр возбужденных состояний и вихревое механическое поле в деформируемом кристалле // Изв. вузов (сер. физика). 1987. № 1. С. 34–51.
37. Егорушкин В. Е. Калибровочная теория пластической деформации в механике сплошных сред // Изв. вузов (сер. физика). 1990. Т. 33, № 2. С. 51–68.
38. Нестеров А. Н., Овчинников С. П. Калибровочная теория аморфных магнетиков // ТМФ. 1988. Т. 76, № 1. С. 58–65.
39. Малышев К. Л., Романов А. Е. Аспекты  $T(3) \otimes SO(3)$ -калибровочной теории, ч. 1. — Препринт ЛОМИ Р-2-90. — Ленинград, 1990. — 47 с.
40. Малышев К. Л., Романов А. Е. Аспекты  $T(3) \otimes SO(3)$ -калибровочной теории, ч. 2. — Препринт ЛОМИ Р-2-90. — Ленинград, 1990. — 52 с.
41. Волков Д. В., Желтухин А. А., Блюх Ю. П. Феноменологический лагранжиан спиновых волн // ФТТ. 1971. Т. 13, № 6. С. 1668–1678.
42. Волков Д. В., Желтухин А. А. Феноменологический лагранжиан спиновых волн в пространственно-неупорядоченных средах // ФНТ. 1979. Т. 5, № 11. С. 1359–1363.
43. Волков Д. В., Желтухин А. А. О распространении спиновых волн в пространственно-неупорядоченных средах // ЖЭТФ. 1980. Т. 78, № 5. С. 1867–1878.
44. Андреев А. Ф., Марченко В. И. Макроскопическая теория спиновых волн // ЖЭТФ. 1976. Т. 70, № 4. С. 1522–1532.
45. Андреев А. Ф. Магнитные свойства неупорядоченных сред // ЖЭТФ. 1978. Т. 74, № 2. С. 786–797.
46. Андреев А. Ф., Марченко В. И. Симметрия и макроскопическая динамика магнетиков // УФН. 1980. Т. 130, № 1. С. 37–63.
47. Петрашень М. И., Трифонов Е. Д. Применение теории групп в квантовой механике. — М.: Наука, 1967. — 308 с.
48. Штрайтвольф Г. Теория групп в физике твердого тела. — М.: Мир, 1976. — 262 с.  
Streitwolf H. Gruppentheorie in der festkörperphysik. — Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Porting K.-G., 1967.

49. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантовых полей. — М.: Наука, 1973. — 414 с.
50. *Wagner H.* Long-wavelength excitations and the Goldstone theorem in many-particle system with «broken symmetries» // *Z. Phys.* 1966. V.195. P.273–299.
51. Ланге Р. Нерелятивистский анализ теоремы Голдстоуна. В кн.: Гугенгольц Н. Квантовая теория систем многих тел. — М.: Мир, 1967. — С.132–141.
52. Гриб А.А. Проблема неинвариантности вакуума в квантовой теории поля. — М.: Атомиздат, 1978. — 126 с.
53. *Coleman S., Wess J., Zumino B.* Structure of phenomenological lagrangians. I // *Phys. Rev.* 1969. V.177, №5. P.2239–2247.
54. *Callan C., Coleman S., Wess J., Zumino B.* Structure of phenomenological lagrangians. II // *Phys. Rev.* 1969. V.177. №5. P.2247–2250.
55. Волков Д.В. Феноменологический лагранжиан взаимодействия голдстоуновских частиц. — Препринт ИТФ-69-75. — Киев, 1969. — 51 с.
56. Волков Д.В. Феноменологические лагранжианы // ЭЧАЯ. 1973. Т.4, №1. С.3–41.
57. Волков М.К., Первушин В.Н. Существенно нелинейные квантовые теории, динамические симметрии и физика мезонов. — М.: Атомиздат, 1978. — 238 с.
58. *Schwinger J.* Chiral dynamics // *Phys. Lett. B.* 1967. V.24. P.473–475.
59. Волков Д.В., Акулов В.П. О возможном универсальном взаимодействии нейтрино // Письма в ЖЭТФ. 1972. Т.16. С.621–623.
60. Борисов А.Б., Огиевецкий В.И. Теория динамических аффинной и конформной симметрии как теория гравитационного поля // ТМФ. 1974. Т.21, №3. С.329–342.
61. Иванов Е.А., Огиевецкий В.И. Калибровочные теории как теории спонтанного нарушения симметрии // Письма в ЖЭТФ. 1976. Т.23. С.661–664.
62. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. — М.: Наука, 1965. — 588 с.
63. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. — М.: Наука, 1973. — 203 с.
64. Голдстейн Г. Классическая механика. — М.: Наука, 1975. — 415 с.  
*Goldstein H.* Classical mechanics. — Addison-Wisley press, inc. Cambridge 42, Mass., 1950.
65. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1974. — 432 с.
66. Френкель Я.И. Электродинамика. Т.1. — Л.: ОНТИ-ГТТИ, 1934. — 428 с.
67. *Gell-Mann M., Levi M.* The axial vector current in beta decay // *Nuovo cimento.* 1960. V.16. P.705.
68. *Maki K.* General gauge invariance and spin waves in the B-phase of super fluid  $^3\text{He}$  // *Phys. Rev. B.* 1975. V.11, №11. P.4264–4271.
69. Бухгольц Л.Дж., Феттер А.Л. Статические и динамические текстуры в сверхтекучем  $^3\text{He}$ –А. В сб.: Новости фундаментальной физики, вып. 10. Квантовые жидкости и кристаллы. — М.: Мир, 1979. — С.43–55.

70. Румер Ю.Б., Фет А.И. Теория унитарной симметрии. — М.: Наука, 1970. — 400 с.
71. Baryakhtar V.G., Belykh V.G., Soboleva T.K. Relaxation of spin waves in non-collinear magnets: Macroscopic theory // Phys. Lett. A. 1988. V.132, № 6, 7. P. 359–362.
72. Дзялошинский И.Е., Манько В.И. Нелинейные эффекты в антиферромагнетиках. Скрытый антиферромагнетизм // ЖЭТФ. 1964. Т. 46, № 4. С. 1352–1359.
73. Дзялошинский И.Е., Кухаренко Б.Г. Спиновые волны в  $\text{UO}_2$  // ЖЭТФ. 1978. Т. 75, № 6. С. 2290–2294.
74. Elliot R., Thorpe M. Orbital effects on exchange interactions // J. Appl. Phys. 1968. V. 39, № 2. P. 802–807.
75. Киселев В.В. Динамические солитоны в магнетиках с несколькими магнитными подрешетками. — Дис. ... канд. физ.-мат. наук — Свердловск, 1984. — 168 с.
76. Борисов А.Б. Нелинейные возбуждения и двумерные топологические солитоны в магнетиках. — Дис. ... докт. физ.-мат. наук — Свердловск, 1986. — 303 с.
77. Меньшенин В.В., Мирсаев И. Ф. Талуц Г.Г. Магнитоупругие взаимодействия в неупорядоченных ферромагнетиках // ФММ. 1982. Т. 54, № 3. С. 451–458.
78. Меньшенин В.В., Мирсаев И. Ф. Нелинейная генерация продольных магнитоупругих волн в неупорядоченных ферромагнетиках // ФММ. 1989. Т. 68, № 1. С. 13–20.
79. Барьяхтар В.Г., Витебский И.М., Яблонский Д.А. Магнитоупругие эффекты в неколлинеарных антиферромагнетиках // ЖЭТФ. 1985. Т. 89, № 7. С. 189–202.

## К главе 2

1. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. — М.: Мир, 1988. — 694 с.  
Dodd R.K., Eilbeck J.C., Gibbon J.D., Morris H.C. Solitons and nonlinear wave equation. — London, Orlando, San Diego, New York, Toronto, Montreal, Sydney, Tokyo: Academic Press, Inc. (Harcourt Brace Jovanovich, Publishers), 1984.
2. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. — М.: Мир, 1989. — 324 с.  
Newell A. Solitons in mathematics and physics. — Society for industrial and applied mathematics: University of Arizona, 1985.
3. Gardner G., Green J., Kruskal M., Miura R. A method for solving of the Korteweg-de Vries equation // Phys. Rev. Lett. 1967. V. 19, № 19. P. 1095–1098.
4. Lax P.D. Integrals of non-linear equations of evolution and solitary waves // Comm. Pure Appl. Math. 1968. V. 21, № 5. P. 467–490.  
Лэкс П.Д. Инвариантные функционалы нелинейных эволюционных уравнений. В кн.: Нелинейные волны / Под ред. С. Лейбовича, А. Сибасса — М.: Мир, 1977. — С. 297–316.  
In the book: Nonlinear waves / Ed. S. Leibovich, A.R. Seebass. — Cornell University Press, Ithaca and London, 1974.



5. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Схема интегрирования нелинейных эволюционных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I // Функц. анализ и его прилож. 1974. Т. 8, № 3. С. 43–53.
6. Ablowitz M.J., Kaup D.J., Newell A.C., Segur H. The inverse scattering transform. Fourier analysis for non-linear problems // Stud. Appl. Math. 1974. V. 53, № 4. P. 249–317.
7. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. — М.: Наука, 1980. — 320 с.
8. Лэм Дж. Л. Введение в теорию солитонов. — М.: Мир, 1983. — 294 с.  
Lamb G.L. Elements of soliton theory. — A Wiley — Now York, Chichester, Brisbane, Toronto: Interscience Publication John Wiley & Sons, 1980.
9. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. — М.: Наука, 1986. — 528 с.
10. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи рассеяния. — М.: Мир, 1987. — 444 с.  
Ablowitz M., Segur H. Solitons and the inverse scattering transform. — Philadelphia: SIAM, 1981.
11. Скотт Э. Нелинейная наука: Рождение и развитие когерентных структур. — М.: Физматлит, 2007. — 560 с.  
Scott A. Nonlinear science: Emergence and dynamics of coherent structures. — Oxford University press, 2003. — 480 p.
12. Марченко В.А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. — Киев: Наук. думка, 1978. — 331 с.
13. Borovik A.E. Solitons investigations in nonlinear dynamics – new concept. — Poznan Institute of molecular physics, Polish Academy of Sciences, 1980. — 113 p.
14. Захаров В.Е., Михайлов А.В. Релятивистски-инвариантные двумерные модели теории поля, интегрируемые методом обратной задачи // ЖЭТФ. 1978. Т. 74, № 6. С. 1953–1973.
15. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния II // Функц. анализ и его прилож. 1979. Т. 13, № 3. С. 13–22.
16. Hirota R. Bilinearization of soliton equation // J. Phys. Soc. Jpn. 1982. V. 51, № 1. P. 323–331.
17. Хирота Р. Прямые методы в теории солитонов. В кн.: Солитоны / Под ред. Р. Буллафа, Ф. Кодри — М.: Мир, 1983. — С. 175–192.  
In the book: Solitons. / Ed. R.K. Bullough, P.J. Caudrey — Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1980.
18. Matveev V.B., Salle M.A. Darboux transformation and solitons. — Springer Verlag, 1991. — 129 p.
19. Борисов А.Б., Киселев В.В. Динамика квазиодномерного ферромагнетика с анизотропией типа «легкая плоскость» // ФММ. 1984. Т. 58, № 2. С. 238–251.
20. Borisov A.B., Kiseliev V.V. Dynamical solitons in a quasi-one-dimensional ferromagnet with easy plane type anisotropy // Physica D. 1986. V. 19. P. 411–422.

21. Яремчук А.И. Взаимодействие доменной стенки со спиновой волной в рамках интегрируемого случая уравнения Ландау–Лифшица // ТМФ. 1985. Т. 62, № 1. С. 153–158.
22. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1974. — 432 с.
23. *Zabusky N., Kruskal M.* Interaction of «solitons» in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // *Phys. Rev. Lett.* 1965. V. 15, № 6. P. 240–243.
24. Захаров В.Е., Фаддеев Л.Д. Уравнение Кортевега–де Фриза — вполне интегрируемая система // Функциональный анализ и его приложения. 1971. Т. 5, № 4. С. 18–27.
25. Дубровин Б.А., Матвеев И.Б., Новиков С.П. Нелинейные уравнения типа Кортевега–де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия // УМН. 1976. Т. 31, № 1. С. 53–136.
26. Кричевер И.М. Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений // УМН. 1977. Т. 32, № 6. С. 183–208.
27. Дубровин Б.А. Тэта-функции и нелинейные уравнения // УМН. 1981. Т. 36, № 2. С. 11–80.
28. Дубровин Б.А. Римановы поверхности и нелинейные уравнения. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. — 152 с.
29. *Belokolos E.D., Bobenko A.I., Enolskii V.Z., Its A.R., Matveev V.B.* Algebro-geometric approach to nonlinear integrable equations. — Springer series in nonlinear dynamics, Berlin: Springer-Verlag, 1994, XII. — 320 p.
30. *Scott A.C., Chu F.Y., Mc Laughlin D.W.* The soliton: a new concept in applied science // *Proc. IEEE.* 1973. V. 61. P. 1443–1483 (имеется перевод: ТИИР. 1973. Т. 61. С. 79–123).
31. *Bishop A.R., Krumhansl J.A., Trullinger S.E.* Solitons in condensed matter: A paradigm // *Physica D.* 1980. V. 1, № 1. P. 1–14.
32. Бишоп А. Солитоны и физические возмущения. В кн.: Солитоны в действии / Под ред. К. Лонгрена, Э. Скотта — М.: Мир, 1981. — С. 72–101. In the book: *Solitons in action.* / Ed. K. Lonngren, A. Scott — Academic Press: New York, San Francisco, London, 1978.
33. Звездин А.К. О динамике доменных границ в слабых ферромагнетиках // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 29, № 2. С. 605–610.
34. Барьяхтар И.В., Иванов Б.А., Сукстанский А.Л. Нелинейные волны и динамика доменных границ в слабых ферромагнетиках // ЖЭТФ. 1980. Т. 78, № 4. С. 1509–1522.
35. Барьяхтар И.В., Иванов Б.А. Нелинейные волны намагниченности антиферромагнетиков // ФНТ. 1979. Т. 5, вып. 7. С. 759–770.
36. Барьяхтар И.В., Иванов Б.А. О нелинейных волнах намагниченности антиферромагнетика. — Препринт № 80-4 ДонФТИ АН УССР. — Донецк, 1980. — 61 с.
37. Карпман В.И., Маслов Е.М. Теория возмущений для солитонов // ЖЭТФ. 1977. Т. 3, вып. 2. С. 537–559.
38. Мак-Лафлин Д., Скотт Э. Многосолитонная теория возмущений. В кн.: Солитоны в действии / Под ред. К. Лонгрена, Э. Скотта — М.: Мир, 1981. — С. 210–268.

- In the book: Solitons in action / Ed. K. Lonngren, A. Scott — New York, San Francisco, London: Academic Press, 1978.
39. Kivshar Y.S., Malomed B.A. Dynamics of solitons in nearly integrable systems // *Rev. Mod. Phys.* 1989. V. 61, № 4. P. 763–916.
  40. Склянин Е.К., Тахтаджан Л.А., Фаддеев Л.Д. Квантовый метод обратной задачи рассеяния. I // *ТМФ*. 1979. Т. 40, № 2. С. 194–220.
  41. Фаддеев Л.Д., Тахтаджан Л.А. Квантовый метод обратной задачи рассеяния и XYZ модель Гейзенберга // *УМН*. 1979. Т. 34, № 5. С. 13–63.
  42. Боголюбов Н.М., Изергин А.Г., Корепин В.Е. Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи. — М.: Наука, 1991. — 240 с.
  43. Бэкстер Р. Точно решаемые модели в статистической механике. — М.: Мир, 1983. — 488 с.  
*Baxter R.J.* Exactly solved models in statistical mechanics. — London, New York: Academic Press, 1982.
  44. Годен М. Волновая функция Бете. — М.: Мир, 1987. — 352 с.  
*Gaudin M.* La fonction d'onde de Bethe. — Masson, 1983.
  45. Bethe H. Zur theorie der metalle. I. Eigenwerte und eigenfunktion der linearen atomkette // *Z. Physik*. 1931. Bd. 71, H. 3–4. S. 205–226.
  46. Тахтаджан Л.А., Фаддеев Л.Д. Спектр и рассеяние возбуждений в одномерном изотропном магнетике Гейзенберга // *Зап. науч. сем. ЛОМИ*. 1981. Т. 109. С. 134–178.
  47. Faddeev L.D., Takhtajan L.A. What is the spin of a spin wave? // *Phys. Lett. A*. 1981. V. 85, № 6–7. P. 375–377.
  48. Yang C.N., Yang C.P. One-dimensional chain of anisotropic spin-spin interaction. I. Proof of Bethe's hypothesis for ground state in a finite system // *Phys. Rev.* 1966. V. 150, № 1. P. 321–327.
  49. Yang C.N., Yang C.P. One-dimensional chain of anisotropic spin-spin interaction. II. Properties of the ground state energy per lattice site for a infinite system // *Phys. Rev.* 1966. V. 150, № 1. P. 327–339.
  50. Yang C.N., Yang C.P. One-dimensional chain of anisotropic spin-spin interaction. III. Applications // *Phys. Rev.* 1966. V. 151, № 1. P. 258–264.
  51. Изюмов Ю.А., Скрябин Ю.Н. Статистическая механика магнитоупорядоченных систем. — М.: Наука, 1987. — 264 с.
  52. Lakshamanan M. Continuum spin system as an exactly soluble dynamical system // *Phys. Lett. A*. 1977. V. 61, № 1. P. 53–54.
  53. Takhtajan L.A. Integration of the continuous Heisenberg spin chain through the inverse scattering method // *Phys. Lett. A*. 1977. V. 64, № 2. P. 235–237.
  54. Боровик А.Е. N-солитонные решения нелинейного уравнения Ландау–Лифшица // *Письма в ЖЭТФ*. 1978. Т. 28, № 10. С. 629–632.
  55. Borovik A.E. Exact integration on the nonlinear Landau–Lifshitz equation // *Sol. St. Comm.* 1980. V. 34, № 8. P. 721–722.
  56. Borovik A.E. Solitons investigations in nonlinear dynamics — new concept. — Poznan Institute of molecular physics, Polish Academy of Sciences, 1980, — 113 p.
  57. Боровик А.Е., Робук В.Н. Линейные псевдопотенциалы и законы сохранения для уравнения Ландау–Лифшица, описывающего нелинейную

- динамику ферромагнетика с одноосной анизотропией // ТМФ. 1981. Т. 46, № 3. С. 371–381.
58. *Боровик А. Е., Кулинич С. И.* Интегрирование нелинейной динамики одноосного ферромагнетика методом обратной задачи рассеяния // Письма в ЖЭТФ. 1984. Т. 39, № 7. С. 320–324.
59. *Borovik A. E., Klama S., Kulinich S. I.* Integration of the Landau–Lifshitz equation with preferred-axis anisotropy by the method of the inverse scattering problem // Physica D. 1988. V. 32. P. 107–134.
60. *Косевич А. М., Иванов Е. А., Ковалев А. С.* Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. — Киев: Наук. думка, 1983. — 192 с.
61. *Ivanov B. A., Kosevich A. M., Manshos I. V.* Algebraic soliton in a ferromagnet in the presence of the magnetic field directed along the anisotropy axis // Sol. St. Comm. 1980. V. 34, № 6. P. 417–418.
62. *Sasada T. J.* Magnons, solitons and a critical field in the Heisenberg ferromagnetic chain with easy-plane anisotropy // J. Phys. Soc. Jpn. 1982. V. 51, № 8. P. 2446–2449.
63. *Косевич А. М., Воронов В. П., Манжос И. В.* Нелинейные коллективные возбуждения в легкоплоскостном магнетике // ЖЭТФ. 1983. Т. 84, № 1. С. 148–160.
64. *Бабич И. М., Косевич А. М., Манжос И. В.* Локализованные в пространстве периодические во времени магнитные возбуждения // ФНТ. 1983. Т. 9, № 6. С. 636–644.
65. *Sklyanin E. K.* On complete integrability of the Landau–Lifshitz equation. — Preprint LOMI 79-E-3. — Leningrad, 1979. — 32 p.
66. *Ахиезер И. А., Боровик А. Е.* К теории спиновых волн конечной амплитуды // ЖЭТФ. 1967. Т. 52, № 2. С. 508–513.
67. *Ахиезер И. А., Боровик А. Е.* О нелинейных спиновых волнах в ферромагнетиках и антиферромагнетиках // ЖЭТФ. 1967. Т. 52, № 5. С. 1332–1344.
68. *Иванов Б. А., Косевич А. М., Бабич И. М.* О локализованных нелинейных колебаниях в ферромагнетике // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 29, № 12. С. 777–780.
69. *Богдан М. М., Ковалев А. С.* Точные многосолитонные решения уравнений Ландау–Лифшица для одномерного неизотропного магнетика. — Препринт ИМФ УНЦ-80-4. — Свердловск, 1980. — 36 с.
70. *Богдан М. М., Ковалев А. С.* Точные многосолитонные решения уравнений Ландау–Лифшица для неизотропного магнетика // Письма в ЖЭТФ. 1980. Т. 31, № 8. С. 453–457.
71. *Mikhailov A. V.* The Landau–Lifshitz equation and the Riemann-boundary problem on a torus // Phys. Lett. A. 1982. V. 92, № 2. P. 51–55.
72. *Mikhailov A. V.* Integrable magnetic models. In the book: Solitons / Ed. by S. E. Trullinger, V. E. Zakharov, V. L. Pokrovsky — Elsevier Science Publishers B. V., 1986. — P. 625–690.
73. *Борисов А. Б., Киселев В. В.* Многосолитонные решения асимметричных киральных  $SU(2)$ ,  $SL(2, R)$ -теорий ( $d = 1$ ) // ТМФ. 1983. Т. 54, № 2. С. 246–257.

74. *Borisov A. B.* The Hilbert problem for matrices and a new class of integrable equation // *Lett. Math. Phys.* 1983. V. 7. P. 195–199.
75. *Борисов А. Б.* Многосолитонные решения уравнений неизотропного магнетика // *ФММ.* 1983. Т. 55, № 2. С. 230–234.
76. *Rodin Yu. L.* The Riemann boundary problem on a torus and the inverse scattering problem for the Landau–Lifshitz equation // *Lett. Math. Phys.* 1983. V. 7. P. 3–8.
77. *Rodin Yu. L.* The Riemann boundary problem on Riemann surfaces and the inverse scattering problem for the Landau–Lifshitz equation // *Physica D.* 1984. V. 11. P. 90–108.
78. *Бобенко А. И.* Уравнение Ландау–Лифшица. Процедура «одевания». Элементарные возбуждения // *Зап. науч. сем. ЛОМИ.* 1983. Т. 123. С. 58–66.
79. *Борисов А. Б.* Прямая и обратная задача рассеяния для уравнения Ландау–Лифшица // *ДАН СССР.* 1986. Т. 288, № 6. С. 1339–1342.
80. *Бикбаев Р. Ф., Бобенко А. И., Итс Р. А.* Уравнение Ландау–Лифшица. Теория точных решений. I. — Препринт Дон ФТИ-84-6 (81). — Донецк, 1984. — 46 с.
81. *Бикбаев Р. Ф., Бобенко А. И., Итс Р. А.* Уравнение Ландау–Лифшица. Теория точных решений. II. — Препринт Дон ФТИ-84-7 (82). — Донецк, 1984. — 51 с.
82. *Бикбаев Р. Ф., Бобенко А. И., Итс А. Р.* О конечнозонном интегрировании уравнения Ландау–Лифшица // *ДАН.* 1983. Т. 272, № 6. С. 1293–1298.
83. *Bikbaev R. F., Bobenko A. I.* On finite-gap integration of the Landau–Lifshitz equation: XYZ case. — Preprint LOMI E-8-83. — Leningrad, 1983. — 27 p.
84. *Бобенко А. И.* Вещественные алгебро-геометрические решения уравнения Ландау–Лифшица в  $\tau$ -функциях Прима // *Функц. анализ и его прилож.* 1985. Т. 19, № 1. С. 6–19.
85. *Митропольский Ю. Ф., Боголюбов Н. Н. (мл.), Прикарпатский А. К., Самойленко В. Г.* Интегрируемые динамические системы: Спектральные и дифференциально-геометрические аспекты. — Киев: Наук. думка, 1987. — 296 с.
86. *Михайлов А. В., Яремчук А. И.* Аксиально-симметричные решения двумерной модели Гейзенберга // *Письма в ЖЭТФ.* 1982. Т. 36, № 3. С. 75–77.
87. *Mikhailov A. V., Yaremchuk A. I.* Cylindrically symmetric solutions of the nonlinear chiral field model ( $\sigma$ -model) // *Nucl. Phys. B.* 1982. V. 202. P. 508–522.
88. *Borisov A. B., Kiseliev V. V.* Two-dimensional solutions of the Landau–Lifshitz equation // *Phys. Lett. A.* 1985. V. 107, № 4. P. 161–163.
89. *Борисов А. Б., Киселев В. В., Талуц Г. Г.* Дискликации в изотропном антиферромагнетике. В кн.: *Исследования по физике кинетических явлений.* — Свердловск: АН СССР, УНЦ, 1984. — С. 118–126.
90. *Konopelchenko B. G.* Introduction to multidimensional integrable equations: The inverse spectral transform in 2+1 dimensions. — New York and London: Plenum Press, 1992. — 292 p.
91. *Konopelchenko B. G.* Solitons in multidimensions: Inverse spectral transform method. — World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1993. — 294 p.

92. Борисов А.Б. Новый класс точных решений уравнения  $n$ -поля и их геометрическая интерпретация // ДАН. 2003. Т. 389, № 5. С. 603–604.
93. Борисов А.Б. Дифференциально-геометрический метод и новый класс точных решений уравнений  $n$ -поля // Мат. физика, анализ, геометрия. 2004. Т. 10. С. 326–331.
94. Елеонский В.М., Кирова Н.Н., Кулагин Н.Е. О точно решаемых моделях для двухподрешеточных магнетиков // ЖЭТФ. 1981. Т. 80, № 1. С. 357–363.
95. Веселов А.П. Кноидальные решения уравнения Ландау–Лифшица для двухподрешеточного магнетика // ДАН СССР. 1984. Т. 276, № 3. С. 590–593.
96. Елеонский В.М., Кирова Н.Н., Кулагин Н.Е. О точно решаемых уравнениях Ландау–Лифшица для слабых ферромагнетиков // ЖЭТФ. 1980. Т. 91, № 1. С. 321–332.
97. Волжан Е.Б., Гиоргадзе Н.П., Патарая А.Д. О слабонелинейных волнах плотности намагниченности в магнитоупорядоченных кристаллах // ФТТ. 1976. Т. 18, № 9. С. 2546–2555.
98. Чередник И.В. Релятивистки-инвариантные квазиклассические пределы интегрируемых двумерных квантовых моделей // ТМФ. 1981. Т. 47, № 2. С. 225–229.
99. Чередник И.В. Об интегрируемости уравнения двумерного асимметричного кирального  $O(3)$ -поля и его квантового аналога // ЯФ. 1981. Т. 33, № 1. С. 278–282.
100. Kaup D.J. The method of solution for stimulated Raman scattering and two-photon absorption. — Preprint Clarkson college of Technology, April, 1980.
101. Kaup D.J. The method of solution for stimulated Raman scattering and two-photon absorption // Physica D. 1983. V. 6, № 2. P. 143–154.
102. Борисов А.Б., Киселев В.В., Талуц Г.Г. Солитонные решения нелинейной динамики магнетиков // ФНТ. 1983. Т. 9, № 2. С. 170–178.
103. Borisov A.B., Kiseliev V. V., Talutz G. G. N-soliton solutions for asymmetric chiral  $SU(2)$  theory. In the book: Nonlinear and turbulent processes in physics, V.3, edited by R. S. Sagdeev — New York: Gordon and Breach, Harwood Academic Publishers, 1984. — P. 1211–1217.  
Борисов А.Б., Киселев В.В., Талуц Г.Г. Многосолитонные решения асимметричной киральной  $SU(2)$  теории // Проблемы нелинейных и турбулентных процессов в физике, Т. 2. — Киев: Наук. думка, 1985. — С. 272–275.
104. Borisov A. B., Kiseliev V. V., Taluts G. G. Solitons in a ferrimagnet // Sol. St. Comm. 1982. V. 44, № 3. P. 441–442.
105. Burtsev S. P., Mukhailov A. V., Zakharov V. E. The inverse scattering transform with a movable spectral parameter. — Preprint / The Academy of Sciences of the USSR, L.D. Landau institute for theoretical physics. — Chernogolovka, 1987. — 37 p.
106. Бурцев С.П., Захаров В.Е., Михайлов А.В. Метод обратной задачи с переменным спектральным параметром // ТМФ. 1987. Т. 70, № 3. С. 323–341.

107. *Mikhailov A. V.* The reduction problem and the inverse scattering method // *Physica D.* 1981. V. 3, № 1–2. P. 73–117.
108. *Борисов А.Б., Зыков С.А.* Одевающая цепочка дискретных симметрий и размножение нелинейных уравнений // *ТМФ.* 1998. Т. 115, № 2. С. 199–214.
109. *Борисов А.Б.* Преобразование Бэклунда и одевающие цепочки для уравнения Ландау–Лифшица // *ТМФ.* 2001. Т. 128, № 2. С. 226–235.
110. *Борисов А.Б., Зыков С.А., Павлов М.В.* Уравнение Цицейки и размножение интегрируемых нелинейных уравнений // *ТМФ.* 2002. Т. 131, № 1. С. 126–134.
111. *Borisov A.B., Zykov S.A.* Proliferation scheme for Kaup — Boussinesq equation // *Physica D.* 2001. V. 152–153. P. 104–106.
112. *Имс А.Р.* Асимптотика решения нелинейного уравнения Шредингера и изомонодромные деформации систем линейных дифференциальных уравнений // *ДАН СССР.* 1981. Т. 261, № 1. С. 14–18.
113. *Имс А.Р.* «Изомонодромные» решения уравнений нулевой кривизны // *Изв. АН СССР.* 1985. Т. 48, № 9. С. 530–565.
114. *Бикбаев Р.Ф., Имс А.Р.* Асимптотика при  $t \rightarrow \infty$  решения задачи Коши для уравнения Ландау–Лифшица // *ТМФ.* 1988. Т. 76, № 1. С. 3–17.
115. *Deift P., Zhou X.* A steepest descent method for oscillatory Riemann–Hilbert problems // *Bull. A.M.S.* 1992. V. 26, № 1. P. 119–123.
116. *Deift P., Zhou X.* A steepest descent method for oscillatory Riemann–Hilbert problems. Asymptotic for the MKdV equation // *Ann. Math.* 1993. V. 137. P. 295–368.
117. *Borisov A.B., Kiseliev V.V.* Inverse problem for an elliptic sine-Gordon equation with asymptotic behavior of the cnoidal-wave type // *Inverse Problem.* 1989. V. 5. P. 952–982.
118. *Borisov A.B., Kiseliev V.V.* Vortex dipoles on a soliton lattice background: Solution of the boundary-value problem by inverse spectral transform // *Physica D.* 1998. V. 111. P. 96–128.
119. *Bezmaternih G. V., Borisov A. B.* Rational-exponential solutions of nonlinear equations // *Lett. Math. Phys.* 1985. V. 18. P. 1–8.
120. *Bezmaternih G. V.* Exact solutions of the sine-Gordon and Landau–Lifshitz equations: rational-exponential solutions // *Phys. Lett. A.* 1985. V. 146, № 9. P. 492–495.
121. *Кудряшев Н.А.* Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. — Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. — 360 с.
122. *Ablowitz M.J., Ramani A., Segur H.* A connection between non-linear evolution equations and ordinary differential equations P-type. I // *J. Math. Phys.* 1980. V. 21, № 4. P. 715–721.
123. *Ablowitz M.J., Ramani A., Segur H.* A connection between non-linear evolution equations and ordinary differential equations P-type. II // *J. Math. Phys.* 1980. V. 21, № 4. P. 1006–1015.
124. *Ablowitz M.J.* Remarks nonlinear evolution equations and ordinary differential equations Painlevé type // *Physica D.* 1981. V. 3, № 1–2. P. 129–141.
125. *Flashka H., Newell A.C.* Monodromy and spectrum-preserving deformations. I // *Comm. Math. Phys.* 1980. V. 76, № 1. P. 65–116.



126. *Jimbo M., Miwa T., Ueno K.* Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. I. General theory and  $\tau$ -function // *Physica D.* 1981. V. 2, № 2. P. 306–352.
127. *Jimbo M., Miwa T.* Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. II // *Physica D.* 1981. V. 2, № 3. P. 407–448.
128. *Jimbo M., Miwa T.* Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. III // *Physica D.* 1981. V. 4, № 1. P. 26–46.
129. *Ueno K.* Monodromy preserving deformation and its application to soliton theory // *Proc. Japan Acad., ser. A.* 1980. V. 56, № 3. P. 103–108.
130. *Ueno K.* Monodromy preserving deformation and its application to soliton theory. II // *Proc. Japan Acad., ser. A.* 1980. V. 56, № 5. P. 210–211.
131. *Its A.R., Novokshenov V. Yu.* The isomonodromy deformation method in theory of Painlevé equations // *Lect. Notes in Math.* V. 1191 — Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1986. — 313 p.
132. *Итс А.Р., Капаев А.А., Новокшенов В.Ю., Фокас А.С.* Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана. — Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований; НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. — 728 с.

### К главе 3

1. *Боровик А.Е., Робук В.Н.* Линейные псевдопотенциалы и законы сохранения для уравнения Ландау–Лифшица, описывающего нелинейную динамику ферромагнетика с одноосной анизотропией // *ТМФ.* 1981. Т. 46, № 3. С. 371–381.
2. *Sklyanin E.K.* On complete integrability of the Landau–Lifshitz equation. — Preprint LOMI 79-E-3. — Leningrad, 1979. — 32 p.
3. *Боровик А.Е., Кулинич С.И.* Интегрирование нелинейной динамики одноосного ферромагнетика методом обратной задачи рассеяния // *Письма в ЖЭТФ.* 1984. Т. 39, № 7, С. 320–324.
4. *Borovik A.E., Klama S., Kulinich S.I.* Integration of the Landau–Lifshitz equation with preferred-axis anisotropy by the method of the inverse scattering problem // *Physica D.* 1988. V. 32. P. 107–134.
5. *Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалев А.С.* Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. — Киев: Наук. думка, 1983.
6. *Kittel C.* Note on the inertia and damping constant of ferromagnetic domain boundaries // *Phys. Rev.* 1950. V. 80. P. 918.
7. *Филиппов Б.Н., Танкеев А.П.* Динамические эффекты в ферромагнетиках с доменной структурой. — М.: Наука, 1987. — 217 с.
8. *Баталов С.В., Маслов Е.М., Шагалов А.Г.* Автофазировка солитонов // *ЖЭТФ.* 2009. Т. 135, вып. 5. С. 1021–1028.
9. *Михайлов А.В., Яремчук А.И.* Вынужденное движение доменной стенки в поле спиновой волны // *Письма в ЖЭТФ.* 1984. Т. 39, № 7. С. 296–298.



10. Яремчук А.И. Взаимодействие доменной стенки со спиновой волной в рамках интегрируемого случая уравнения Ландау–Лифшица // ТМФ. 1985. Т. 62, № 1. С. 153–158.
11. Киселев В.В., Расковалов А.А. Взаимодействие бризера с волной намагниченности в ферромагнетике с анизотропией типа «легкая ось» // ТМФ. 2010. Т. 163, № 1. С. 479–495.
12. Киселев В.В., Расковалов А.А. Вынужденное движение уединенных доменов и доменных границ в поле нелинейной волны намагниченности // ФММ. 2010. Т. 109, № 6. С. 625–638.
13. Киселев В.В., Расковалов А.А. Солитоны на фоне волны накачки в легкоосном ферромагнетике // ФНТ. 2010. Т. 36, № 8/9. С. 827–837.
14. Kiselev V. V., Rascovalov A. A. Forced motion of breathers and domain boundaries against the background of nonlinear magnetization wave // Chaos, solitons and fractals. 2012. V. 45. P. 1551–1565.
15. Кузнецов Е.А., Михайлов А.В. Устойчивость стационарных волн в нелинейных средах со слабой дисперсией // ЖЭТФ. 1974. Т. 67, вып. 5 (11). С. 1717–1724.
16. Борисов А.Б., Киселев В.В., Талуц Г.Г. Солитонные решения нелинейной динамики магнетиков // ФНТ. 1983. Т. 9, № 2. С. 170–178.
17. Борисов А.Б., Киселев В.В. Динамика квазидномерного ферромагнетика с анизотропией типа «легкая плоскость» // ФММ. 1984. Т. 5. № 2. С. 238–251.
18. Елеонский В.М., Кулагин Н.Е., Новожилова Н.С. О новых примерах топологических солитонов в магнитоупорядоченных средах // ЖЭТФ. 1985. Т. 89, вып. 6. С. 2174–2180.
19. Ковалев А.С., Кулагин Н.Е. Динамика темных солитонов ненулевого вакуума в однокомпонентной системе. — Харьков, препринт ФТИНТ, 1987. № 14. — 23 с.
20. Kovalev A. S., Kulagin N. E. Dynamics of hole-like solitons in stable condensate // In the book «Nonlinear and turbulent processes in physics», V. 2. — Kiev: Naukova Dumka, 1988. — P. 273–276.
21. Kuznetsov E. A., Mikhailov A. V., Shimokhin I. A. Nonlinear interaction of solitons and radiation // Physica D. 1995. V. 87. P. 201–215.
22. Бейтмен Г., Эрдейи А. Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матье. — М.: Наука, 1967. — 229 с.
23. Ахиезер А.И. Элементы теории эллиптических функций. — М.: Наука, 1970. — 304 с.
24. Mikhailov A. V. The Landau–Lifshitz equation and the Riemann-boundary problem on a torus // Phys. Lett. 1982. V. 92. № 2. P. 51–55.
25. Борисов А.Б., Киселев В.В. Многосолитонные решения асимметричных киральных SU (2), SL (2, R)-теорий ( $d = 1$ ) // ТМФ. 1983. Т. 54. № 2. С. 246–257.
26. Rodin Yu. L. The Riemann boundary problem on a torus and the inverse scattering problem for the Landau–Lifshitz equation // Lett. Math. Phys. 1983. V. 7. P. 3–8.
27. Карпман В.И., Маслов Е.М. Теория возмущений для солитонов // ЖЭТФ. 1977. Т. 3. вып. 2. С. 537–559.

28. Мак-Лафлин Д., Скотт Э. Многосолитонная теория возмущений. В кн.: Солитоны в действии / Под ред. К. Лонгрена, Э. Скотта — М.: Мир, 1981. — С. 210–268.
29. Kivshar Y. S., Malomed B. A. Dynamics of solitons in nearly integrable systems // Rev. Mod. Phys. 1989. V. 61. № 4. P. 763–916.
30. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. — М.: Наука, 1980. — 320 с.

#### К главе 4

1. Борисов А. Б., Киселев В. В. Динамика квазиодномерного ферромагнетика с анизотропией типа «легкая плоскость» // ФММ. 1984. Т. 58, № 2. С. 238–251.
2. Borisov A. B., Kisieliev V. V. Dynamical solitons in a quasi-one-dimensional ferromagnet with easy plane type anisotropy // Physica D. 1986. V. 19. P. 411–422.
3. Ковалев А. С. Влияние поля на динамику намагниченности легкоплоскостного ферромагнетика. В кн.: Современные проблемы магнетизма. — Киев: Наук. думка, 1986. — С. 72–83.
4. Steiner M., Villain J., Windsor C. The theoretical and experimental studies on one-dimensional magnetic systems // Adv. Phys. Sol. 1976. V. 25, № 2. P. 87–209.
5. Kjems J. K., Steiner M. Evidence for soliton modes in the one-dimensional ferromagnet CsNiF<sub>3</sub> // Phys. Rev. Lett. 1978. V. 41, № 16. P. 1137–1140.
6. Reiter G. Have solitons been observed in CsNiF<sub>3</sub>? // Phys. Rev. Lett. 1981. V. 46, № 3. P. 202–205.
7. Steiner M., Kakurai K., Knop W. Neutron inelastic scattering study of transverse spin fluctuation in CsNiF<sub>3</sub>: A soliton only central peak // Sol. St. Comm. 1982. V. 41, № 4. P. 329–332.
8. Steiner M., Kakurai K., Kjems J. K. Experimental study of the spindynamics in the 1-d-ferromagnet with planar anisotropy, CsNiF<sub>3</sub>, in an external magnetic field // Z. Phys. B. Condensed matter. 1983. V. 53, № 2. P. 117–143.
9. Изюмов Ю. А. Солитоны в квазиодномерных магнетиках и их исследование с помощью рассеяния нейтронов // УФН. 1988. Т. 155, № 4. С. 553–592.
10. Ахиезер И. А., Боровик А. Е. О нелинейных спиновых волнах в ферромагнетиках и антиферромагнетиках // ЖЭТФ. 1967. Т. 52, № 5. С. 1332–1344.
11. Thiele A. A. Excitation spectrum of magnetic domain walls // Phys. Rev. B. V. 7, № 1. P. 391–397.
12. Ivanov B. A., Kosevich A. M., Manshos I. V. Algebraic soliton in a ferromagnet in the presence of the magnetic field directed along the anisotropy axis // Sol. St. Comm. 1980. V. 34, № 6. P. 417–418.
13. Sasada T. J. Magnons, solitons and a critical field in the Heisenberg ferromagnetic chain with easy-plane anisotropy // J. Phys. Soc. Jpn. 1982. V. 51, № 8. P. 2446–2449.

14. *Косевич А. М., Воронов В. П., Манжос И. В.* Нелинейные коллективные возбуждения в легкоплоскостном магнетике // ЖЭТФ. 1983. Т. 84, № 1. С. 148–160.
15. *Бабич И. М., Косевич А. М., Манжос И. В.* Локализованные в пространстве периодические во времени магнитные возбуждения // ФНТ. 1983. Т. 9, № 6. С. 636–644.
16. *Косевич А. М., Иванов Е. А., Ковалев А. С.* Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. — Киев: Наук. думка, 1983. — 192 с.
17. *Туров Е. А.* Физические свойства магнитоупорядоченных кристаллов. — М.: Изд-во АН СССР. 1963 — 224 с.  
*Turov E. A.* Physical properties of magnetically ordered crystals. — New York, London: Academic Press, 1965. — 222 p.
18. *Villain J.* Quantum theory of one and two-dimensional ferro- and antiferromagnets with easy magnetization plane, I. Ideal 1-D or 2-D lattices without in-plane anisotropy // J. Physique. 1974. V. 35, № 1. P. 27–48.
19. *Schlömann E.* Generation of spin waves in uniform magnetic fields. 1. Conversion of electromagnetic power into spin wave power and vice versa // J. Appl. Phys. 1964. V. 35. P. 159–166.
20. *Schlömann E., Joseph R. I.* Generation of spin waves in nonuniform magnetic fields. 2. Calculation of the coupling length // J. Appl. Phys. 1964. V. 35, № 1. P. 167–170.
21. *Дзялошинский И. Е.* Теория геликоидальных структур в антиферромагнетиках. III // ЖЭТФ. 1964. Т. 47, вып. 3. С. 992–1003.
22. *Барьяхтар В. Г., Стефановский Е. П.* Спектр спиновых волн в антиферромагнетиках со спиральной магнитной структурой // ФТТ. 1969. Т. 11, № 7. С. 1946–1952.
23. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982. — 620 с.
24. *Борисов А. Б., Изюмов Ю. А.* Нелинейные возбуждения в спиральных магнитных структурах с инвариантом Лифшица // ДАН СССР. 1985. Т. 283, № 4. С. 859–861.
25. *Изюмов Ю. А.* Дифракция нейтронов на длиннопериодических структурах. — М.: Энергоатомиздат, 1987. — 200 с.

## К главе 5

1. *Борисов А. Б., Киселев В. В.* Многосолитонные решения асимметричных киральных SU (2), SL (2, R)-теорий ( $d = 1$ ) // ТМФ. 1983. Т. 54, № 2. С. 246–257.
2. *Borisov A. B., Kiseliev V. V., Talutz G. G.* N-soliton solutions for asymmetric chiral SU(2) theory. In the book: Nonlinear and turbulent processes in physics, V. 3, edited by R. S. Sagdeev — New York: Gordon and Breach, Harwood Academic Publishers, 1984. — P. 1211–1217.
3. *Борисов А. Б.* Многосолитонные решения уравнений неизотропного магнетика // ФММ. 1983. Т. 55, № 2. С. 230–234.
4. *Mikhailov A. V.* The Landau-Lifshitz equation and the Riemann-boundary problem on a torus // Phys. Lett. 1982. V. 92, № 2. P. 51–55.

5. *Mikhailov A. V.* Integrable magnetic models. In the book: Solitons. / Ed. by S. E. Trullinger, V. E. Zakharov, V. L. Pokrovsky — Elsevier Science Publishers B. V., 1986. — P. 625–690.
6. *Rodin Yu. L.* The Riemann boundary problem on a torus and the inverse scattering problem for the Landau–Lifshitz equation // *Lett. Math. Phys.* 1983. V. 7. P. 3–8.
7. *Rodin Yu. L.* The Riemann boundary problem on Riemann surfaces and the inverse scattering problem for the Landau–Lifshitz equation // *Physica D.* 1984. V. 11. P. 90–108.
8. *Бобенко А. И.* Уравнение Ландау–Лифшица. Процедура «одевания». Элементарные возбуждения // *Зап. науч. сем. ЛОМИ.* 1983. Т. 123. С. 58–66.
9. *Jimbo M., Miwa T., Veno K.* Monodromy preserving deformations of the linear differential equations with the rational coefficients I. — Preprint RIMS-319. — Kyoto, 1980. — 31 p.
10. *Jimbo M., Miwa T.* Monodromy preserving deformations of the linear differential equation with the rational coefficients II. — Preprint RIMS-327. — Kyoto, 1980. — 34 p.
11. *Бикбаев Р. Ф., Бобенко А. И., Итс Р. А.* Уравнение Ландау–Лифшица. Теория точных решений. I. — Препринт Дон ФТИ-84-6 (81). — Донецк, 1984. — 46 с.
12. *Бикбаев Р. Ф., Бобенко А. И., Итс Р. А.* Уравнение Ландау–Лифшица. Теория точных решений. II. — Препринт Дон ФТИ-84-2. — Донецк, 1984. — 51 с.
13. *Бикбаев Р. Ф., Бобенко А. И., Итс Р. А.* О конечнозонном интегрировании уравнения Ландау–Лифшица // *ДАН.* 1983. Т. 272, № 6. С. 1293–1298.
14. *Bikbaev R. F., Bobenko A. I.* On finite-gap integration of the Landau–Lifshitz equation: XYZ case. — Preprint LOMI E-8-83. — Leningrad, 1983. — 27 p.
15. *Бобенко А. И.* Вещественные алгебро-геометрические решения уравнения Ландау–Лифшица в  $\tau$ -функциях Прима // *Функц. анализ и его прилож.* 1985. Т. 19, № 1. С. 6–19.
16. *Боголюбов Н. Н. (мл.), Прикарпатский А. К.* О конечнозонных решениях уравнения типа Гейзенберга. В кн.: Математические методы и физико-механические поля. — Киев: Наук. думка, 1983 — № 18. — С. 7–13.
17. *Чередник И. В.* Интегрируемые дифференциальные уравнения и покрытия эллиптических кривых // *Изв. АН СССР, сер. матем.* 1983. Т. 47, № 2. С. 284–406.
18. *Борисов А. Б.* Прямая и обратная задача рассеяния для уравнения Ландау–Лифшица // *ДАН СССР.* 1986. Т. 288, № 6. С. 1339–1342.
19. *Борисов А. Б.* Нелинейные возбуждения и двумерные топологические солитоны в магнетиках: Дисс. ... докт. физ.-мат наук. — Свердловск, 1986.
20. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. — М.: ГИТТЛ, 1950. — 303 с.
21. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964. — 830 с.

22. Богдан М.М., Ковалев А.С. Точные многосолитонные решения уравнений Ландау–Лифшица для одномерного неизотропного магнетика. — Препринт ИМФ УНЦ-80-4. — Свердловск, 1980. — 36 с.
23. Богдан М.М., Ковалев А.С. Точные многосолитонные решения уравнений Ландау–Лифшица для неизотропного магнетика // Письма в ЖЭТФ. 1980. Т. 31, № 8. С. 453–457.
24. Hirota R. Bilinearization of soliton equations // J. Phys. Soc. Jpn. 1982. V. 51, № 1. P. 323–331.
25. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1972. — 496 с.
26. Косевич А.М., Иванов Е.А., Ковалев А.С. Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. — Киев: Наук. думка, 1983. — 192 с.
27. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. — М.: Наука, 1986. — 528 с.
28. Tjon J., Wright J. Solitons in the continuous Heisenberg spin chain // Phys. Rev. 1977. V. 15, № 7. P. 3470–3476.
29. Sklyanin E. K. On complete integrability of the Landau–Lifshitz equation. — Preprint LOMI 79-E-3. — Leningrad, 1979. — 32 p.
30. Елеонский В.М., Кулагин Н.Е. О новых случаях интегрируемости уравнений Ландау–Лифшица // ЖЭТФ. 1983. Т. 84, № 2. С. 616–628.
31. Елеонский В.М., Кулагин Н.Е. Интегрируемые модели в задаче о движении частицы в двумерной потенциальной яме // ЖЭТФ. 1983. Т. 85, № 4. С. 1437–1445.
32. Веселов А.В. Уравнение Ландау–Лифшица и интегрируемые системы классической механики // ДАН СССР. 1983. Т. 270, № 5. С. 1094–1097.

## К главе 6

1. Borisov A. B., Kiseliev V. V., Taluts G. G. Solitons in a ferrimagnet // Sol. St. Comm. 1982. V. 44, № 3. P. 441–442.
2. Борисов А.Б., Киселев В.В., Талуц Г.Г. Солитонные решения нелинейной динамики магнетиков // ФНТ. 1983. Т. 9, № 2. С. 170–178.
3. Borisov A. B., Kiseliev V. V. Two-dimensional solutions of the Landau–Lifshitz equation // Phys. Lett. A. 1985. V. 107, № 4. P. 161–163.
4. Туров Е.А. Физические свойства магнитоупорядоченных кристаллов. — М.: Издательство АН СССР, 1963 — 224 с.  
Turov E. A. Physical properties of magnetically ordered crystals. — Academic Press: New York, London, 1965. — 222 p.
5. Изюмов Ю.А., Озеров Р.П. Магнитная нейтронография. — М.: Наука, 1966. — 532 с.
6. Тикадзуми С. Физика ферромагнетизма: магнитные свойства веществ. — М.: Мир, 1983. — 293 с.
7. Баряхтар И.В., Иванов Б.А. Нелинейные волны намагниченности антиферромагнетиков // ФНТ. 1979. Т. 5, № 7. С. 759–770.
8. Баряхтар И.В., Иванов Б.А. О нелинейных волнах намагниченности антиферромагнетика. — Препринт ДонФТИ АН УССР №80-4. — Донецк, 1980. — 61 с.

9. *Lakshamanan M.* Continuum spin system as an exactly soluble dynamical system // *Phys. Lett. A.* 1977. V. 61, № 1. P. 53–54.
10. *Takhtajan L. A.* Integration of the continuum Heisenberg spin chain through the inverse scattering method // *Phys. Lett. A.* 1977. V. 64, № 2. P. 235–237.
11. *Pohlmeyer K.* Integrable Hamiltonian systems and interaction through quadratic constraints // *Comm. Math. Phys.* 1976. V. 46. P. 207–221.
12. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов: Метод обратной задачи. — М.: Наука, 1980. — 320 с.
13. *Walquest H. D., Estabrook F. B.* Prolongation structure of nonlinear evolution equations // *J. Math. Phys.* 1975. V. 16, № 1. P. 1–7.
14. *Кузнецов Е. А., Михайлов А. В.* О полной интегрируемости двумерной классической модели Тирринга // *ТМФ.* 1977. Т. 30, № 3. С. 303–310.
15. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. — М.: ГИТТЛ, 1950. — 303 с.
16. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964. — 830 с.
17. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. — М.: Наука, 1973. — 504 с.
18. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантовых полей. — М.: Наука. — 1973. — 416 с.
19. *Иванов Б. А., Сукстанский А. Л.* Нелинейные волны намагниченности в ферритах // *ЖЭТФ.* 1983. Т. 84, № 1. С. 370–379.
20. *Полуэктов Ю. М.* Нелинейная волна намагниченности в сверхтекучем  $^3\text{He-A}$  // *ФНТ.* 1983. Т. 9, № 5. С. 469–478.
21. *Борисов А. Б., Киселев В. В., Талуц Г. Г.* Дисклинация в изотропном антиферромагнетике // Исследования по физике кинетических явлений. — Свердловск: АН СССР, УНЦ, 1984. — С. 118–126.
22. *Михайлов А. В., Яремчук А. И.* Аксиально-симметричные решения двумерной модели Гейзенберга // *Письма в ЖЭТФ.* 1982. Т. 36, № 3. С. 75–77.
23. *Papanicolaou N.* Duality rotation for 2d classical ferromagnets // *Phys. Lett. A.* 1985. V. 84, № 3. P. 151–154.

### К главе 7

1. *Борисов А. Б., Киселев В. В.* Многосолитонные решения асимметричных киральных  $SU(2)$ ,  $SL(2, R)$ -теорий ( $d = 1$ ) // *ТМФ.* 1983. Т. 54, № 2. С. 246–257.
2. *Борисов А. Б., Киселев В. В., Талуц Г. Г.* Солитонные решения нелинейной динамики магнетиков // *ФНТ.* 1983. Т. 9, № 2. С. 170–178.
3. *Borisov A. B., Kiseliev V. V., Talutz G. G.* N-soliton solutions for asymmetric chiral  $SU(2)$  theory // *Nonlinear and turbulent processes in physics.* V. 3 / Edited by R. S. Sagdeev — New York: Gordon and Breach, Harwood Academic Publishers, 1984. — P. 1211–1217.
4. *Борисов А. Б., Киселев В. В., Талуц Г. Г.* Многосолитонные решения асимметричной киральной  $SU(2)$  теории. В сб.: Проблемы нелинейных и турбулентных процессов в физике, Т. 2. — Киев: Наук. думка, 1985. — С. 272–275.

5. Киселев В.В. Динамические солитоны в магнетиках с несколькими магнитными подрешетками. — Дис. канд. физ.-мат. наук — Свердловск, 1984. — 168 с.
6. Борисов А.Б. Нелинейные возбуждения и двумерные топологические солитоны в магнетиках. — Дис. докт. физ.-мат. наук — Свердловск, 1986. — 303 с.
7. Смоленский Г.А., Леманов В.В., Недлин Г.М., Петров М.П., Писарев Р.В. Физика магнитных диэлектриков. — Л.: Наука, 1974. — 454 с.
8. Изюмов Ю.А., Озеров Р.П. Магнитная нейтронография. — М.: Наука, 1966. — 532 с.
9. Андреев А.Ф., Марченко В.И. Симметрия и макроскопическая динамика магнетиков // УФН. 1980. Т. 130, № 1. С. 37–63.
10. Kaup D.J. The method of solution for stimulated Raman scattering and two photon absorption. — Preprint Clarkson College of Technology, April, 1980.
11. Steudel H. Solitons in stimulated Raman scattering // Ann. der Physik. 1977. V. 7, № 3. S. 188–200.
12. Стефановский Е.П. Модулированные магнитные структуры в некоторых моноклинных системах (MnOОН и изоморфные ему соединения) // ФНТ. 1987. Т. 13, № 7. С. 740–746.
13. Борисов А.Б., Киселев В.В. Солитоны в модулированной структуре MnOОН и изоморфных ему соединений // ФТТ. 1990. Т. 32, № 1. С. 212–219.
14. Pohlmeyer K. Integrable Hamiltonian systems and interaction through quadratic constraints // Comm. Math. Phys. 1976. V. 46. P. 207–221.
15. Захаров В.Е., Михайлов А.В. Пример нетривиального взаимодействия солитонов в двухмерной классической теории поля // Письма в ЖЭТФ. 1977. Т. 27, № 1. С. 47–51.
16. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. — М.: Наука, 1980. — 320 с.
17. Бейтмен Г., Эрдейи А. Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матье. — М.: Наука, 1967. — 229 с.
18. Ахиезер А.И. Элементы теории эллиптических функций. — М.: Наука, 1970. — 304 с.
19. Михалев В.Г. О полной интегрируемости уравнений O(3)-поля в классе быстроубывающих функций // Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. 10 / Зап. науч. сем. ЛОМИ. Т. 172. — Л.: Наука, 1989. — С. 99–104.

## К главе 8

1. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. — М.: Мир, 1988. — 694 с.  
*Dodd R. K., Eilbeck J. C., Gibbon J. D., Morris H. C. Solitons and nonlinear wave equation.* — Academic Press, Inc. (Harcourt Brace Jovanovich, Publishers): London, Orlando, San Diego, New York, Toronto, Montreal, Sydney, Tokio, 1982.

2. Ковалев А.С., Косевич А.М., Манжос И.В., Маслов К.В. Прецессионный солитон в ферромагнитной пленке // Письма в ЖЭТФ. 1986. Т. 44, № 4. С. 174–177.
3. Киселев В.В., Танкеев А.П. Длинноволновые слабонелинейные спиновые возбуждения в тонких ферромагнитных пленках // ФММ. 1996. Т. 82, № 2. С. 32–45.
4. Kiselev V. V., Tankeyev A. P. Non-local dynamics of weakly nonlinear spin excitations in thin ferromagnetic films // J. Phys.: Condens. Matter. 1996. V. 8. P. 10219–10229.
5. Kiselev V. V., Tankeyev A. P. Non-local dynamics of exchange-dipole spin waves in ferromagnetic films // Studies in applied electromagnetics and mechanics, V. 13: Non-linear electromagnetic systems. Advanced techniques and mathematical methods / Ed. by V. Kose and I. Sievert. — Amsterdam: IOS Press, 1998. — P. 131–135.
6. Киселев В.В., Танкеев А.П., Кобелев А.В. Слабонелинейная динамика дипольно-обменных волн в ферромагнитных пластинах конечной толщины // ФММ. 1996. Т. 82, № 5. С. 38–58.
7. Киселев В.В., Танкеев А.П. Солитоны в антиферромагнитной пленке // ФТТ. 1994. Т. 36, № 10. С. 3055–3066.
8. Kiselev V. V., Tankeyev A. P. Weakly non-linear excitations in an antiferromagnetic film // J. Phys.: Condens. Matter. 1995. V. 7. P. 2087–2094.
9. Kiselev V. V., Tankeyev A. P. Non-local dynamics and soliton regimes in an antiferromagnetic film // Studies in applied electromagnetics and mechanics, V. 13: Non-linear electromagnetic systems. Advanced techniques and mathematical methods / Ed. by V. Kose and I. Sievert. — Amsterdam: IOS Press, 1998.
10. Лукомский В.П. Нелинейные магнитостатические волны в ферромагнитных пластинах // УЖФ. 1978. Т. 23, № 1. С. 134–139.
11. Звездин А.К., Попков А.Ф. К нелинейной теории магнитостатических спиновых волн // ЖЭТФ. 1983. Т. 84, № 2. С. 606–615.
12. Калиникос Б.А., Ковшиков Н.Г., Славин А.Н. Наблюдение спин-волновых солитонов в ферромагнитных пленках // Письма в ЖЭТФ. 1983. Т. 38, № 7. С. 343–347.
13. Калиникос Б.А., Ковшиков Н.Г., Славин А.Н. Солитоны огибающей и модуляционная неустойчивость дипольно-обменных волн намагниченности в пленках железо-иттриевого граната // ЖЭТФ. 1988. Т. 94, № 2. С. 159–176.
14. Kalinikos B. A., Kovshikov N. G., Slavin A. N. Experimental observation of magnetostatic wave envelope solitons in yttrium iron garnet // Phys. Rev. B. 1990. V. 42, № 13. P. 8658–8660.
15. Калиникос Б.А., Ковшиков Н.Г., Патон К.Е. Наблюдение автогенерации темных солитонов огибающей спиновых волн в ферромагнитных пленках // Письма в ЖЭТФ. 1998. Т. 68, № 3. С. 229–233.  
Kalinikos B. A., Kovshikov N. G., Patton C. E. Excitation of bright and dark microwave magnetic envelope solitons in a resonant ring // Appl. Phys. Lett. 1999. V. 75, № 2. P. 265–267.



16. Boardman A.D., Nikitov S.A., Waby N.A. Existence of spin-wave solitons in an antiferromagnetic film // *Phys. Rev. B*. 1993. V.48, №18. P.13602–13606.
17. Slavin A.N., Dudko G.M. Numerical modeling of spin wave soliton propagation in ferromagnetic films // *JMMM*. 1990. V.86, №1. P.115–123.
18. Chen M., Tzankov M.A., Nash J.M., Patton C.E. Microwave magnetic-envelope dark solitons in yttrium iron garnet films // *Phys. Rev. Lett.* 1993. V.67, №11. P.1707–1710.
19. Chen M., Nash J.M., Patton C.E. A numerical study of nonlinear Schrödinger equation solutions for microwave solitons in magnetic thin films // *J. Appl. Phys.* 1993. V.73. P.3906–3909.
20. Борисов А.Б., Киселев В.В. Солитоны в модулированной структуре  $\text{MnOON}$  и изоморфных ему соединений // *ФТТ*. 1990. Т.32, №1. С.212–219.
21. Киселев В.В. Солитоны и трехволновой резонанс на фоне модулированной магнитной структуры антиферромагнетиков. — Препринт ИФМ УрО АН СССР. — Свердловск, 1991. — 25 с.
22. Киселев В.В. Солитоны и трехволновой резонанс на фоне модулированной магнитной структуры антиферромагнетиков // *ФТТ*. 1992. Т.34, №3. С.769–778.
23. Киселев В.В., Танкеев А.П. Магнитоупругий резонанс длинных и коротких волн в магнетиках // *ФММ*. 1993. Т.75, №1. С.40–53.
24. Волжан Е.В., Гиоргадзе Н.П., Патарая А.Д. О слабонелинейных магнитоупругих колебаниях в ферромагнетиках // *ЖЭТФ*. 1976. V.70, №4, С.1330–1339.
25. Nayyar A.H., Murtaza G. Motion of a magnetic soliton about a lattice soliton in Heisenberg chain // *Phys. Rev.* 1982. V.26, №7, P.3904–3909.
26. Izyumov Yu.A., Laptev V.M. Soliton magnetoelastic excitation in the Heisenberg ferromagnetic chain // *Phys. Stat. Sol. (b)*. 1982. V.112, №1. С.155–159.
27. Турицын С.К., Фалькович Г.Е. Устойчивость магнитоупругих солитонов и самофокусировка звука в антиферромагнетиках // *ЖЭТФ*, 1985. V.89, №1 (7). С.258–270.
28. Меньшенин В.В. Нелинейное возбуждение безактивационных магнитоупругих волн вблизи ориентационных фазовых переходов в магнетиках // *ФММ*. 1990, №11. С.23–30.
29. Шамсутдинов М.А., Ломакина И.Ю., Назаров В.Н., Харисов А.Т., Шамсутдинов Д.М. Ферро- и антиферромагнитодинамика. Нелинейные колебания, волны и солитоны. — М.: Наука, 2009. — 456 с.
30. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. — М.: Наука, 1980. — 320 с.
31. Тарасов В. О. Начально-краевая задача для нелинейного уравнения Шредингера // *Зап. науч. сем. ЛОМИ*. 1988. Т.169. С.151–165.
32. Бибииков П.Н. Тарасов В.О. Краевая задача для нелинейного уравнения Шредингера // *ТМФ*. 1989. Т.79, №3. С.334–346.
33. Fokas A.S. An initial-boundary value problem for nonlinear Schrödinger equation // *Physica D*. 1989. V.35. P.167–185.

34. *Fokas A.S., Ablowitz M.J.* Forced nonlinear evolution equations and the inverse scattering transform // *Stud. Appl. Math.* 1989. V.80, № 3. P. 253–272.
35. *Бикбаев Р. Ф., Имс Р. Ф.* Алгеброгеометрические решения краевой задачи для нелинейного уравнения Шредингера // *Мат. заметки.* 1989. Т. 45, № 5. С. 3–9.
36. *Bikbaev R.F., Tarasov V.O.* Initial-boundary problem for the nonlinear Schrödinger equation // *J. Phys. A.* 1991. V. 24. P. 2507–2518.
37. *De Wames R.E., Wolfram T.* Dipole-exchange spin waves in ferromagnetic films // *J. Appl. Phys.* 1970. V. 41, № 3. P. 987–993.
38. *Ахиезер А. И., Барьяхтар В. Г., Пелетминский С. В.* Спиновые волны. — М.: Наука, 1967. — 368 с.
39. *Ганн В. В.* Неоднородный резонанс в ферромагнитной пленке // *ФТТ.* 1966. Т. 8, № 11. С. 3167–3172.
40. *Михайловская Л. В., Хлебопрос Р. Г.* Магнитостатический спектр ферромагнитной пленки // *ФТТ.* 1969. Т. 11, № 10. С. 2854–2857.
41. *Михайловская Л. В., Хлебопрос Р. Г.* Влияние поверхностного закрепления спинов на магнитостатический спектр ферромагнитного слоя // *ФТТ.* 1974. Т. 16, № 1. С. 77–82.
42. *Филиппов Б. Н.* О колебаниях намагниченности в ферромагнитных пластинах // *ФММ.* 1971. Т. 32, № 5. С. 911–924.
43. *Филиппов Б. Н., Титяков И. Г.* О колебаниях намагниченности в ферромагнитных пластинах // *ФММ.* 1973. Т. 35, № 1. С. 28–38.
44. *Калиникос Б. А.* Спектр и линейные возбуждения в ферромагнитных пленках // *Изв. вузов. Физика.* 1981. Т. 25, № 8. С. 42–56.
45. *Taniuti T., Yajima N.J.* Perturbation method a non-linear wave modulation. I // *J. Math. Phys.* 1969. V. 10, № 8. P. 1369–1372.
46. *Taniuti T., Yajima N.J.* Perturbation method a non-linear wave modulation. II // *J. Math. Phys.* 1969. V. 10, № 11. P. 2020–2024.
47. *Kalinikos B.A., Slavin A.N.* Theory of dipole-exchange spin wave spectrum for ferromagnetic films with mixed exchange boundary conditions // *J. Phys. C: Sol. State Phys.* 1986. V. 19, № 35. P. 7013–7033.
48. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1972. — 496 с.
49. *Раевский В. Я.* Математическое моделирование доменопродвигающих систем для запоминающих устройств. — Дисс. канд. физ.-мат. наук. — Свердловск, ИФМ УНЦ АН СССР, 1986. — 146 с.
50. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977. — 622 с. *Whitham G.B.* Linear and nonlinear waves. — A Wiley-Interscience Publication, 1974.
51. *Kiseliev V.V., Tankeyev A.P., Kobelev A.V., Shagalov A.G.* Non-linear spin dynamics in ferromagnetic films and Schrödinger equation in the vicinity of the zero-dispersion point // *J. Phys. Condens. Matter.* 1999. V. 11. P. 3461–3474.
52. *Ablowitz M.J., Segur H.* Asymptotic solutions of the Korteweg-de Vries equation // *Stud. Appl. Math.* 1977. V. 57. P. 13–44.
53. *Miles J.W.* The asymptotic solitons of the Korteweg-de Vries equation in the absence of solitons // *Stud. Appl. Math.* 1979. V. 60. P. 59–72.

54. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи рассеяния. — М.: Мир, 1987. — 444 с.  
*Ablowitz M., Segur H.* Solitons and the inverse scattering transform. — SIAM Philadelphia, 1981.
55. *Громов Е.М., Таланов В.И.* Нелинейная динамика коротких цугов волн в диспергирующих средах // ЖЭТФ. 1996. Т.110, № 1. С. 137–149.
56. *Gromov E.M.* Propagation of short nonlinear wave packets and solitons in smoothly inhomogeneous media // Phys. Lett. A. 1997. V. 227. P. 67–71.
57. *Wai P.K.A., Chen H.H., Lee Y.C.* Radiations by «solitons» at the zero group-dispersion wavelength of single-mode optical fibers // Phys. Rev. A. 1990. V. 41, № 1. P. 426–438.
58. *Kuehl H.H., Zhang C.Y.* Effects of higher-order dispersion on envelope solitons // Phys. Fluids B. 1990. V. 2, № 5. P. 889–900.
59. *Karpman V.I.* Radiation by solitons due to higher-order dispersion // Phys. Rev. E. 1993. V. 47, № 3. P. 2073–2083.
60. *Karpman V.I.* Stationary and radiating dark solitons of the third order nonlinear Schrödinger equation // Phys. Lett. A. 1993. V. 181. P. 211–215.
61. *Karpman V.I.* Evolution of the solitons described by higher-order nonlinear Schrödinger equation. — Jerusalem (Israel), Recah Institute of Physics, Hebrew University, preprint, 1998. — 13 p.
62. *Lui M., Drucker A.R., King A.R., Kotthaus J.R., Hansma R.K., Jaccarino V.* Observation of antiferromagnetic resonance in epitaxial films of  $\text{MnF}_2$  // Phys. Rev. B. 1986. V. 33, № 11. P. 7720–7723.
63. *Lui M., Ramos C.A., King A.R., Jaccarino V.* Antiferromagnetic standing-spin-wave resonance in epitaxial films of  $\text{MnF}_2$  // J. Appl. Phys. 1990. V. 67, № 9. P. 5518–5523.
64. *Гуревич А.Г.* Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках. — М.: Наука, 1973. — 591 с.
65. *Барьяхтар В.Г., Горобец Ю.И.* Цилиндрические магнитные домены и их решетки. — Киев: Наукова думка, 1988. — 168 с.
66. *Ono H.* Algebraic solitary waves in stratified fluids // J. Phys. Soc. Japan. 1975. V. 39, № 4. P. 1082–1091.
67. *Benjamin T. V.* Internal waves of permanent form in fluids of great depth // J. Fluid Mech. 1967. V. 59, part 3. P. 559–592.
68. *Matsuno Y.* Exact multi-soliton solutions of the Benjamin-Ono equation // J. Phys. A: Math. Gen. 1979. V. 12, № 4. P. 619–621.
69. *Ablowitz M., Fokas A.S., Anderson R.L.* The direct linearising transform and the Benjamin-Ono equation // Phys. Lett. A. 1983. V. 93, № 8. P. 375–378.
70. *Fokas A.S., Ablowitz M.* The inverse scattering transform for Benjamin-Ono equation — a pivot to multidimensional problems // Stud. Appl. Math. 1983. V. 68. P. 1–10.
71. *Harris A.B., Kumar D., Halperin B.I., Hohenberg P.C.* Dynamics of an antiferromagnet at low temperatures: Spin-wave damping and hydrodynamics // Phys. Rev. B. 1971. V. 3, № 3. P. 961–1024.
72. *Ramani A., Grammaticos B., Bountis T.* The Painlevé property and singularity analysis of integrable and non-integrable systems // Phys. Rep. 1989. V. 180, № 3. P. 159–245.

73. *Lee Y.C., Chen H.H.* Nonlinear dynamical models of plasma turbulence // *Phys. Scr.* 1982. V. 2/1. P. 41–47.
74. *Туров Е.А.* Кинетические, оптические и акустические свойства антиферромагнетиков. — Свердловск: изд-во УрО АН СССР, 1990. — 134 с.
75. *Дикштейн И.Е., Туров Е.А., Шавров В.Г.* Магнитоакустические явления и мягкие моды вблизи магнитных ориентационных фазовых переходов // *Динамические и кинетические свойства магнетиков* / Под ред. С.В. Вонсовского, Е.А. Тулова. — М.: Наука, 1986. — С. 68–103.
76. *Туров Е.А., Колчанов А.В., Меньшенин В.В., Мирсаев И.Ф., Николаев В.В.* Симметрия и физические свойства антиферромагнетиков. — М.: Физматлит. 2001. — 560 с.
77. *Ожогин В.И., Лебедев А.Ю., Якубовский А.Ю.* Удвоение частоты звука и акустическое детектирование в гематите // *Письма в ЖЭТФ.* 1978. Т. 27, № 6. С. 333–336.
78. *Лебедев А.Ю., Ожогин В.И., Якубовский А.Ю.* Вынужденное комбинационное рассеяние звука в антиферромагнетике // *Письма в ЖЭТФ.* 1981. Т. 34, № 1. С. 22–24.
79. *Преображенский В.Л., Савченко М.А., Экономов Н.А.* Нелинейное самовоздействие звуковых волн в антиферромагнетиках с анизотропией типа «легкая плоскость» // *Письма в ЖЭТФ.* 1978. Т. 28, № 2. С. 93–97.
80. *Бережнов В.В., Евтихиев Н.Н., Преображенский В.Л., Экономов Н.А.* Нерезонансное взаимодействие звуковых волн и корреляционная обработка в антиферромагнетиках // *Акуст. журнал.* 1980. Т. 26, № 3. С. 328–335.
81. *Yajima N., Satsuma J.* Soliton solution in a diatomic lattice system // *Prog. Theor. Phys.* 1972. V. 62, № 2. P. 370–378.
82. *Benney D.J.* Significant interaction between long and short waves // *Stud. Appl. Math.* 1976. V. 55. P. 93–106.
83. *Benney D.J.* A general theory for interactions between long and short waves // *Stud. Appl. Math.* 1977. V. 56. P. 81–94.
84. *Каганов М.И., Цукерник В.М.* К феноменологической теории кинетических процессов в ферромагнитных диэлектриках // *ЖЭТФ.* 1959. Т. 36, № 1. С. 224–232.
85. *Pushkarov D.I., Pushkarov Kh.I.* Solitons in one-dimensional ferromagnetic systems // *Phys. Stat. Sol. (b).* 1977. V. 81, № 2. P. 703–707.
86. *Давыдов А.С.* Солитоны в молекулярных системах. — Киев: Наук. думка, 1984. — 288 с.
87. *Toupin R.A., Gazis D.S.* Lattice dynamics. — Oxford: Pergamon Press, U.K., 1965. — 597 p.
88. *Леманов В.В.* Магнитоупругие взаимодействия // *Физика магнитных диэлектриков* / Под ред. Г.А. Смоленского. — Л.: Наука, 1974. — С. 284–355.
89. *Лэм Дж. Л.* Введение в теорию солитонов. — М.: Мир, 1983. — 294 с.
90. *Четкин М.В., Лыков В.В.* Уединенные магнитоупругие волны в борате железа // *ФТТ.* 1990. V. 32, № 9. С. 2848–2849.
91. *Ma Y.G.* On the multi-soliton solutions of some nonlinear evolution equations // *Stud. Appl. Math.* 1979. V. 60, № 1. P. 73–82.

92. Дегтярев Л. М., Маханьков В. Г., Рудаков Л. И. Динамика образования и взаимодействия лэнгмюровских солитонов и сильная турбулентность // ЖЭТФ. 1974. V. 67, № 2. С. 533–542.
93. Yajima N., Oikawa M. Formation and interaction of sonic-Langmuir solitons // Progr. Theor. Phys. 1976. V. 56, № 5. P. 1719–1739.
94. Ma Y. G. The complete solution of the long wave — short wave resonance equations // Stud. Appl. Math. 1978. V. 59, № 2. P. 201–221.

### К главе 9

1. Широбоков М. К теории механизма намагничивания ферромагнетиков // ЖЭТФ. 1945. Т. 15, № 1–2. С. 57–76.
2. Барьяхтар И. В., Иванов Б. А. Нелинейные волны намагниченности антиферромагнетиков // ФНТ. 1979. Т. 5, вып. 7. С. 759–770.
3. Звездин А. К. О динамике доменных границ в слабых ферромагнетиках // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 29, № 2. С. 605–610.
4. Косевич А. М., Иванов Б. А., Ковалев А. С. Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. — Киев: Наук. думка, 1983.
5. Изюмов Ю. А. Дифракция нейтронов на длиннопериодических структурах. М.: Энергоатомиздат, 1987. — 200 с.
6. Dzyaloshinskii I. Magnetoelectricity in ferromagnets // EPL. 2008. V. 83. 67001-p1-p2.
7. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. — М.: Наука, 1986. — 528 с.
8. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. — 320 с.
9. Дубровин Б. А. Римановы поверхности и нелинейные уравнения. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. — 152 с.
10. Borisov A. B., Kiselev V. V. Vortex dipoles on a solution lattice background: Solution of the boundary-value problem by inverse spectral transform // Physica D. 1998. Т. 111. С. 96–128.
11. Kiselev V. V. 2D vortices in incommensurate (stripe-domain) magnetic structures // Phys. Met. Metallogr. 2003. Т. 95, Suppl. 1. С. 28–34.
12. Кузнецов Е. А., Михайлов А. В. Устойчивость стационарных волн в нелинейных средах со слабой дисперсией // ЖЭТФ. 1974. Т. 67, вып. 5 (11). С. 1717–1724.
13. Киселев В. В., Расковалов А. А. Нелинейная динамика квазиодномерной спиральной структуры // ТМФ. 2012. Т. 173, № 2. С. 268–292.
14. Киселев В. В., Расковалов А. А. Нелинейные коллективные возбуждения в геликоидальных магнитных структурах // ФММ. 2012. Т. 113, № 12. С. 1180–1192.
15. Ковалев А. С., Герасимчук И. В. Нелинейная локализация возбуждений и динамика солитонов в самомодулированных системах // ЖЭТФ. 2002. Т. 122, вып. 5. С. 1116–1124.
16. Kovalev A. S., Gerasimchuk I. V., Maugin G. A. Nonlinear excitations of incommensurate surface structures // Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math. 2003. V. 52, N 1. P. 94–102.

17. Kovalev A.S., Gerasimchuk I.V., Maugin G.A. Nonlinear dynamics of incommensurate surface layers // *Phys.Rev.Lett.* 2004. V.92, N24. P.244101-1(4).
18. Borisov A.B., Kishine J., Bostrem Y.G., Ovchinnikov A.S. Soliton excitations in a chiral spiral with strong easy-plane anisotropy // *Phys. Rev. B.* 2009. V.79. P.134436–134446.
19. Дзялошинский И.Е. Теория геликоидальных структур в антиферромагнетиках. III // *ЖЭТФ.* 1964. Т.47, вып.3. С.992–1003.
20. Барьяхтар В.Г., Стефановский Е.П. Спектр спиновых волн в антиферромагнетиках со спиральной магнитной структурой // *ФТТ.* 1969. Т.11, №7. С.1946–1952.
21. Borisov A.B., Kiseliev V.V. Topological defects in incommensurate magnetic and crystal structures and quasi-periodic solutions of the elliptic sine-Gordon equation // *Physica D.* 1988. V.31. P.49–64.
22. Де Жен П. Физика жидких кристаллов. — М: Мир, 1977. — 400 с.
23. Бейтмен Г., Эрдейи А. Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матье. — М.: Наука, 1967.
24. Ахиезер А.И. Элементы теории эллиптических функций. — М.: Наука, 1970.
25. Togawa Y., Koyama T., Takayangi K., Mori S., Kousaka Y., Akimitsu J., Nishihara S., Inoue K., Ovchinnikov A.S. and Kishine J. Chiral magnetic soliton lattice on a chiral helimagnet // *Phys. Rev. Lett.* 2012. V.108. P.107202(1-5).
26. Киселев В.В., Расковалов А.А. Взаимодействие бризера с волной намагниченности в ферромагнетике с анизотропией типа «легкая ось» // *ТМФ.* 2010. Т.163, №1. С.479–495.
27. Памятных Л.А., Лысов М.С., Кандаурова Г.С. Механизм дрейфа полосовых доменов в кристаллах ферритов-гранатов // *Изв. РАН, сер. физ.* 2007. Т.71, №11. С.1542–1544.
28. Памятных Л.А., Лысов М.С., Шматов Г.А., Кандаурова Г.С., Дружинин А.В. Динамический дрейф магнитных доменов в кристаллах ферритов-гранатов // *Изв. РАН, сер. физ.* 2010. Т.74, №1. С.1478–1480.
29. Roessli D., Schefer J., Petrakovskii G.A., Ouladdiaf B., Boehm M., Staub U., Vorotinov A., and Bezmaternikh L. Formation of a magnetic soliton lattice in copper metaborate // *Phys. Rev. Lett.* 2001. V.86. P.1885–1886.
30. Kishine J., Inoue K., and Yoshida Y. Synthesis, structure and magnetic properties of chiral molecule-based magnets // *Progr. Theor. Phys. Suppl.* 2005. V.159. P.82–85.
31. Magnetism: Molecules to materials. V. Edited by J.S. Miller and M. Drillon. 2005. Wiley — VCH Verlag GmbH and Co. KGaA, Weinheim.
32. Моргунов Р.Б., Бердинский В.Л., Кирман М.В., Иное К., Кишине Ж., Ёюшида И. Спиновые солитоны в молекулярных магнетиках с хиральной структурой // *Письма в ЖЭТФ.* 2006. Т.84, №8. С.524–528.
33. Morgunov R., Kirman M.V., Inoue K., Tanimoto Y., Kishine J., Ovchinnikov A.S., and Kazakova O. Spin solitons and spin waves in chiral and racemic molecular based ferrimagnets // *Phys. Rev. B.* 2008. V.77. P.184419 (1–9).

34. *Mostovoy M. Ferromagnetism in spiral magnets* // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 96. P. 067601-1(4).
35. *Mikhailov A. V. The Landau-Lifshitz equation and the Riemann-boundary problem on a torus* // Phys. Lett. A. 1982. V. 92, № 2. P. 51–55.
36. *Борисов А. Б., Киселев В. В.* Многосолитонные решения асимметричных киральных  $SU(2)$ ,  $SL(2, R)$ -теорий ( $d = 1$ ). ТМФ. 1983. Т. 54, № 2. С. 246–257.
37. *Rodin Yu. L. The Riemann boundary problem on a torus and the inverse scattering problem for the Landau-Lifshitz equation* // Lett. Math. Phys. 1983. V. 7. P. 3–8.
38. *Филиппов Б. Н., Танкеев А. П.* Динамические эффекты в ферромагнетиках с доменной структурой. — М.: Наука, 1987. — 217 с.
39. *Kishine J., Ovchinnikov A. S. Theory of spin resonance in a chiral helimagnet* // Phys. Rev. B. 2009. V. 79, № 22. P. 220405 (1–4).
40. *Мушенов Ф. Б., Кирман М. В., Коплак О. В., Моргунов Р. Б.* Определение периода несоразмерной магнитной структуры методом ФМР в хиральных металлоорганических кристаллах // ФТТ. 2012. Т. 54, № 7. С. 1281–1285.
41. *Киселев В. В., Расковалов А. А.* Стоячие спиновые волны и солитоны в квазидоменной спиральной структуре // ЖЭТФ. 2013. Т. 143, № 1. С. 1–9.
42. *Koppelman W. Singular integral equations, boundary value problems and Riemann-Roch theorem* // J. of Math. and Mech. 1961. V. 10, № 2. P. 13–35.
43. *Зверович Э. И.* Краевые задачи теории аналитических функций в гильбертовских классах на римановых поверхностях // УМН. 1971. V. XXVI., № 1. P. 113–179.
44. *Соболева Т. К., Стефановский Е. П., Тарасенко В. В.* Равновесное состояние и спектр элементарных возбуждений в магнетиках с неоднородным основным состоянием // ФТТ. 1980, Т. 22, вып. 8. С. 2353–2358.

### К приложению

1. *Ахиезер А. И.* Элементы теории эллиптических функций. — М.: Наука, 1970. — 304 с.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Маттье. — М.: Наука, 1967. — 229 с.

Научное издание

*БОРИСОВ Александр Борисович*  
*КИСЕЛЕВ Владимир Валерьевич*

## **КВАЗИОДНОМЕРНЫЕ МАГНИТНЫЕ СОЛИТОНЫ**

Редактор *Е.Б. Гугля*  
Оригинал-макет: *Д.П. Вакуленко*  
Оформление переплета: *В.Ф. Киселев*

Подписано в печать . Формат 60×90/16. Бумага офсетная.  
Печать офсетная. Усл. печ. л. 32,5. Уч.-изд. л. 32,5.

Издательская фирма «Физико-математическая литература»  
МАИК «Наука/Интерпериодика»  
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90  
E-mail: [fizmat@maik.ru](mailto:fizmat@maik.ru), [fmlsale@maik.ru](mailto:fmlsale@maik.ru);  
<http://www.fml.ru>

ISBN 978-5-9221-1590-2



9 785922 115902